Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 517.518.11

СИНГУЛЯРНЫЕ МЕРЫ И $(1,p)$–ЕМКОСТЬ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ СОБОЛЕВА

А. С. Романов

Аннотация: Изучаются условия, при которых вклад сингулярной части меры в $(1,p)$-емкость произвольного конденсатора оказывается нулевым.

Ключевые слова: мера, емкость, пространства Соболева

Как правило, необходимые и достаточные условия выполнения различных интегральных соотношений для функций классов Соболева можно довольно просто переформулировать в терминах соответствующей емкости. Однако емкостные условия, возникающие в общем случае, оказываются практически непроверяемыми. Поэтому представляет интерес изучение частных случаев, в которых тем или иным способом удается упростить получение необходимых емкостных оценок. Несколько неожиданный эффект был обнаружен В. Д. Степановым и Д. В. Прохоровым [1] при изучении весовых неравенств на прямой: оказалось, что в одномерной ситуации значение емкости произвольного конденсатора полностью определяется абсолютно непрерывной составляющей меры, а вклад сингулярной части меры оказывается нулевым. В данной работе рассматривается взаимосвязь между сингулярными мерами и соответствующей емкостью в пространственном случае.

Счетная полуаддитивность емкости и ее непрерывность на возрастающих и убывающих семействах множеств позволяют свести интересующий нас вопрос к изучению емкости компактных подмножеств ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть D — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, m_n — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $|E|$ — лебегова мера множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Для $1 < p < \infty$ и произвольной конечной регулярной борелевской меры μ в области D соболевское пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_p(D,\mu)$ определим как пополнение пространства $C^1_0(D)$ по норме

$$\left\| f; L^1_p(D,\mu) \right\| = \left(\int\limits_D |\nabla f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Конденсатором $K = (K_0, K_1)$ *в области* D будем называть пару непересекающихся компактов $K_0, K_1 \subset D$. Для произвольного конденсатора K определим семейство допустимых функций $M(K) = \{ f \in C^1_0(D) \mid 0 \le f(x) \le 1,\ f = 0$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009) и программы «Ведущие научные школы» (код проекта 00–15–96165).

в окрестности K_0, $f = 1$ в окрестности $K_1\big\}$ и соответствующую p-емкость

$$\mathrm{cap}_p(K,\mu) = \inf_{f\in M(K)} \int\limits_D |\nabla f|^p \, d\mu.$$

Для произвольного конденсатора K семейство допустимых функций непусто и его p-емкость конечна.

В случае, когда мера μ является мерой Лебега m_n, мы будем опускать в обозначениях символ меры и писать просто: $\overset{\circ}{L}{}^1_p(D)$, $\mathrm{cap}_p(K)$ и dx вместо dm_n.

Далее символом ν будем обозначать конечную абсолютно непрерывную относительно n-мерной меры Лебега меру в D и использовать запись $d\nu = v\,dx$, где $v \geq 0$, $v \in L_1(D)$.

Конечную регулярную борелевскую меру σ в D ($\sigma(D) > 0$) будем называть *p-тривиальной*, если для любого конденсатора K и любой конечной абсолютно непрерывной меры ν

$$\mathrm{cap}_p(K, \nu + \sigma) = \mathrm{cap}_p(K, \nu).$$

Несложно показать, что всякая p-тривиальная мера является сингулярной.

Предположим противное, т. е. пусть существует p-тривиальная абсолютно непрерывная мера σ, $d\sigma = \omega\,dx$, и $\omega > 0$ на множестве $E \subset D, |E| > 0$. Поскольку почти всякая точка множества E является точкой плотности, найдется сферическое кольцо $R = B(x_0, 2\rho) \setminus \overline{B(x_0,\rho)}$ такое, что $|R \cap E| > \frac{1}{2}|R|$. Пусть $\mu = m_n + \sigma$, $K_0 = S(x_0, 2\rho)$, $K_1 = S(x_0, \rho)$, а последовательность допустимых для конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функций $\{f_k\}$ такова, что при $k \to \infty$

$$\int\limits_D |\nabla f_k|^p \, d\mu \longrightarrow \mathrm{cap}_p(K).$$

В силу равномерной выпуклости соболевского пространства при $1 < p < \infty$ последовательность функций $\{f_k\}$ сходится в пространстве $\overset{\circ}{L}{}^1_p(D)$ к экстремальной функции f_0, градиент которой отличен от нуля всюду в кольце R [2]. При этом

$$\int\limits_R |\nabla f_k|^p \omega \; dx \longrightarrow 0$$

и, следовательно, $\omega = 0$ почти всюду в кольце R, что противоречит нашему предположению об абсолютной непрерывности меры σ.

