Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2003. Том 44, № 2

УДК 512.5

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СВОЙСТВАХ 2–СТУПЕННО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н. С. Романовский, Е. И. Тимошенко

Аннотация: Находятся условия, при выполнении которых 2-ступенно разрешимая группа с малым числом соотношений универсально эквивалентна свободной 2-ступенно разрешимой группе. Доказывается, что радикал Фиттинга 2-ступенно разрешимой группы с малым числом соотношений совпадает с коммутантом. Доказывается также, что если n-порожденная разрешимая группа элементарно эквивалентна свободной разрешимой группе ранга m и ступени разрешимости k, то при $k = 2$ или $k > 2$ и $n = m$ эти группы изоморфны.

Ключевые слова: группа, разрешимая, коммутант, элементарная теория

Введение

Известно [1, 2], что универсальные теории свободных разрешимых групп одной ступени разрешимости и разных рангов ≥ 2 совпадают. Назовем конечно порожденную 2-ступенно разрешимую группу *u-группой*, если она универсально эквивалентна свободной неабелевой 2-ступенно разрешимой группе. В настоящей работе мы находим удобный критерий того, что 2-ступенно разрешимая группа с n образующими элементами и m определяющими соотношениями, при $n - m \geq 2$ и некоторых дополнительных ограничениях, которые отсутствуют в случае одного соотношения, является u-группой (теорема 2). Доказательство этого факта использует имеющую самостоятельный интерес теорему 1, в которой утверждается, что радикал Фиттинга 2-ступенно разрешимой группы с n образующими элементами и m определяющими соотношениями, где $n - m \geq 2$, совпадает с коммутантом. В теореме 3 доказывается, что если n-порожденная группа G элементарно эквивалентна свободной разрешимой группе F_{mk} ранга m и ступени разрешимости k $(m, k \geq 2)$, то при $k = 2$ или $k > 2$, $n = m$ группы G и F_{mk} изоморфны.

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть G — группа, $a, b \in G$. Тогда $a^b = b^{-1}ab$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Коммутант группы G обозначаем через G' или $[G, G]$. Через $\mathrm{Fit}(G)$ обозначаем радикал Фиттинга группы G. В случае, когда G — конечно порожденная 2-ступенно разрешимая группа, $\mathrm{Fit}(G)$ совпадает с максимальной нормальной нильпотентной подгруппой. Пусть $\mathfrak{A}^k$ обозначает многообразие разрешимых групп ступени разрешимости $\leq k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00293), научной программы «Университеты России» (проект 04.01.053) и гранта ЕОО–1,0–12 МО РФ.

1. u-Группы с малым числом соотношений

Нам понадобится следующий результат [3, 4].

Предложение 1. *Конечно порожденная 2-ступенно разрешимая группа G является u-группой тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

1) $\mathrm{Fit}(G)$ *— изолированная абелева подгруппа;*

2) *если* $\mathrm{Fit}(G)$ *рассматривать как $Z\overline{G}$-модуль, где $\overline{G} = G/\mathrm{Fit}(G)$, то он не имеет $Z\overline{G}$-кручения.*

Напомним также два факта, касающихся вложения Магнуса (см., например, [5, 6]).

Пусть $F = \langle x_i \mid i \in I\rangle$ — свободная группа, $A = F/R$, a_i — канонический образ x_i в A. Рассмотрим правый свободный ZA-модуль T с базой $\{t_i \mid i \in I\}$, группу матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$ и гомоморфизм групп $\varphi : F \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$, который определяется отображением $x_i \to \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ t_i & 1 \end{pmatrix}$.

Предложение 2. *Ядро гомоморфизма φ равно $[R, R]$.*

Таким образом, φ определяет вложение группы $F/[R, R]$ в группу $\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$, которое называют *вложением Магнуса*. Гомоморфизм φ назовем *гомоморфизмом Магнуса*.