С другой стороны, в пространственном случае не всякая сингулярная мера оказывается p-тривиальной.

Пример. Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}^n$, длина которого равна $d > 0$. Пусть σ — линейная мера Лебега на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\sigma(E) = 0$ для любого множества $E \cap [\alpha,\beta] = \varnothing$. При $n \geq 2$ мера σ является сингулярной, но не является p-тривиальной. Действительно, для всякой гладкой функции f такой, что $f(\alpha) = 0$ и $f(\beta) = 1$, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$1 \leq \int\limits_{[\alpha,\beta]} |\nabla f| \, d\sigma \leq d^{1/p'} \Bigg(\int\limits_{[\alpha,\beta]} |\nabla f|^p \, d\sigma \Bigg)^{1/p}$$

или

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} |\nabla f|^p \, d\sigma \geq C_0 > 0.$$

Поэтому для любой абсолютно непрерывной меры ν и конденсатора K такого, что $\alpha \in K_0$, $\beta \in K_1$, выполняется неравенство

$$\operatorname{cap}_p(K, \nu + \sigma) \geq \operatorname{cap}_p(K, \nu) + C_0.$$

Таким образом, при любом $n \geq 2$ сужение линейной меры на произвольный отрезок не является p-тривиальной мерой.

Теперь покажем, что всякая мера, носитель которой содержится в некотором множестве нулевой линейной меры Хаусдорфа, является p-тривиальной. Основная идея доказательства, как и в работе [1], заключается в такой перестройке допустимой функции, при которой новая функция, оставаясь допустимой, оказывается локально постоянной на «почти всем» носителе сингулярной меры. Для удобства вначале докажем простое вспомогательное утверждение.

Для фиксированной функции $f : D \to R$ и чисел $a \leq b$ введем следующие обозначения множеств уровня:

$$l_a = \{x \in D \mid f(x) < a\}, \quad L_a = \{x \in D \mid f(x) \leq a\}, \quad D_{a,b} = L_b \setminus l_a.$$

Лемма. *Пусть $f \in C_0^1(D)$, $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$, $0 < a < b < M$ и ν — конечная абсолютно непрерывная мера в D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $0 < a' < a < b < b' < M$ и функция $f^* \in C_0^1(D)$ такие, что*
(i) *$f^*(x) = f(x)$ при $x \in l_{a'}$;*
(ii) *$f^*(x) = f(x) - (b - a)$ при $x \in D \setminus L_{b'}$;*
(iii) *$f(x) \equiv a$ при $x \in D_{a,b}$;*
(iv) $\left\| f^*; L_p^1(D, \nu)\right\|^p \leq \left\| f; L_p^1(D, \nu)\right\|^p + \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность гладких на интервале $(0, 1)$ функций $\{\lambda_k(t)\}$ таких, что $\lambda_k(t) = 0$ в окрестности нуля, $\lambda_k(t) = t$ в окрестности единицы и $|\lambda'{}_k(t)| \leq 1 + 1/k$.

Выберем числа a' и b' так, что $0 < a' < a < b < b' < M$, и построим последовательность допустимых функций

$$f_k^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in l_{a'}, \\ a - (a - a')\lambda_k\left(\frac{a - f(x)}{a - a'}\right), & x \in D_{a,a'}, \\ a, & x \in D_{a,b}, \\ a + (b' - b)\lambda_k\left(\frac{f(x) - b}{b' - b}\right), & x \in D_{b,b'}, \\ f(x) - (b - a), & x \in D \setminus L_{b'}. \end{cases}$$

По построению будет $\nabla f_k^* = 0$ в окрестности множества $D_{a,b}$ и $\nabla f_k^* = \nabla f$ в окрестности множеств уровня, на которых $f = a'$ и $f = b'$. Следовательно, функция f_k^* принадлежит $C_0^1(D)$, и для нее выполняются условия (i)–(iii). Поскольку всюду в D имеет место неравенство $|\nabla f_k^*| \leq (1 + \frac{1}{k})|\nabla f|$, при достаточно больших значениях k

$$\left\| f_k^*; L_p^1(D, \nu)\right\|^p \leq \left\| f; L_p^1(D, \nu)\right\|^p + \varepsilon.$$

Замечание. Из доказательства леммы видно, что числа a', b' могут быть выбраны сколь угодно близкими к a и b соответственно. Если $a = 0$ или $b = M$, то достаточно перестроить функцию с одной стороны соответствующего множества уровня. А финитность функции f нужна лишь для конечности ее соболевской нормы при любой абсолютно непрерывной мере.