Предложение 3. *Матрица* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ t_1u_1 + \cdots + t_nu_n & 1 \end{pmatrix}$ *лежит в $F\varphi$ тогда и только тогда, когда $a-1 = (a_1-1)u_1+\cdots+(a_n-1)u_n$. В частности, $R\varphi$ состоит из матриц вида* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1u_1 + \cdots + t_nu_n & 1 \end{pmatrix}$, *для которых $(a_1-1)u_1+\cdots+(a_n-1)u_n = 0$.*

Теорема 1. *Пусть $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m;\ \mathfrak{A}^2\rangle$ — 2-ступенно разрешимая группа, заданная в многообразии $\mathfrak{A}^2$ с помощью образующих элементов $x_1, \dots, x_n$ и определяющих соотношений $r_1, \dots, r_m$, где $n - m \geq 2$. Тогда* $\mathrm{Fit}(G) = [G, G]$.

Доказательство. Обозначим через F свободную группу с базой $\{x_1, \dots, x_n\}$, тогда $G = F/\langle r_1, \dots, r_m\rangle^F \cdot F''$. Можно предполагать, что

$$r_1 \equiv x_1^{l_1}, \dots, r_s \equiv x_s^{l_s}, \quad r_{s+1} \equiv \cdots \equiv r_m \equiv 1 \bmod [F, F],\ l_i \geq 1.$$

Допустим, что теорема неверна и существует элемент $g \in \mathrm{Fit}(G) \setminus [G, G]$. Тогда можно утверждать, что для некоторого натурального k имеет место равенство $[G, G]^{(g-1)^k} = 1$. Обозначим через f некоторый прообраз элемента g в F.

1. Предположим сначала, что элемент g имеет бесконечный порядок по модулю $[G, G]$. Полагаем $A = F/\langle x_1, \dots, x_s\rangle \cdot [F, F]$. Пусть a_i $(s+1 \leq i \leq n)$ обозначает канонический образ элемента x_i в A, a — образ элемента f. По предположению $a \neq 1$. Пусть T — правый свободный ZA-модуль с базой $\{t_1, \dots, t_n\}$, $\varphi : F \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$ — соответствующий гомоморфизм Магнуса. Пусть

$$r_1\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, r_m\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_m & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим в модуле T подмодуль U, порожденный элементами $u_1, \dots, u_m$. Из доказательства основной теоремы из [7] следует, что среди элементов $t_{s+1}, \dots, t_n$

найдутся два таких (пусть для определенности это будут t_{n-1}, t_n), что $(t_{n-1} \cdot ZA + t_n \cdot ZA) \cap U = 0$. Рассмотрим канонический гомоморфизм групп

$$\sigma : \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T/U & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагаем $\psi = \varphi\sigma$. Так как $\ker\psi \ni r_1, \dots, r_m$, то $[F\psi, F\psi]^{(f\psi-1)^k} = 1$. Получаем противоречие с тем, что

$$([x_{n-1}, x_n]^{(f-1)^k})\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (t_{n-1}(a_n - 1) - t_n(a_{n-1} - 1))(a-1)^k & 1 \end{pmatrix} \sigma \neq 1.$$

2. Пусть g имеет конечный порядок p по модулю $[G, G]$. Без ограничения общности можно предполагать, что $f \equiv x_1^q \bmod [F, F]$, где $l_1 = pq$. Полагаем $A = F/\langle x_1^{l_1}, x_2, \dots, x_s \rangle \cdot [F, F]$. Пусть a_i $(s+1 \leq i \leq n)$ обозначает канонический образ элемента x_i в A, a — образ элемента x_1, b — образ f. Имеем $b = a^q$, $|a| = l_1$, $|b| = p$. Обозначим также через K поле частных группового кольца $Z\langle a_{s+1}, \dots, a_n \rangle$. Отметим, что групповая алгебра $R = K\langle a \rangle$ является векторным пространством над K размерности l_1. Рассмотрим правый свободный R-модуль T с базой $\{t_1, \dots, t_n\}$ и соответствующий гомоморфизм Магнуса $\varphi : F \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $r_1\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_1 & 1 \end{pmatrix}, \dots, r_m\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_m & 1 \end{pmatrix}$. Группа $[F\varphi, F\varphi]$ отождествляется с некоторой аддитивной подгруппой модуля T. Обозначим через L R-модуль, порожденный этой подгруппой, и через U — R-модуль, порожденный элементами $u_1, \dots, u_m$. Гомоморфизм φ и канонический гомоморфизм

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T/U & 1 \end{pmatrix}$$

определяют гомоморфизм $\psi : F \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T/U & 1 \end{pmatrix}$. Так как $\ker\psi \ni r_1, \dots, r_m$ и $[G, G]^{(g-1)^k} = 1$, то $L(b-1)^k \leq U$. Отметим, что модуль T разлагается в прямую сумму $T' \oplus T''$, где $T' = T(b-1)$, $T'' = T(1 + b + \dots + b^{p-1})$, при этом $\dim_K T' = (p-1)qn$, $\dim_K T'' = qn$. В алгебре $K\langle b \rangle$ существуют элементы h_1, h_2 такие, что $(b-1)h_1 + (1 + b + \dots + b^{p-1})h_2 = 1$. Тогда $(b-1)h_1$ действует тождественным образом на $T' = T(b-1)$, откуда

$$L(b-1)^k = L(b-1) \leq U \cap T(b-1) = U(b-1).$$

В частности,

$$\dim_K L(b-1) \leq \dim_K U(b-1) \leq (p-1)qm.$$

Рассмотрим элементы

$$[x_2, x_{m+1}]\varphi = t_2(a_{m+1} - 1), \dots, [x_m, x_{m+1}]\varphi = t_m(a_{m+1} - 1),$$

$$[x_{m+1}, x_{m+2}]\varphi = t_{m+1}(a_{m+2} - 1) - t_{m+2}(a_{m+1} - 1),$$

$$[x_1, x_{m+1}]\varphi = t_1(a_{m+1} - 1) - t_{m+1}(a - 1).$$

Обозначим через L_0 R-подмодуль, порожденный этими элементами. Легко видеть, что $\dim_K L_0(b-1) = (p-1)q(m+1)$. Получаем противоречие с тем, что $L_0 \leq L$ и $\dim_K L(b-1) \leq (p-1)qm$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_m;\ \mathfrak{A}^2\rangle$ *и* $n - m \geq 2$. *Рассмотрим группу* $A = G/[G,G]$, *правый свободный* ZA*-модуль* T *с базой* $\{t_1, \ldots, t_n\}$, *свободную группу* $F = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ *и соответствующий гомоморфизм Магнуса* $\varphi : F \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. *Пусть*

$$r_i\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_i & 1 \end{pmatrix}, \quad u_i = \sum_{j=1}^{n} t_j u_{ij}, \quad u_{ij} \in ZA \quad (1 \leq i \leq m).$$

Предположим, что элементы $u_1, \ldots, u_m$ *линейно независимы над* ZA (*это выполняется, например, когда в группе* F *элементы* $r_1, \ldots, r_m$ *линейно независимы по модулю* $[F,F]$, *что следует из* [7]). *Тогда* G *является* u*-группой в том и только том случае, если группа* A *не имеет кручения и наибольший общий делитель миноров* m*-го порядка матрицы* (u_{ij}) *равен* 1.

Следствие. *Пусть* 2*-ступенно разрешимая группа* $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1;\ \mathfrak{A}^2\rangle$, $n \geq 3$, *имеет одно соотношение. Тогда в обозначениях теоремы* G *является* u*-группой в том и только том случае, если группа* A *не имеет кручения и наибольший общий делитель элементов* (u_{1j}) *равен* 1.

При выполнении условий теоремы 2 по теореме 1 $\mathrm{Fit}(G) = [G,G]$. Тогда из предложения 1 следует, что G является u-группой в том и только том случае, если группа A не имеет кручения и ZA-модуль $[G,G]$ не имеет ZA-кручения. Предполагаем ниже, что группа A не имеет кручения. Напомним, что модуль $[G,G]$ изоморфен фактор-модулю V/U, где $U = u_1 \cdot ZA + \cdots + u_m \cdot ZA$, V — подмодуль из T, состоящий из элементов $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$ с условием $(a_1 - 1)v_1 + \cdots + (a_n - 1)v_n = 0$, здесь a_i обозначает канонический образ x_i в A. Заметим, что отсутствие ZA-кручения в модуле $[G,G]$ равносильно отсутствию кручения в фактор-модуле T/U. Действительно, если $0 \neq \alpha \in ZA$, $t = t_1w_1 + \cdots + t_nw_n \in T$, $t\alpha \in U$, то $(a_1 - 1)w_1\alpha + \cdots + (a_n - 1)w_n\alpha = 0$, откуда $(a_1 - 1)w_1 + \cdots + (a_n - 1)w_n = 0$ и $t \in V$. Поэтому теорема 2 получается из следующего утверждения.

Лемма. *Пусть* R — *коммутативная область целостности с однозначным разложением;* T — *правый свободный* R*-модуль с базой* $\{t_1, \ldots, t_n\}$; $\{u_1, \ldots, u_m\}$ — *линейно независимая над* R *система элементов из* T; $u_i = \sum_{j=1}^{n} t_j u_{ij}$, $L = u_1 \cdot R + \cdots + u_m \cdot R$. *Тогда фактор-модуль* T/L *не имеет* R*-кручения в том и только том случае, если наибольший общий делитель* d *миноров* m*-го порядка матрицы* $U = (u_{ij})$ *равен* 1.

Доказательство. Пусть $d = 1$. Предположим, что элемент $u_1\lambda_1 + \cdots + u_m\lambda_m$ делится на простой элемент p кольца R, т. е. имеет вид $(t_1v_1 + \cdots + t_nv_n) \cdot p$. Справедливо равенство

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot U = (v_1, \ldots, v_n) \cdot p. \tag{1}$$

Пусть $U_{i_1,\ldots,i_m}$ — квадратная матрица, составленная из столбцов матрицы U с номерами $i_1, \ldots, i_m$, $d_{i_1,\ldots,i_m} = \det U_{i_1,\ldots,i_m}$. Тогда из (1) получаем

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot U_{i_1,\ldots,i_m} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}) \cdot p.$$

Умножая обе части последнего равенства справа на присоединенную матрицу $U^{\nabla}_{i_1,\ldots,i_m}$, получаем

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \cdot d_{i_1,\ldots,i_m} = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}) \cdot U^{\nabla}_{i_1,\ldots,i_m} \cdot p.$$

Следовательно, p делит каждый элемент $\lambda_j d_{i_1,\dots,i_m}$. Поскольку н.о.д.$(d_{i_1,\dots,i_m}) = d = 1$, то p делит все λ_j. Это означает, что фактор-модуль T/L не имеет кручения.

Предположим, что d делится на некоторый простой элемент p кольца R. Кольцо R/pR является областью целостности. Так как все миноры m-го порядка матрицы U равны нулю по модулю pR, существуют элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$, не все принадлежащие pR и такие, что $u_1\lambda_1 + \dots + u_m\lambda_m = tp$, $t \in T$. Тогда $t \notin L$, $tp \in L$ и фактор-модуль T/L имеет кручение. Лемма доказана.

2. Группы, элементарно эквивалентные свободным разрешимым

Теорема 3. *Пусть n-порожденная группа G элементарно эквивалентна свободной разрешимой группе F_{mk} ранга m и ступени разрешимости k $(m, k \geq 2)$. Тогда при $k = 2$ или $k > 2$, $n = m$ группы G и F_{mk} изоморфны.*

Доказательство. Из элементарной эквивалентности G и F_{mk} следует, что G — разрешимая группа ступени k. Рассмотрим сначала случай $k = 2$. Известно [8], что все вербальные подгруппы конечно порожденной 2-ступенно разрешимой группы имеют конечную ширину. В частности, имеют конечную ширину, а значит, являются формульными, вербальные подгруппы, соответствующие многообразиям $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_r$ обозначает многообразие абелевых групп экспоненты r. При $r, s \geq 1$ свободные группы конечных рангов многообразий $\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_s$ являются конечными. Поэтому группы G и F_{m2} имеют одинаковые наборы конечных гомоморфных образов. Но тогда по теореме из [9] группы G и F_{m2} изоморфны.

Пусть $k > 2$, $n = m$. Предположим, что G является собственной фактор-группой F_{nk}/R группы F_{nk}. Можно считать, что все порождающие элементы группы G отличны от единицы. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\}$ — база группы F_{nk} и $r = r(x_1, \dots, x_n)$ — нетривиальный элемент из R. Коммутант группы F_{nk} является формульной подгруппой, которую можно выделить некоторой позитивной $\forall$-формулой $f(t)$ (см. [10]): формула истинна на элементе $t \in F_{nk}$ тогда и только тогда, когда $t \in [F_{nk}, F_{nk}]$. Очевидно, что формула $f(t)$ истинна на элементах из $[G, G]$. Полагаем

$$h(y_1, \dots, y_n) \leftrightarrows (\forall x)(\exists z_1, \dots, z_n, c)\Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} y_i \neq 1 \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} [z_i, y_i] = 1 \\ \wedge \ x = z_1 \dots z_n c \ \wedge \ r(y_1, \dots, y_n) = 1 \ \wedge f(c)\Bigg)$$

Замкнутая формула

$$(\exists y_1, \dots, y_n) h(y_1, \dots, y_n) \tag{2}$$

истинна на группе G. В качестве y_i нужно взять канонический образ x_i в G. Тогда всякий элемент $x \in G$ представляется в виде произведения $z_1 \dots z_n c$, где $c \in [G, G]$, z_i — подходящая степень y_i.

Формула (2) не выполняется на группе F_{nk}. Действительно, зафиксируем нетривиальные элементы $y_1, \dots, y_n \in F_{nk}$. Пусть для определенности $y_1, \dots, y_s \notin F_{nk}^{(k)}$, $y_{s+1}, \dots, y_n \in F_{nk}^{(k)}$. Из условия $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} [z_i, y_i] = 1$ следует, что при $i = 1, \dots, s$ элементы z_i и y_i лежат в одной циклической подгруппе, а при $i = s+1, \dots, n$

будет $z_i \in F_{nk}^{(k)}$ (см. [11]). Тогда из истинности на F_{nk} формулы (2) должно следовать, что группа F_{nk} по модулю коммутанта порождается s элементами. Это возможно лишь при $s = n$ и при условии, что $y_1, \dots, y_n$ линейно независимы по модулю $[F_{nk}, F_{nk}]$. В таком случае [11] элементы $y_1, \dots, y_n$ свободно порождают свободную группу многообразия $\mathfrak{A}^k$, а потому не может выполняться равенство $r(y_1, \dots, y_n) = 1$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е. И.* К вопросу об элементарной эквивалентности групп // Алгебра (Иркутск). 1972. № 1. С. 92–96.
2. *Тимошенко Е. И.* Об универсально эквивалентных разрешимых группах // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 227–240.
3. *Chapuis O.* ∀-free metabelian groups // J. Symbolic Logic. 1997. V. 62, N 1. P. 159–174.
4. *Remeslennikov V. N., Stöhr R.* On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group. Manchester: Manchester Centre for Pure Mathematics, 2001. (Preprint N 2001/20).
5. *Ремесленников В. Н. Соколов В. Г.* Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 5. С. 566–578.
6. *Gupta N.* Free group rings // Contemp. Math. (American Mathematical Society). 1987. V. 66.
7. *Романовский Н. С.* Свободные подгруппы в конечно определенных группах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 1. С. 88–97.
8. *Романьков В. А.* О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 1. С. 60–72.
9. *Носков Г. А.* О роде свободной метабелевой группы. Новосибирск: Новосибирский вычислительный центр, 1984. (Препринт № 504).
10. *Мальцев А. И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 495–498.
11. *Шмелькин А. Л.* Свободные полинильпотентные группы // Докд. АН СССР. 1963. Т. 151, № 1. С. 73–75.

Статья поступила 16 декабря 2002 г.

Романовский Николай Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`rmnvski@math.nsc.ru`

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008
`etim@ngasu.nsk.su`