Теперь мы можем доказать основной результат.

Теорема. *Пусть $E \subset D$ — множество нулевой линейной меры Хаусдорфа. Тогда всякая конечная регулярная борелевская мера, носитель которой содержится в множестве E, является p-тривиальной.*

Доказательство. Пусть ν — абсолютно непрерывная мера в D, а σ — сингулярная мера с носителем в множестве E. Рассмотрим конденсатор $K \subset D$ и произвольную допустимую функцию $f \in M(K)$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая функция $f^* \in M(K)$ такая, что

$$\left\|f^*; L_p^1(D, \nu + \sigma)\right\|^p \leq \left\|f; L_p^1(D, \nu)\right\|^p + \varepsilon.$$

Поскольку σ — конечная регулярная борелевская мера, носитель которой содержится в множестве E, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой компакт $K \subset E$, что $\sigma(E \setminus K) < \varepsilon_1$. Множество E имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа, и его можно покрыть такой последовательностью открытых шаров $\{B_i(r_i)\}$, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i < \varepsilon_1$, при этом компакт K будет покрыт конечным набором шаров. Следовательно, найдется конечная система шаров $B_1(r_1), \dots, B_k(r_k)$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{k} r_i < \varepsilon_1$$

и для множества

$$F = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$$

выполняется оценка $\sigma(F) < \varepsilon_1$.

Обозначим

$$C = \max_{x \in D} |\nabla f(x)|, \quad A_i = \inf_{x \in B_i} f(x), \quad B_i = \sup_{x \in B_i} f(x).$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} (B_i - A_i) < 2C \sum_{i=1}^{k} r_i < 2C\varepsilon_1.$$

Пусть $\mathring{I}$ — внутренность множества $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{k} (A_i, B_i)}$. Тогда

$$\mathring{I} = \bigcup_{j=1}^{m} (a_j, b_j), \quad m \leq k,$$

при этом интервалы (a_j, b_j) находятся на положительном расстоянии один от другого.

Перестраивая, как и в лемме, функцию f в окрестности множества уровня D_{a_1, b_1}, построим функцию $f_1 \in C_0^1(D)$ такую, что $f_1 = \mathrm{const}$ на множестве D_{a_1, b_1} и

$$\left\|f_1; L_p^1(D, \nu)\right\|^p \leq \left\|f; L_p^1(D, \nu)\right\|^p + \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Продолжая перестройку, по функции f_{j-1} построим функцию $f_j = \mathrm{const}$ на множестве D_{a_j, b_j} такую, что

$$\left\|f_j; L_p^1(D, \nu)\right\|^p \leq \left\|f_{j-1}; L_p^1(D, \nu)\right\|^p + \frac{\varepsilon_1}{2^j}.$$

В результате получим функцию $f_m \in C_0^1(D)$, постоянную на каждом множестве D_{a_j,b_j}, а следовательно, и на всяком шаре $B_1(r_1), \dots, B_k(r_k)$, при этом

$$\|f_m; L_p^1(D,\nu)\|^p \le \|f; L_p^1(D,\nu)\|^p + \varepsilon_1.$$

По построению $|\nabla f_m| \le 2|\nabla f| \le 2C$ всюду в D и $|\nabla f_m| = 0$ на множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$, поэтому

$$\int\limits_D |\nabla f_m|^p \, d\sigma = \int\limits_F |\nabla f_m|^p \, d\sigma \le 2C\varepsilon_1.$$

Имеем $f_m = 0$ в окрестности компакта K_0 и $f_m = 1-\delta$ в окрестности компакта K_1, где

$$\delta \le \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) < 2C\varepsilon_1.$$

При $\varepsilon_1 < \frac{1}{2C}$ функция $f^* = \frac{f_m}{1-\delta}$ будет допустимой для конденсатора K и

$$\|f^*; L_p^1(D,\nu+\sigma)\|^p \le (1-\delta)^{-p}\big(\|f; L_p^1(D,\nu)\|^p + (2C+1)\varepsilon_1\big).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{cap}_p(K,\nu+\sigma) \le \|f^*; L_p^1(D,\nu+\sigma)\|^p \le \|f; L_p^1(D,\nu)\|^p + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ и допустимой функции f получаем $\operatorname{cap}_p(K,\nu+\sigma) = \operatorname{cap}_p(K,\nu)$, что и означает p-тривиальность меры σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О неравенствах с мерами типа теорем вложения Соболева на открытых множествах действительной оси // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 864–878.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

Статья поступила 18 ноября 2002 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru