Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2003. Том 44, № 3

УДК 519.542

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ГРУПП

М. А. Гречкосеева

Аннотация: Дается описание минимальных подстановочных представлений, т. е. точных подстановочных представлений наименьшей степени, простых конечных классических групп как групп автоморфизмов простых алгебр Ли.

Ключевые слова: подстановочное представление, конечная простая группа, группа лиева типа

Введение

Каждая конечная группа обладает подстановочным представлением. Среди конечных групп важное место занимают простые конечные группы, а из всех подстановочных представлений наиболее интересным является минимальное подстановочное представление, т. е. точное подстановочное представление наименьшей степени. Минимальное подстановочное представление простой конечной группы G всегда транзитивно и, следовательно, подобно представлению на множестве правых смежных классов по некоторой собственной подгруппе. Эта подгруппа, очевидно, имеет наименьший индекс в группе G. Таким образом, каждое минимальное подстановочное представление группы G определяется ее подгруппой наименьшего индекса. Представление считается описанным, если указаны индекс и строение соответствующей подгруппы, а также строение ее пересечений с сопряженными подгруппами. По модулю классификационной теоремы неабелевы простые конечные группы делятся на 3 класса: знакопеременные группы, спорадические группы и группы лиева типа. Последние делятся на классические и исключительные. Минимальные подстановочные представления знакопеременных групп очевидны. Минимальные подстановочные представления спорадических групп были получены к 1988 г. (см. итоговую таблицу в [1]).

Степени минимальных подстановочных представлений классических групп найдены Б. Куперстейном в [2]. Полное описание этих представлений, включающее кроме степеней стабилизаторы, подстепени и двойные стабилизаторы, было получено В. Д. Мазуровым и А. В. Васильевым в [3, 4]. В этих работах для каждой серии классических групп проведено отдельное доказательство в терминах линейных преобразований и квадратичных форм. В последующих работах А. В. Васильева [5–7], где речь шла о минимальных подстановочных представлениях исключительных групп лиева типа, рассуждения велись в терминах систем

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (грант УР.04.01.031).

корней и носили более общий характер. Именно этот общий подход навел на мысль унифицировать описание минимальных подстановочных представлений классических групп, рассмотрев их не как группы линейных преобразований, а как группы автоморфизмов соответствующих простых алгебр Ли. Таким образом, цель настоящей статьи — получить как можно более общее описание минимальных подстановочных представлений следующих групп:

$$L_{l+1}(q) = PSL_{l+1}(q) \simeq A_l(q), \quad U_{l+1}(q) = PU_{l+1}(q) \simeq {}^2A_l(q),$$

$$O_{2l+1}(q) = P\Omega_{2l+1}(q) \simeq B_l(q), \quad S_{2l}(q) = PSp_{2l}(q) \simeq C_l(q),$$

$$O_{2l}^+(q) = P\Omega_{2l}^+(q) \simeq D_l(q), \quad O_{2l}^-(q) = P\Omega_{2l}^-(q) \simeq {}^2D_l(q^2).$$

1. Определения, обозначения и предварительные леммы

Рассмотрим минимальное подстановочное представление конечной простой группы G. Как уже отмечалось, это представление транзитивно и подобно представлению на множестве Ω правых смежных классов по некоторой собственной подгруппе M. Индекс этой подгруппы равен степени представления и будет обозначаться через n. Сама группа M является стабилизатором точки. Рассмотрим действие группы M на Ω. Число r орбит этого действия называется *рангом* представления. Если Δ_i, — произвольная орбита, то ее длина n_i называется *подстепенью* представления, а ее стабилизатор $M_i = M \cap M^g, Mg \in \Delta_i$, — *двойным стабилизатором.* Через Δ_1 обозначается тривиальная орбита $\{M\}$, в соответствии с этим обозначением $n_1 = 1, M_1 = M$.

В обозначениях, касающихся групп лиева типа, мы будем в основном следовать [8]. Пусть $\mathscr{L}$ — простая алгебра Ли над конечным полем K, обладающая картановским разложением $\mathscr{L} = \mathscr{K} \oplus \mathscr{L}_{r_1} \oplus \dots \oplus \mathscr{L}_{r_k}$. Через Φ обозначается система корней в $\mathscr{K}$, отвечающая этому разложению, через $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ — система простых корней и через Φ^+ (соответственно через Φ^-) — система положительных (соответственно отрицательных) корней. Ранг алгебры $\mathscr{L}$ обозначается через l.

Если $r, s \in \Phi$, то через A_{rs} обозначается число $2(r,s)/(r,r)$, где $(\ ,\ ) : \mathscr{K} \to K$ — форма Киллинга. Отражение, соответствующее корню r, обозначается через w_r, а группа Вейля — через W. Пусть J — некоторое подмножество системы простых корней Π. Через Φ_J обозначается пересечение Φ и линейной оболочки векторов из J, а через W_J — группа, порожденная множеством $\{w_r \mid r \in J\}$.

Группа Шевалле типа $\mathscr{L}$ над конечным полем K порядка q обозначается через $\mathscr{L}(q)$. В дальнейшем $q = p^m$, где p — характеристика поля K. Порождающие группы $\mathscr{L}(q)$ обозначаются через $x_r(t)$, где $r \in \Phi$, $t \in K$.

Пусть $G = \mathscr{L}(q)$. Ее корневые подгруппы $\{x_r(t) \mid t \in K\}$ обозначаются через X_r, а подгруппы $\langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$, $\langle X_r \mid r \in \Phi^-\rangle$ — через U и V соответственно. Известно, что $G = \langle U, V\rangle$, $U \cap V = 1$, U и V — унипотентные p-подгруппы. Кроме того, нам потребуются следующие коммутаторные соотношения.

Лемма 1 (формула Шевалле для коммутаторов). *Пусть r и s — линейно независимые корни из Φ, $u, t \in K$. Тогда*

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ijrs} \cdot (-t)^i u^j),$$

где произведение берется в порядке возрастания $i+j$ по всем парам, для которых $ir+js \in \Phi$. Константы C_{ijrs} определяются однозначно, и каждая из них может равняться ± 1, ± 2, ± 3.

Доказательство. См. [8, гл. 5, § 2, теорема 2].

Дополнив эти коммутаторные соотношения, можно задать группу G через порождающие и соотношения в смысле следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{L}$ — простая алгебра Ли ($\mathscr{L} \neq A_1$) и K — поле. Для каждого корня r из $\mathscr{L}$ и каждого элемента t поля K введем символ $\bar{x}_r(t)$. Пусть $\overline{G}$ — абстрактная группа, порожденная элементами $\bar{x}_r(t)$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\bar{x}_r(t_1) \cdot \bar{x}_r(t_2) = \bar{x}_r(t_1 + t_2),$$

$$[\bar{x}_s(u), \bar{x}_r(t)] = \prod_{i,j>0} \bar{x}_{ir+js}(C_{ijrs} \cdot (-t)^i u^j),$$

$$\bar{h}_r(t_1) \cdot \bar{h}_r(t_2) = \bar{h}_r(t_1 t_2), \quad t_1 \cdot t_2 \neq 0,$$

где $\bar{h}_r(t) = \bar{n}_r(t) \cdot \bar{n}_r(-1)$ и $\bar{n}_r(t) = \bar{x}_r(t)\bar{x}_{-r}(-t^{-1})\bar{x}_r(t)$. Пусть $\overline{Z}$ — центр группы $\overline{G}$. Тогда

$$\overline{Z} = \left\{ \prod_{i=1}^{l} \bar{h}_{p_i}(t_i) \mid \prod_{i=1}^{l} t_i^{A_{ij}} = 1 \text{ для всех } j = 1, \dots, l \right\}$$

и фактор-группа $\overline{G}/\overline{Z}$ изоморфна группе Шевалле $G = \mathscr{L}(K)$.

Доказательство. См. [8, гл. 12, § 1, теорема 1].

Группа $\overline{G}$ называется *универсальной группой Шевалле.* Будем обозначать через $\overline{X}$ полный прообраз произвольной подгруппы X группы G при естественном гомоморфизме из $\overline{G}$ на G.

Нам потребуются некоторые подгруппы группы G и их свойства. Пусть, как и в предыдущей лемме, $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $n_r = n_r(-1)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r$, $t \in K^*$. Подгруппа $H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi, t \in K^* \rangle$ абелева, нормализует U и V и нормальна в подгруппе $N = \langle H, n_r \mid r \in \Phi \rangle$. Более того, существует гомоморфизм φ из N на W такой, что $\varphi(n_r) = w_r$ и $H = \ker \varphi$. Подгруппой Бореля называется подгруппа $B = UH$. Группа G имеет разложение $G = BNB$ — разложение Брюа. Напомним, что если J — подмножество системы простых корней Π, то подгруппа W_J порождается отражениями w_r, $r \in J$. Если обозначить через N_J прообраз группы W_J в N под действием гомоморфизма φ, то множество $P_J = BN_JB$ — подгруппа в G. Подгруппа, сопряженная в G с подгруппой P_J, называется *параболической.* Следующая лемма описывает строение параболических подгрупп.

Лемма 3 (разложение Леви). *Пусть*

$$U_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_J \rangle = \prod_{r \in \Phi^+ \setminus \Phi_J} X_r, \quad L_J = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_J \rangle.$$

Тогда $U_J \trianglelefteq P_J$, $P_J = U_J L_J$ и $U_J \cap L_J = 1$.

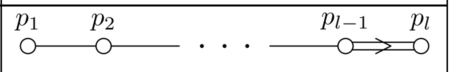
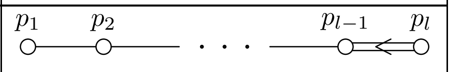
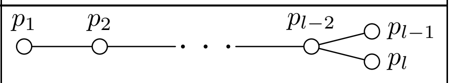
Доказательство. См. [8, гл. 8, § 5, теорема 2].

Следующая лемма дает порядки групп Шевалле.

Лемма 4. *Пусть $G = \mathscr{L}(q)$ — конечная группа Шевалле, $\overline{G}$ — соответствующая ей универсальная группа. Тогда $|G| = |\overline{G}|/d$, $|\overline{G}| = q^N \cdot (q^{d_1} - 1)(q^{d_2} - 1)\dots(q^{d_l} - 1)$, где числа $N = |\Phi^+|, d, d_1, d_2, \dots, d_l$ даны в таблице.*

Доказательство. См. [8, гл. 9, § 4, теорема 10 и гл. 10, § 2, предложение 5].

Таблица

$\mathscr{L}$	N	d	$d_1, d_2, \dots, d_l$	Диаграмма Дынкина
A_l	$\frac{l(l+1)}{2}$	$(l+1, q-1)$	$2, 3, \dots, l+1$	
B_l	l^2	$(2, q-1)$	$2, 4, 6, \dots, 2l$	
C_l	l^2	$(2, q-1)$	$2, 4, 6, \dots, 2l$	
D_l	$l(l-1)$	$(4, q^l - 1)$	$2, 4, \dots, 2l-2, l$	

Пусть J — собственная подсистема системы простых корней П. Мы будем называть подмножество простых корней $I \subseteq J$ *связной компонентой*, если часть диаграммы Дынкина, соответствующая корням из I, является связным графом и для любых двух корней $r \in I$ и $s \in J \setminus I$ выполняется равенство $(r, s) = 0$. Очевидно, что J можно единственным образом представить в виде объединения $J = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_t$ непересекающихся между собой связных компонент. Обозначим через $\mathscr{L}_m$ простую алгебру Ли над тем же полем K, которая имеет диаграмму Дынкина, как у I_m, а через $d_{m,i}$ — инвариант d_i алгебры $\mathscr{L}_m$ (см. таблицу). Порядки параболических подгрупп даются следующей леммой.

Лемма 5. *Пусть $G = \mathscr{L}(q)$. Если $J \subset \Pi$ представляется в виде объединения $J = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_t$ непересекающихся связных компонент, то порядок подгруппы P_J равен*

$$\frac{1}{d} \cdot q^N (q-1)^{l-l_0} \prod_{m=1}^{t} (q^{d_{m,1}} - 1)(q^{d_{m,2}} - 1) \dots (q^{d_{m,l_m}} - 1),$$

где $l_0 = |J|$, d и $N = |\Phi^+|$ даны в таблице, а остальные величины определены выше.

Доказательство. См. [5, предложение 1].

Пусть $\mathscr{L}$ — простая алгебра типа A_l или D_l, $\mathscr{K}$ — ее подалгебра Картана, а ρ — симметрия порядка 2 соответствующей диаграммы Дынкина. Существует единственная изометрия τ векторного пространства $\mathscr{V} = \mathscr{K}_{\mathbb{R}}$ такая, что $\tau(r) = \rho(r)$ для всех $r \in \Pi$. Будем обозначать через $\bar{r}$ корень $\tau(r)$. Обозначим через $\mathscr{V}^1$ подпространство $\{v \in \mathscr{V} \mid \tau(v) = v\}$, через v^1 — проекцию вектора v на $\mathscr{V}^1$ и через W^1 — подгруппу $\{w \in W \mid \tau w \tau^{-1} = w\}$ группы W.

Множества $w(\Phi_J^+)$ по всем элементам $w \in W^1$ и по всем ρ-орбитам $J \subseteq \Pi$ образуют разбиение множества Φ на классы эквивалентности. Будем обозначать множество этих классов через $\overline{\Phi}$, множество классов, в которых есть простые корни, — через $\overline{\Pi}$ и множество классов, состоящих из положительных (соответственно отрицательных) корней, — через $\overline{\Phi^+}$ (через $\overline{\Phi^-}$).

Для любого $r \in \Phi$ существует элемент из W^1, совпадающий с w_{r^1} на подпространстве $\mathscr{V}^1$. Будем обозначать этот элемент через w_S, если r принадлежит классу $S \in \overline{\Phi}$.

Пусть теперь $G = \mathscr{L}(K)$, где $|K| = p^{2m} = q^2$, p — простое число. Существуют графовый автоморфизм g группы G такой, что $g(X_r) = X_{(\bar{r})}$, и полевой автоморфизм f группы G порядка 2. Обозначим $f(t)$ через $\bar{t}$, а неподвижное относительно f подполе поля K — через K_0. Автоморфизмы g и f перестановочны, и их произведение $\sigma = gf$ также имеет порядок 2.

Пусть

$$U^1 = \{x \in U \mid \sigma(x) = x\}, \quad V^1 = \{x \in V \mid \sigma(x) = x\},$$

$$G^1 = \langle U^1, V^1 \rangle, \quad H^1 = G^1 \cap H, \quad N^1 = G^1 \cap N, \quad B^1 = G^1 \cap B.$$

Группа G^1 называется *скрученной группой типа* ${}^2\mathscr{L}$ *над* K.

Пусть S — класс эквивалентности из $\overline{\Phi}$. Тогда

$$X_S = \langle X_r \mid r \in S \rangle = \prod_{r \in S} X_r, \quad X_S^1 = \{x \in X_S \mid \sigma(x) = x\} \neq 1.$$

Пусть I — ρ-орбита в Π. Тогда H^1 порождается элементами $h_I(t)$, где $h_I(t) = h_r(t), t \in K_0^*$, если $I = \{r\}$, и $h_I(t) = h_r(t)h_{\bar{r}}(\bar{t}), t \in K^*$, если $I = \{r, \bar{r}\}$. Для любого элемента $w \in W^1$ существует элемент $n_w \in N^1$ такой, что n_w переходит в w при гомоморфизме φ, упомянутом выше. Поэтому фактор-группа N^1/H^1 изоморфна W^1. Группа G^1 обладает разложением $G^1 = B^1N^1B^1$.

Пусть J — подмножество множества $\overline{\Pi}$, $W_J^1 = \langle w_S \mid S \in J \rangle$, N_J^1 — прообраз группы W_J^1 в N^1. Тогда $P_J^1 = B^1N_J^1B^1$ — подгруппа в G^1. По аналогии с группами Шевалле подгруппа, сопряженная в группе G^1 с подгруппой P_J^1, называется *параболической*. Укажем теперь разложение Леви для группы P_J^1.

Лемма 6 (разложение Леви для скрученных групп). *Пусть*

$$(\overline{\Phi}_J)^0 = \overline{\Phi^+} \setminus \overline{\Phi}_J,\ U_J^1 = \left\langle X_S^1 \mid S \in (\overline{\Phi}_J)^0 \right\rangle = \prod_{S \in (\overline{\Phi}_J)^0} X_S^1,\ L_J^1 = \left\langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_J \right\rangle.$$

Тогда

1) $U_J^1 \trianglelefteq P_J^1$;

2) $P_J^1 = U_J^1L_J^1$, *причем* $U_J^1 \cap L_J^1 = 1$.

Доказательство. См. [7, лемма 2].

Группа $\overline{G}^1 = C_{\overline{G}}(\sigma)$ является универсальной накрывающей для группы G^1. Аналогично определяются группы $\overline{U}^1$, $\overline{V}^1$, $\overline{H}^1$, $\overline{N}^1$, $\overline{P}_J^1$, $\overline{U}_J^1$, $\overline{L}_J^1$.

Последняя лемма содержит порядки скрученных групп.

Лемма 7. *Имеют место равенства*

$$|{}^2A_l(q^2)| = \frac{1}{(l+1, q+1)} \cdot q^{l(l+1)/2} \prod_{k=1}^{l} (q^{k+1} + (-1)^k);$$

$$|{}^2D_l(q^2)| = \frac{1}{(4, q^l+1)} \cdot q^{l(l-1)}(q^l+1) \prod_{k=1}^{l-1} (q^{2k} - 1).$$

Доказательство. См. [8, гл. 14, § 3, теорема 2].

Будем считать, что простые корни системы Π обозначены, как в таблице. Пусть

$$J_i = \Pi \setminus \{p_i\}, \quad J_{i,j} = \Pi \setminus \{p_i, p_j\}.$$

Тогда для краткости обозначим через Φ_i (соответственно через $\Phi_{i,j}$) подсистему Φ_{J_i} ($\Phi_{J_{i,j}}$). Аналогично введем обозначения для P_{J_i}, $P_{J_{i,j}}$, U_{J_i}, $U_{J_{i,j}}$, L_{J_i}, $L_{J_{i,j}}$. Такие же обозначения будем использовать и в случае скрученных групп с соответствующими изменениями.

Приведем также некоторые общепринятые обозначения. Через $A \cdot B$ (соответственно через $A : B$) обозначается расширение (расщепляемое расширение) группы A посредством группы B, через A^m — прямое произведение m групп, каждая из которых изоморфна A. При обозначении подгрупп символом m обозначается циклическая группа порядка m.

2. Параболическая подгруппа P_1

Пусть $G = \mathscr{L}(q)$, где $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, B_l, C_l или D_l. Пусть P_1 — параболическая подгруппа группы G, соответствующая системе простых корней $\Pi \setminus \{p_1\}$. Группа P_1 равна $U_1 : L_1$, где подгруппы U_1 и L_1 определены в лемме 3.

Предложение 1. 1. *Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, B_l или D_l, то $U_1 = p^{mf}$, где $f = |\Phi^+ \setminus \Phi_1|$.*

2. *Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, B_l, C_l, $l \geq 2$, или тип D_l, $l \geq 4$, то $\overline{L}_1 \simeq \overline{\mathscr{L}}_{l-1}(q) \cdot (q-1)$.*

Доказательство. 1. Заметим, что в системах типа A_l, B_l или D_l нет корней, в разложении которых p_1 имел бы коэффициент, больший 1. Группа U_1 порождается корневыми подгруппами X_r, где $r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1$. С другой стороны, в разложении любого корня $r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1$ корень p_1 участвует с положительным коэффициентом. Следовательно, в любой сумме $r + s$, где $r, s \in \Phi^+ \setminus \Phi_1$, этот простой корень имеет коэффициент, больший 1, и, значит, $r + s \notin \Phi$. Таким образом, по лемме 1 все коммутаторы в группе U_1 тривиальны.

2. Рассмотрим в группе $\overline{L}_1$ подгруппу $\overline{T}_1 = \langle \overline{X}_r \mid r \in \Phi_1 \rangle$. Эта подгруппа изоморфна универсальной группе Шевалле $\overline{\mathscr{L}}_{l-1}(q)$ по лемме 2 и нормальна в $\overline{L}_1$, так как группа H нормализует X_r для любого $r \in \Phi$. Группа $\overline{H}_1 = \{\bar{h}_{p_1}(t) \mid t \in K^*\}$ — циклическая группа порядка $q-1$ — и группа $\overline{T}_1$ имеют тривиальное пересечение и порождают всю группу $\overline{L}_1$. Предложение доказано.

Двойные стабилизаторы представления имеют вид $P_1 \cap x^{-1} P_1 x$, $x \in G$. В силу разложения $G = BNB$ и включения $B \leq P_1$ достаточно рассматривать сопряжение элементами из группы N. Будем отождествлять элемент из группы N с его образом в группе W под действием гомоморфизма φ. Обозначим отражение w_{p_1} через w_1 и рассмотрим группу $M_2 = P_1 \cap P_1^{w_1}$.

Предложение 2. *Если ранг l алгебры $\mathscr{L}$ больше 1, то группа M_2 равна $Y_{1,2} : L_{1,2}$, где $Y_{1,2} = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\}) \rangle$ и $L_{1,2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{1,2} \rangle$. Если $l = 2$, то группа $L_{1,2}$ совпадает с $H = (q-1)^2/d$, если $l > 2$, то группа $\overline{L}_{1,2}$ изоморфна $\overline{\mathscr{L}}_{l-2}(q) \cdot (q-1)^2$.*

Доказательство. По лемме 3 группа P_1 равна $\langle H, X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_1 \rangle$. Известно, что $H^w = H$, $X_r^w = X_{w(r)}$ для любых $w \in W$, $r \in \Phi$ (см. [8, гл. 7, § 2, лемма 1 и теорема 2]). Отражение w_1 действует на простых корнях следующим образом:

$$w_1(p_1) = -p_1, \quad w_1(p_2) = p_1 + p_2, \quad w_1(p_i) = p_i, \quad 3 \le i \le l.$$

Множество $\Phi^+ \cup \Phi_1$ является объединением непересекающихся множеств

$$\Phi_{1,2}, \quad \Phi_1^+ \setminus \Phi_{1,2}, \quad \Phi_1^- \setminus \Phi_{1,2}, \quad \big(\Phi^+ \setminus \Phi_1^+\big) \setminus \{p_1\}, \quad \{p_1\}.$$

Очевидно, что w_1 оставляет неподвижным $\Phi_{1,2}$. Далее,

$$w_1\big(\Phi_1^+ \setminus \Phi_{1,2}\big) = \big(\Phi^+ \setminus \Phi_1^+\big) \setminus \{p_1 1\}, \quad w_1\big(\Phi_1^- \setminus \Phi_{1,2}\big) = \big(\Phi^- \setminus \Phi_1^-\big) \setminus \{-p_1\}.$$

В итоге получаем, что

$$w_1(\Phi^+ \cup \Phi_1) \cap (\Phi^+ \cup \Phi_1) = \Phi_{1,2} \cup \big(\Phi_1^+ \setminus \Phi_{1,2}\big) \cup \big(\Phi^+ \setminus \Phi_1^+\big) \setminus \{p_1\} = \Phi_{1,2} \cup \Phi^+ \setminus \{p_1\}.$$

В силу леммы 3 группа M_2 содержится в группе $P_{1,2}$, причем $M_2 \cap U_{1,2} = Y_{1,2}$ и $M_2 \cap L_{1,2} = L_{1,2}$. Очевидно, что подгруппы $Y_{1,2}$ и $L_{1,2}$ порождают M_2. Более того,

$$Y_{1,2} \cap L_{1,2} \le U_{1,2} \cap L_{1,2} = 1.$$

Если $g \in L_{1,2}$, то $(Y_{1,2})^g \le M_2 \cap U_{1,2} = Y_{1,2}$. Значит, как и требовалось доказать, $M_2 = Y_{1,2} : L_{1,2}$.

Теперь рассмотрим в группе $\overline{L}_{1,2}$ подгруппу $\overline{T}_{1,2} = \langle \overline{X}_r \mid r \in \Phi_{1,2} \rangle$. Эта подгруппа изоморфна универсальной группе Шевалле $\overline{\mathscr{L}}_{l-2}(q)$ по лемме 2 и нормальна в $\overline{L}_{1,2}$, так как группа $\overline{H}$ нормализует группу $\overline{X}_r$ для любого корня r. Группа $\overline{H}_2 = \{\bar{h}_{p_1}(t), \bar{h}_{p_2}(t) \mid t \in K^*\}$ — прямое произведение двух циклических групп порядка $q-1$, и группа $\overline{T}_{1,2}$ имеют тривиальное пересечение и порождают всю группу $\overline{L}_{1,2}$.

Предложение 3. *Пусть алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип B_l, C_l, $l \ge 3$, или тип D_l, $l \ge 4$. Тогда существует такой элемент w_0, что $w_0(\Phi_1) = \Phi_1$, а $w_0(\Phi^+ \setminus \Phi_1) = \Phi^- \setminus \Phi_1$ и, следовательно, $P_1^{w_0} \cap P_1 = L_1$.*

Доказательство. Если $\mathscr{L}$ имеет тип B_l, то рассмотрим элемент $w = w_r$, где $r = p_1 + p_2 + \dots + p_l$. Этот элемент оставляет на месте все простые корни, кроме p_1, и $w(p_1) = -p_1 - 2(p_2 + \dots + p_l)$.

Если $\mathscr{L}$ имеет тип C_l, то рассмотрим элемент $w = w_r$, где $r = 2(p_1 + \dots + p_{l-1}) + p_l$. Опять w не меняет все простые корни, кроме p_1, и $w(p_1) = -p_1 - 2(p_2 + \dots + p_{l-1}) - p_l$.

Если $\mathscr{L}$ имеет тип D_l, то рассмотрим элемент $w = w_r w_s$, где $r = p_1 + \dots + p_{l-2} + p_l$, $s = p_1 + \dots + p_{l-2} + p_{l-1}$. Элемент w не меняет все простые корни, кроме p_1, p_{l-1} и p_l: $w(p_l) = p_{l-1}$ и $w(p_1) = -p_1 - 2(p_2 + \dots + p_{l-2}) - p_{l-1} - p_l$.

Во всех случаях непосредственно проверяется, что элемент w искомый. Например, в первом случае

$$w(r) = -r, \quad w(p_1 + p_2 + \dots + p_j) = -(p_1 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_l)), \quad 1 \le j < l,$$

и, значит, $w(\Phi^+ \setminus \Phi_1) = \Phi^- \setminus \Phi_1$. Осталось напомнить, что $P_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1 \cup \Phi^+ \rangle$, а $L_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1 \rangle$.

3. Группа $A_l(q)$

А. Алгебра A_l**.** Система простых корней: $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$. Система положительных корней:

$$\Phi^+ = \{p_i + p_{i+1} + \dots + p_j, \quad 1 \le i \le j \le l\}.$$

Диаграмма Дынкина имеет вид

В. Группа $A_l(q)$ **и ее параболические подгруппы наименьшего индекса.** Обозначим группу $A_l(q)$ через G. По лемме 4

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^2 - 1)(q^3 - 1) \dots (q^{l+1} - 1),$$

где $d = (l+1, q-1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = |\Phi^+| = l(l+1)/2$. Далее,

$$Z(\overline{G}) = \{z(t) = \bar{h}_{p_1}(t^l)\bar{h}_{p_2}(t^{l-1}) \dots \bar{h}_{p_l}(t) \mid t^{l+1} = 1\}.$$

Как следует из [3], при $l \ge 2$ или при $q \ge 13$ и при условии, что $(l, q) \ne (3, 2)$, подгруппой наименьшего индекса в G является параболическая подгруппа. Лемма 5 позволяет заключить, что наибольший порядок имеют максимальные параболические подгруппы P_1 и P_l, и

$$|P_1| = |P_l| = \frac{1}{d} q^N (q - 1)(q^2 - 1)(q^3 - 1) \dots (q^l - 1).$$

Эти подгруппы сопряжены в группе $\operatorname{Aut} G$, и представления по ним подобны. Таким образом, степень минимального представления при указанных ограничениях равна $n = |G : P_1| = (q^{l+1} - 1)/(q - 1)$.

По лемме 3 группа P_1 равна $U_1 : L_1$, где $U_1 = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1 \rangle$, $L_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1 \rangle$. Мощность множества $\Phi^+ \setminus \Phi_1$ равна l, и по предложению 1 имеем $U_1 = p^{ml}$.

Если $l = 1$, то $L_1 = H = (q-1)/d$. Пусть теперь $l \ge 2$. По предложению 1 будет $\overline{L}_1 \simeq \overline{A}_{l-1}(q) \cdot (q-1)$. Для факторизации по центру группы G нам потребуется группа $\overline{T}_1$, определенная в доказательстве предложения. Группа $Z(\overline{T}_1)$ равна $\{\bar{h}_{p_2}(t^{l-1}) \dots \bar{h}_{p_l}(t) \mid t^l = 1\}$, и ее порядок равен $d_1 = (l, q-1)$.

Элемент $h_1(t) = \bar{h}_{p_1}(t^l)\bar{h}_{p_2}(t^{l-1}) \dots \bar{h}_{p_l}(t)$ централизует $\overline{T}_1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того,

$$\langle h_1 \rangle \cap \overline{T}_1 = Z(\overline{T}_1), \quad \bar{h}_{p_1}(t)^{d_1} \in \langle h_1, \overline{T}_1 \rangle$$

для всех $t \in K^*$, следовательно, $\overline{L}_1 = d_1 \cdot (A_{l-1}(q) \times (q-1)/d_1) \cdot d_1$. С учетом того, что $Z(\overline{G}) \le \langle h_1 \rangle$ и $Z(\overline{G}) \cap Z(\overline{T}_1) = 1$, окончательно получаем, что

$$L_1 = d_1 \cdot (A_{l-1}(q) \times (q-1)/dd_1) \cdot d_1.$$

С. Двойные стабилизаторы. Напомним, что двойные стабилизаторы имеют вид $P_1 \cap w^{-1} P_1 w$, $w \in W$.

Пусть $w = w_{p_1}$. Рассмотрим группу $M_2 = P_1 \cap w^{-1} P_1 w$. Если ранг $l = 1$, то $M_2 = H = (q-1)/d$. Пусть теперь $l \ge 2$. По предложению 2 группа M_2 равна $Y_{1,2} : L_{1,2}$, где

$$Y_{1,2} = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\}) \rangle, \quad L_{1,2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{1,2} \rangle.$$

Докажем, что группа $Y_{1,2}$ абелева. В разложении по базису простых корней любого корня $r \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})$ корень p_2 участвует с коэффициентом 1. Следовательно, в любой сумме $r+s$, где $r, s \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})$, этот простой корень имеет коэффициент 2 и, значит, $r+s \notin \Phi$. Таким образом, по лемме 1 все коммутаторы в группе $U_{1,2}$ тривиальны, и $U_{1,2} = p^{2m(l-1)}$.

По предложению 2 $L_{1,2} = (q-1)^2/d$, если $l=2$, и $\overline{L}_{1,2} \simeq \overline{A}_{l-2}(q) \cdot (q-1)^2$, если $l>2$. В последнем случае рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}$, определенную в предложении. Группа $Z(\overline{T}_{1,2})$ совпадает с $\{\bar{h}_{p_3}(t^{l-2}) \dots \bar{h}_{p_l}(t) \mid t^{l-1} = 1\}$, и ее порядок равен $d_2 = (l-1, q-1)$.

Элементы $h_2(t) = \bar{h}_{p_1}(t^{-l}) h_1(t)$ и $\bar{h}_{p_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}$ для всех $t \in K^*$. Кроме того,

$$\langle h_{p_1} \rangle \cap \langle \overline{T}_{1,2}, h_2 \rangle = 1, \quad \langle h_2 \rangle \cap \overline{T}_{1,2} = Z(\overline{T}_{1,2})$$

и $\bar{h}_{p_2}(t)^{d_2} \in \langle \overline{T}_{1,2}, h_2 \rangle$ для всех $t \in K^*$, следовательно,

$$\overline{L}_{1,2} = d_2 \cdot (A_{l-2}(q) \times (q-1)/d_2) \cdot d_2 \times (q-1).$$

Используя соотношение $z(t) = \bar{h}_{p_1}(t^l) h_2(t)$ при $t^{l+1} = 1$, получаем, что

$$L_{1,2} = d_2 \cdot (A_{l-2}(q) \times (q-1)/d_2 d' \times (q-1)/e) \cdot d_2,$$

где $e = (d, d_2)$, $d' = d/e$.

Подстепень n_2 равна $|P_1 : M_2| = q(q^l - 1)/(q-1)$, $n = n_2 + 1$ и ранг представления равен 2.

Теорема 1. *Для простых неабелевых групп $A_l(q)$, $q = p^m$, $l \geq 2$ или $q \geq 13$, $(l,q) \neq (3,2)$, параметры n, M, n_2, M_2 минимального подстановочного представления содержатся в следующем списке:*

если $l = 2$, то

$$n = q+1, \quad M = p^{2m} : \frac{q-1}{d}; \quad n_2 = q, \quad M_2 = \frac{q-1}{d};$$

если $l \geq 3$, то

$$n = \frac{q^{l+1}-1}{q-1}, \quad M = p^{ml} : \left(d_1 \cdot \left(A_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{d_1 d} \right) \cdot d_1 \right),$$

$$n_2 = \frac{q^{l+1}-q}{q-1}, \quad M_2 = p^{2m(l-1)} : \left(d_2 \cdot \left(\overline{A}_{l-2}(q) \times \frac{q-1}{d_2 d'} \times \frac{q-1}{e} \right) \cdot d_2 \right),$$

где $d = (q-1, l+1)$, $d_1 = (q-1, l)$, $d_2 = (q-1, l-1)$, $e = (d, d_2)$, $d' = d/e$.

Ранг представления во всех случаях равен 2.

4. Группа $B_l(q)$

А. Алгебра B_l. Система простых корней: $\Pi = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$. Система положительных корней:

$$\Phi^+ = \{p_i + p_{i+1} + \dots + p_j,\ 1 \leq i \leq j \leq l,\ p_i + \dots + 2(p_j + \dots + p_l),\ 1 \leq i < j \leq l\}.$$

Диаграмма Дынкина имеет вид

B. Группа $B_l(q)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Мы не рассматриваем группы $B_1(q) \simeq A_1(q)$. Обозначим группу $B_l(q)$ через G. По лемме 4

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2l}-1),$$

где $d = (2, q-1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = |\Phi^+| = l^2$. Группа $Z(\overline{G})$ равна

$$\{z(t) = \bar{h}_{p_1}(t)\bar{h}_{p_3}(t)\dots\bar{h}_{p_l}(t^l) \mid t^2 = 1\}.$$

Как следует из [4], при $q \geq 4$ подгруппами наименьшего индекса в группе G являются параболические подгруппы. Лемма 5 позволяет заключить, что при $l = 2$ наибольший порядок имеют параболические подгруппы P_1 и P_2, а при $l \geq 3$ — параболическая подгруппа P_1. В любом случае

$$|P_1| = \frac{1}{d} q^N (q-1)(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2l-2}-1)$$

и при $q \geq 4$ степень минимального представления или представлений равна $n = |G : P_1| = (q^{2l}-1)/(q-1)$.

Для изложения удобнее рассмотреть подгруппу P_2 при $l = 2$ отдельно. Пока речь пойдет о подгруппе P_1.

По лемме 3 имеем $P_1 = U_1 : L_1$, где

$$U_1 = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1\rangle, \quad L_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1\rangle.$$

По предложению 1 $U_1 = p^{m(2l-1)}$ и $\overline{L}_1 \simeq \overline{B}_{l-1}(q)\cdot(q-1)$. Для факторизации по центру группы G нам потребуется группа $\overline{T}_1$, определенная в доказательстве предложения. Группа $Z(\overline{T}_1)$ совпадает с

$$\{z_1(t) = \bar{h}_{p_2}(t)\bar{h}_{p_4}(t)\dots\bar{h}_{p_l}(t^{l-1}) \mid t^2 = 1\},$$

и ее порядок равен d.

Элемент $h_1(t) = \bar{h}_{p_1}(t)\bar{h}_{p_2}(t)\dots\bar{h}_{p_l}(t)$ централизует $\overline{T}_1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того, $z(t)z_1(t) = h_1(t)$ при $t^2 = 1$, и $\langle h_1\rangle \cap \overline{T}_1 = 1$. Таким образом,

$$\overline{L}_1 = (d\cdot B_{l-1}(q)) \times (q-1), \quad L_1 = d\cdot(B_{l-1}(q) \times (q-1)/d).$$

C. Двойные стабилизаторы. Напомним, что двойные стабилизаторы имеют вид $P_1 \cap w^{-1}P_1 w$, $w \in W$.

Пусть $w = w_{p_1}$. По предложению 2 группа M_2 равна $P_1 \cap wP_1w = Y_{1,2} : L_{1,2}$, где

$$Y_{1,2} = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})\rangle, \quad L_{1,2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{1,2}\rangle.$$

Обозначим элементы из $\Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})$ следующим образом:

$$p_1 + \dots + p_j = r_j,\ 2 \leq j \leq l, \quad p_1 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_l) = s_j,\ 1 \leq j \leq l-1,$$

$$p_2 + \dots + p_j = r'_j,\ 2 \leq j \leq l, \quad p_2 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_l) = s'_j,\ 2 \leq j \leq l-1.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов получаем все нетривиальные коммутаторы:

$$[x_{r_j}(u), x_{s'_j}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad 2 \leq j \leq l-1,$$

$$[x_{r'_j}(u), x_{s_j}(t)] = x_{s_1}(\pm tu),\ 2 \leq j \leq l-1, \quad [x_{r_l}(u), x_{r'_l}(t)] = x_{s_1}(\pm 2tu).$$

Значит, в группе $Y_{1,2}$ центр совпадает с коммутантом, и $Y_{1,2} = p^m \cdot p^{m(4l-6)}$.

По предложению 2 $L_{1,2} = (q-1)^2/d$, если $l = 2$, и $\overline{L}_{1,2} \simeq \overline{B}_{l-2}(q) \cdot (q-1)^2$, если $l > 2$. В последнем случае рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}$, определенную в предложении. Заметим, что группа $Z(\overline{T}_{1,2})$ равна

$$\{z_2(t) = \bar{h}_{p_3}(t) \dots \bar{h}_{p_l}(t^l) \mid t^2 = 1\},$$

и ее порядок равен d.

Элементы $h_1(t)$ и $\bar{h}_{p_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}$ для всех $t \in K^*$. К тому же

$$\langle \bar{h}_{p_1} \rangle \cap \langle \overline{T}_{1,2}, h_1 \rangle = 1, \quad \langle h_1 \rangle \cap \overline{T}_{1,2} = 1$$

и $\bar{h}_{p_1}(t) z_2(t) = z(t)$ при $t^2 = 1$. Таким образом,

$$\overline{L}_{1,2} = d \cdot B_{l-2}(q) \times (q-1) \times (q-1), \quad L_{1,2} = d \cdot (B_{l-2}(q) \times (q-1)/d) \times (q-1).$$

Подстепень n_2 равна $|P_1 : M_2| = q(q^{2l-2} - 1)/(q-1)$.

По предложению 3 существует элемент $w_0 \in W$ такой, что $M_3 = P_1 \cap P_1^{w_0} = L_1$. Подстепень n_3 равна $|P_1 : M_3| = |U_1| = q^{2l-1}$, $n = 1 + n_2 + n_3$, и ранг представления по P_1 равен 3.

D. Представление по подгруппе P_2 при $l = 2$. Группа P_2 равна $U_2 : L_2$, где

$$U_2 = \langle X_{p_2}, X_{p_2+p_1}, X_{2p_2+p_1} \rangle, \quad L_2 = \langle H, X_{p_1}, X_{-p_1} \rangle.$$

Единственный нетривиальный коммутатор в группе U_2 — это

$$[x_{p_2}(u), x_{p_1+p_2}(t)] = x_{p_1+2p_2}(\pm 2tu).$$

Таким образом, $U_2 = 2^{3m}$, если $p = 2$, и $U_2 = p^m \cdot p^2 m$, если p нечетное.

Рассмотрим группу $\overline{L}_2' = \langle \overline{X}_{p_1}, \overline{X}_{-p_1} \rangle \simeq \overline{A}_1(q)$. Элемент $h_0(t) = \bar{h}_{p_1}(t)\bar{h}_{p_2}(t^2)$ централизует $\overline{L}_2'$ для всех $t \in K^*$, кроме того, $\overline{L}_2' \cap \langle h_0 \rangle = Z(\overline{G}) = Z(\overline{L}_2')$. Поэтому

$$L_2 = (A_1(q) \times (q-1)/d) \cdot d.$$

Положим $w = w_{p_2}$ и рассмотрим группу $M_2 = P_2 \cap P_2^w$. Так как $w(p_1) = p_1 + 2p_2$, $w(p_2) = -p_2$, то $M_2 = \langle H, X_{p_1}, X_{p_1+p_2}, X_{p_1+2p_2} \rangle$. Подгруппы X_{p_1}, $X_{p_1+p_2}$, $X_{p_1+2p_2}$ коммутируют между собой, поэтому

$$M_2 = p^{3m} : (q-1)^2/d, \quad n_2 = |P_2 : M_2| = q(q+1).$$

Положим $w_0 = w_{p_1+2p_2}$ и рассмотрим группу $M_3 = P_2 \cap P_2^{w_0}$. Так как $w_0(p_1) = p_1$, $w_0(p_2) = -p_1 - p_2$, то $M_3 = \langle H, X_{p_1}, X_{-p_1} \rangle = L_2$ и $n_3 = |P_2 : L_2| = |U_2| = q^3$, $n = 1 + n_2 + n_3$ и ранг представления по подгруппе P_2 также равен 3.

Теорема 2. *Для простых неабелевых групп $B_l(q)$, $q = p^m \geq 4$, параметры n, M, n_2, M_2, n_3, M_3 минимальных подстановочных представлений содержатся в следующем списке:*

если $l = 2$, то

$$n = \frac{q^4 - 1}{q - 1}, \quad M = p^{3m} : \left(d \cdot \left(A_1(q) \times \frac{q-1}{d} \right) \right),$$

$$n_2 = q^2 + q, \quad M_2 = (p^m \cdot p^{2m}) : \left(\frac{q-1}{d} \times (q-1) \right),$$

$$n_3 = q^3, \quad M_3 = d \cdot \left(A_1(q) \times \frac{q-1}{d} \right),$$

или

$$n = \frac{q^4-1}{q-1}, \quad M = p^{3m} : (A_1(q) \times (q-1)) \text{ при } p = 2,$$

$$M = (p^m \cdot p^{2m}) : \left(A_1(q) \times \frac{q-1}{d} \right) \cdot d \text{ при } p \neq 2,$$

$$n_2 = q^2 + q,\ M_2 = p^{3m} : \left(\frac{q-1}{d} \times (q-1) \right),\ n_3 = q^3, \quad M_3 = \left(A_1(q) \times \frac{q-1}{d} \right) \cdot d;$$

если $l \geq 3$, *то*

$$n = \frac{q^{2l}-1}{q-1}, \quad M = p^{m(2l-1)} : \left(d \cdot (B_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{d}) \right),$$

$$n_2 = \frac{q^{2l-1}-q}{q-1}, \quad M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-6)}) : d \cdot \left(B_{l-2}(q) \times \frac{q-1}{d} \times (q-1) \right),$$

$$n_3 = q^{2l-1}, \quad M_3 = d \cdot \left(B_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{d} \right),$$

где $d = (q-1, 2)$.

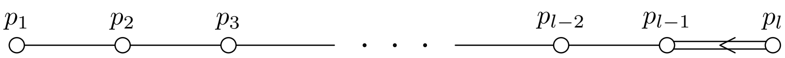
Во всех случаях ранг представления равен 3.

5. Группа $C_l(q)$

А. Алгебра C_l. Система простых корней: $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_l\}$. Система положительных корней:

$$\Phi^+ = \{p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j, 1 \leq i \leq j \leq l, p_i + \cdots + 2(p_j + \cdots + p_{l-1}) + p_l,$$
$$1 \leq i < j \leq l-1,\ 2(p_i + \cdots + p_{l-1}) + p_l, 1 \leq i \leq l-1\}.$$

Диаграмма Дынкина имеет вид



В. Группа $C_l(q)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Группы $C_1(q)$ и $C_2(q)$ изоморфны группам $A_1(q)$ и $B_2(q)$ при любом порядке поля, поэтому можно считать, что $l \geq 3$. Обозначим группу $C_l(q)$ через G. По лемме 4

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^4-1)\ldots(q^{2l}-1),$$

где $d = (2, q-1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = |\Phi^+| = l^2$. Группа $Z(\overline{G})$ равна $\{z(t) = \bar{h}_{p_l}(t) \mid t^2 = 1\}$. Как следует из [3], при $q \geq 3$ и $l \geq 3$ подгруппами наименьшего индекса в G являются параболические подгруппы. Лемма 5 позволяет заключить, что наибольший порядок имеет параболическая подгруппа P_1 и

$$|P_1| = \frac{1}{d} q^N (q-1)(q^2-1)(q^4-1)\ldots(q^{2l-2}-1).$$

Таким образом, степень минимального представления при указанных ограничениях равна $n = |G : P_1| = (q^{2l}-1)/(q-1)$.

По лемме 3 группа P_1 равна $U_1 : L_1$, где

$$U_1 = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1 \rangle, \quad L_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1 \rangle.$$

Обозначим элементы из $\Phi \setminus \Phi_1$ следующим образом:

$$p_1 + \dots + p_j = r_j, \quad 1 \leq j \leq l,$$

$$p_1 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_{l-1}) + p_l = s_j, \quad 1 \leq j \leq l-2,$$

$$2(p_1 + \dots + p_{l-1}) + p_l = r.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов получаем все нетривиальные коммутаторы:

$$[x_{r_j}(u), x_{s_j}(t)] = x_r(\pm 2tu), \ 1 \leq j \leq l-2, \quad [x_{r_l}(u), x_{r_l}(t)] = x_r(\pm 2tu).$$

Таким образом, $U_1 = 2^{m(2l-1)}$, если $p = 2$, и $U_1 = p^m \cdot p^{m(2l-1)}$, если $p \neq 2$.

По предложению 1 $\overline{L}_1 \simeq \overline{C}_{l-1}(q) \cdot (q-1)$. Для факторизации по центру группы G нам потребуется группа $\overline{T}_1$, определенная в доказательстве предложения.

Элемент $h_1(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2)\bar{h}_{p_2}(t^2) \dots \bar{h}_{p_l}(t)$ централизует $\overline{T}_1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того, $\langle h_1 \rangle \cap \overline{T}_1 = Z(\overline{T}_1) = Z(\overline{G})$ и $\bar{h}_{p_1}(t)^d \in \langle h_1, \overline{T}_1 \rangle$ для всех $t \in K^*$. Таким образом,

$$\overline{L}_1 = d \cdot (C_{l-1}(q) \times (q-1)/d) \cdot d, \quad L_1 = (C_{l-1}(q) \times (q-1)/d) \cdot d.$$

C. Двойные стабилизаторы. Напомним, что двойные стабилизаторы имеют вид $P_1 \cap w^{-1} P_1 w$, $w \in W$.

Пусть $w = w_{p_1}$. По предложению 2 группа M_2 равна

$$P_1 \cap w P_1 w = Y_{1,2} : L_{1,2},$$

где

$$Y_{1,2} = \langle X_r \mid \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\}) \rangle, \quad L_{1,2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{1,2} \rangle.$$

Обозначим необозначенные ранее элементы из $\Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})$ следующим образом:

$$p_2 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_l) = s'_j, \quad 2 \leq j \leq l-2,$$

$$p_2 + \dots + p_j = r'_j, \ 2 \leq j \leq l, \quad 2(p_2 + \dots + p_{l-1}) + p_l = r'.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов получаем все нетривиальные коммутаторы:

$$[x_{r_j}(u), x_{s_j}(t)] = x_r(\pm 2tu), \quad 2 \leq j \leq l-2,$$

$$[x_{r_l}(u), x_{r_{l-1}}(t)] = x_s(\pm 2tu),$$

$$[x_{r_j}(u), x_{s'_j}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad 2 \leq j \leq l-2,$$

$$[x_{r'_j}(u), x_{s_j}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad 2 \leq j \leq l-2,$$

$$[x_{r'_j}(u), x_{s'_j}(t)] = x_{s'}(\pm 2tu), \quad 2 \leq j \leq l-2,$$

$$[x_{r'_l}(u), x_{r'_{l-1}}(t)] = x_{s'}(\pm 2tu).$$

Таким образом, $Y_{1,2} = 2^m \cdot 2^{m(4l-6)}$, если $p = 2$, и $Y_{1,2} = p^{3m} \cdot p^{m(4l-8)}$, если $p \neq 2$.

По предложению 2 группа $\overline{L}_{1,2}$ равна $\overline{C}_{l-2}(q)\cdot(q-1)^2$. Рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}$, определенную в предложении.

Элементы $h_2(t)=\bar{h}_{p_1}(t^{-2})h_1(t)$ и $\bar{h}_{p_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}$ для всех $t\in K^*$. Кроме того,

$$\langle\bar{h}_{p_1}\rangle\cap\langle\overline{T}_{1,2},h_2\rangle=1,\quad \langle h_2\rangle\cap\overline{T}_{1,2}=Z(\overline{T}_{1,2})=Z(\overline{G}),\quad \bar{h}_{p_2}(t)^2\in\langle h_2,\overline{T}_{1,2}\rangle$$

для всех $t\in K^*$. Таким образом,

$$\overline{L}_{1,2}=d\cdot(C_{l-2}(q)\times(q-1)/d)\cdot d\times(q-1),\quad L_{1,2}=(C_{l-2}(q)\times(q-1)/d)\cdot d\times(q-1).$$

Подстепень n_2 равна $|P_1:M_2|=q(q^{2l-2}-1)/(q-1)$.

По предложению 3 существует элемент $w_0\in W$ такой, что $M_3=P_1\cap P_1^{w_0}=L_1$. Подстепень n_3 равна $|P_1:M_3|=|U_1|=q^{2l-1}$, $n=1+n_2+n_3$, и ранг представления равен 3.

Теорема 3. *Для простых неабелевых групп $C_l(q)$, $l\geq 3$, $q=p^m\geq 3$, параметры n, M, n_2, M_2, n_3, M_3 минимального подстановочного представления содержатся в следующем списке:*

если $p=2$, то

$$n=\frac{q^{2l}-1}{q-1},\quad M=q^{m(2l-1)}:(C_{l-1}(q)\times(q-1)),$$

$$n_2=\frac{q^{2l-1}-q}{q-1},\quad M_2=(q^m\cdot q^{m(4l-6)}):(C_{l-1}(q)\times(q-1)\times(q-1)),$$

$$n_3=q^{2l-1},\quad M_3=C_{l-1}(q)\times(q-1);$$

если $p\neq 2$, то

$$n=\frac{q^{2l}-1}{q-1},\quad M=(p^m\cdot p^{m(2l-2)}):\left(C_{l-1}(q)\times\frac{q-1}{2}\right)\cdot 2,$$

$$n_2=\frac{q^{2l-1}-q}{q-1},\quad M_2=(p^{3m}\cdot p^{m(4l-6)}):\left(\left(C_{l-1}(q)\times\frac{q-1}{2}\right)\cdot 2\times(q-1)\right),$$

$$n_3=q^{2l-1},\quad M_3=\left(C_{l-1}(q)\times\frac{q-1}{2}\right)\cdot 2.$$

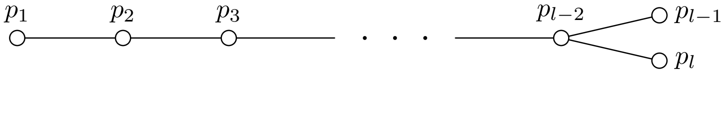
Во всех случаях ранг представления равен 3.

6. Группа $D_l(q)$

А. Алгебра D_l. Система простых корней: $\Pi=\{p_1,p_2,\ldots,p_l\}$. Система положительных корней:

$$\Phi^+=\{p_i+p_{i+1}+\cdots+p_j,\ 1\leq i\leq j\leq l,\ (i,j)\neq(l-1,l),\quad p_i+\cdots+p_{l-2}+p_l,$$
$$1\leq i\leq l-2,\quad p_i+\cdots+2(p_j+\cdots+p_{l-2})+p_{l-1}+p_l,\ 1\leq i<j\leq l-2\}.$$

Диаграмма Дынкина имеет вид



B. Группа $D_l(q)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Можно считать, что $l \geq 4$. Обозначим группу $D_l(q)$ через G. По лемме 4

$$|G| = \frac{1}{d}q^N(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2l-2}-1)(q^l-1),$$

где $d = (4, q^l - 1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = |\Phi^+| = l(l-1)$. Строение группы $Z(\overline{G})$ зависит от ранга l и порядка поля q. Для четного l положим

$$z(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2)\bar{h}_{p_3}(t^2)\dots\bar{h}_{p_{l-2}}(t^2)\bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t^3),$$

для нечетного l пусть

$$z'(t) = \bar{h}_{p_1}(t)\bar{h}_{p_3}(t)\dots\bar{h}_{p_{l-1}}(t), \quad z''(t) = \bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t).$$

Если l четное, то

$$Z(\overline{G}) = \{z'(t) \mid t^2 = 1\} \times \{z''(t) \mid t^2 = 1\}.$$

При нечетном l

$$Z(\overline{G}) = \{z(t) \mid t^4 = 1\}.$$

Как следует из [4], при $q \geq 4$ подгруппами наименьшего индекса в G являются параболические подгруппы. Лемма 5 позволяет заключить, что при $l = 4$ наибольший порядок имеют параболические подгруппы P_1, P_3 и P_4. Они сопряженны в группе $\operatorname{Aut} G$, и представления по ним подобны. В частности, из этого следует, что два минимальных представления, указанные в [4] для ортогональной группы $O_8^+(q) \simeq D_4(q)$, $q \geq 4$, подобны. При $l \geq 5$ наибольший порядок имеет параболическая подгруппа P_1. В любом случае мы будем рассматривать группу P_1, порядок которой равен

$$|P_1| = \frac{1}{d}q^N(q-1)(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2l-4}-1)(q^{l-1}-1).$$

Таким образом, при $q \geq 4$ степень минимального подстановочного представления равна

$$n = |G : P_1| = (q^{l-1}+1)(q^l-1)/(q-1).$$

По лемме 3 группа P_1 равна $U_1 : L_1$, где

$$U_1 = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_1 \rangle, \quad L_1 = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_1 \rangle.$$

По предложению 1

$$U_1 = p^{2m(l-1)}, \quad \overline{L}_1 \simeq \overline{D}_{l-1}(q) \cdot (q-1).$$

Для факторизации по центру группы G нам потребуется группа $\overline{T}_1$, определенная в доказательстве предложения. Элемент

$$h_0(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2)\bar{h}_{p_2}(t^2)\dots\bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t)$$

централизует $\overline{T}_1$ для всех $t \in K^*$.

Если q четно, то

$$Z(\overline{G}) = Z(\overline{T}_1) = 1, \quad \langle h_0 \rangle \cap \overline{T}_1 = 1, \quad L_1 = D_{l-1}(q) \times (q-1).$$

Далее q нечетно.

Пусть l четно. Напомним, что

$$Z(\overline{G}) = \{z'(t) \mid t^2 = 1\} \times \{z''(t) \mid t^2 = 1\}.$$

Если $q \equiv 1(4)$, то

$$Z(\overline{T}_1) = \{z_1(t) = \bar{h}_{p_2}(t^2)\bar{h}_{p_4}(t^2)\dots\bar{h}_{p_{l-2}}(t^2)\bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t^3) \mid t^4 = 1\}.$$

Так как $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1 = \{z''(t) \mid t^2 = 1\}$, а при $t^4 = 1$ выполнено равенство $z_1(t)z'(t^2) = h_0(t)z''(t^2)$, получаем, что

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot ((2 \cdot D_{l-1}(q)) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1 = 2 \cdot (D_{l-1}(q) \times (q-1)/4) \cdot 2.$$

Если $q \equiv 3(4)$, то $Z(\overline{T}_1) = \{z'(t) \mid t^2 = 1\}$. Элемент $\bar{h}_{p_1}(s)$ принадлежит $\langle \overline{T}_1, h_0, z''(t) \mid t^2 = 1\rangle$ для любого $s \in K^*$, и $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1 = Z(\overline{T}_1)$. Значит,

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot (D_{l-1}(q) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1 = (D_{l-1}(q) \times (q-1)/2).$$

Пусть теперь l нечетно. Напомним, что $Z(\overline{G}) = \{z(t) \mid t^4 = 1\}$.

Если $q \equiv 1(4)$, то

$$Z(\overline{T}_1 = \{z''(t) \mid t^2 = 1\} \times \{z_1'(t) \mid t^2 = 1\},$$

где $z_1'(t) = \bar{h}_{p_2}(t) \times \bar{h}_{p_4}(t)\dots\bar{h}_{p_{l-1}}(t)$. При $t^4 = 1$ выполнено соотношение $z(t)z_1'(t^2) = h_0(t)z''(t^2)$, и $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1 = \{z''(t) \mid t^2 = 1\}$. Получаем, что

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot ((2 \cdot D_{l-1}(q)) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1 = 2 \cdot (D_{l-1}(q) \times (q-1)/4) \cdot 2.$$

Если $q \equiv 3(4)$, то

$$Z(\overline{T}_1) = Z(\overline{G}) \times \{z_1'(t) \mid t^2 = 1\}, \quad \langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1 = Z(\overline{G})$$

и, следовательно,

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot ((2 \cdot D_{l-1}(q)) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1 = ((2 \cdot D_{l-1}(q)) \times (q-1)/4) \cdot 2.$$

C. Двойные стабилизаторы. Напомним, что двойные стабилизаторы имеют вид $P_1 \cap w^{-1}P_1w$, $w \in W$.

Пусть $w = w_{p_1}$. По предложению 2 группа M_2 равна $P_1 \cap wP_1w = Y_{1,2} : L_{1,2}$, где

$$Y_{1,2} = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})\rangle, \quad L_{1,2} = \langle H, X_r \mid r \in \Phi_{1,2}\rangle.$$

Обозначим элементы из $\Phi^+ \setminus (\Phi_{1,2} \cup \{p_1\})$ следующим образом:

$$p_1 + \dots + p_j = r_j, \quad 2 \le j \le l,$$
$$p_1 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_{l-2}) + p_{l-1} + p_l = s_j, \quad 1 \le j \le l-3,$$
$$p_2 + \dots + p_j = r_j', \quad 2 \le j \le l,$$
$$p_2 + \dots + 2(p_{j+1} + \dots + p_{l-2}) + p_{l-1} + p_l = s_j', \quad 2 \le j \le l-3,$$
$$p_1 + \dots + p_{l-2} + p_l = r, \quad p_2 + \dots + p_{l-2} + p_l = r'.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов получаем нетривиальные коммутаторы:

$$[x_{r_j}(u), x_{s_j'}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad 2 \le j \le l-3,$$
$$[x_{r_j'}(u), x_{s_j}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad 2 \le j \le l-3,$$

$$[x_{r_l}(u), x_{r'_{l-2}}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad [x_{r'_l}(u), x_{r_{l-2}}(t)] = x_{s_1}(\pm tu),$$

$$[x_r(u), x_{r'_{l-1}}(t)] = x_{s_1}(\pm tu), \quad [x'_r(u), x_{r_{l-1}}(t)] = x_{s_1}(\pm tu).$$

Таким образом, $Y_{1,2} = p^m \cdot p^{m(4l-8)}$.

По предложению 2 $\overline{L}_{1,2} \simeq \overline{D}_{l-2}(q) \cdot (q-1)^2$. Рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}$, определенную в предложении. Элементы $h_0(t)$ и $\bar{h}_{p_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}$ для всех $t \in K^*$.

Если q четно, то

$$Z(\overline{G}) = Z(\overline{T}_{1,2}) = 1, \quad \langle \bar{h}_{p_1}, h_0 \rangle \cap \overline{T}_{1,2} = 1, \quad \langle \bar{h}_{p_1} \rangle \cap \langle h_0 \rangle = 1$$

и

$$L_{1,2} = D_{l-2}(q) \times (q-1) \times (q-1).$$

Далее q нечетно.

Пусть l четно, напомним, что

$$Z(\overline{G}) = \{z'(t) \mid t^2 = 1\} \times \{z''(t) \mid t^2 = 1\},$$

а

$$Z(\overline{T}_{1,2}) = \{z'_2(t) \mid t^2 = 1\} \times \langle z''(t) \mid t^2 = 1\},$$

где $z'_2(t) = \bar{h}_{p_1}(t) z'(t)$. Так как $\langle h_0 \rangle \cap \overline{T}_1 = \{z''(t) \mid t^2 = 1\}$, получаем, что

$$\overline{L}_{1,2} = 2 \cdot ((2 \cdot D_{l-2}(q)) \times (q-1)/2 \times (q-1)) \cdot 2,$$

$$L_{1,2} = (2 \cdot (D_{l-2}(q) \times (q-1)/2) \times (q-1)/2) \cdot 2.$$

Пусть теперь l нечетно. Напомним, что $Z(\overline{G}) = \{z(t) \mid t^4 = 1\}$.

Если $q \equiv 1(4)$, то $Z(\overline{T}_{1,2}) = \{z_2(t) \mid t^4 = 1\}$, где $z_2(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2) z(t)$. Поскольку $\langle h_0 \rangle \cap \overline{T}_1 = \{z(t) \mid t^2 = 1\}$, имеем

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot ((2 \cdot D_{l-2}(q)) \times (q-1)/2 \times (q-1)) \cdot 2,$$

$$L_1 = (2 \cdot (D_{l-2}(q) \times (q-1)/2) \times (q-1)/2) \cdot 2.$$

Если $q \equiv 3(4)$, то $Z(\overline{G}) = Z(\overline{T}_{1,2}) = \langle h_0 \rangle \cap \overline{T}_1$. Получаем, что

$$\overline{L}_1 = 2 \cdot (D_{l-2}(q) \times (q-1)/2) \cdot 2 \times (q-1),$$

$$L_1 = (D_{l-2}(q) \times (q-1)/2) \cdot 2 \times (q-1).$$

Подстепень n_2 равна $|P_1 : M_2| = q(q^{l-2}+1)(q^{l-1}-1)/(q-1)$.

По предложению 3 существует элемент $w_0 \in W$ такой, что $M_3 = P_1 \cap P_1^{w_0} = L_1$. Подстепень n_3 равна $|P_1 : M_3| = |U_1| = q^{2l-2}$, $n = 1 + n_2 + n_3$, и ранг представления равен 3.

Теорема 4. *Для простых неабелевых групп $G = D_l(q)$, $l \geq 4$, $q = p^m \geq 4$, параметры n, M, n_2, M_2, n_3, M_3 минимального подстановочного представления содержатся в следующем списке:*

$$n = (q^{l-1}+1) \cdot \frac{q^l - 1}{q-1}, \quad n_2 = (q^{l-1}+q) \cdot \frac{q^{l-1}-1}{q-1}, \quad n_3 = q^{2l-2},$$

при этом если $p = 2$ или $q \equiv 1(4)$, то

$$M = p^{m(2l-2)} : \left(d_1 \cdot \left(D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1\right),$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-8)}) : \left(\left(d_1 \cdot \left(D_{l-2}(q) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1\right),$$

$$M_3 = d_1 \cdot \left(D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1,$$

где $d_1 = (q-1, 2)$;

если l *четно*, $q \equiv 3(4)$, *то*

$$M = p^{m(2l-2)} : \left(D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{2}\right),$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-8)}) : \left(\left(2 \cdot \left(D_{l-2}(q) \times \frac{q-1}{2}\right) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2\right),$$

$$M_3 = D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{2};$$

если l *нечетно*, $q \equiv 3(4)$, *то*

$$M = p^{m(2l-2)} : \left(2 \cdot D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2,$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-8)}) : \left(\left(D_{l-2}(q) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2 \times (q-1)\right),$$

$$M_3 = \left(2 \cdot D_{l-1}(q) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2.$$

Во всех случаях ранг представления равен 3.

7. Параболическая подгруппа P_1^1

Пусть $G = {}^2\mathscr{L}(q)$, где алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_l или D_l.

Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип D_l, то $\overline{\Pi}$ имеет тип B_{l-1} (см. [8, гл. 13, § 3, п. 2]). Введем соответствующие обозначения для классов из $\overline{\Phi}$:

$$\bar{p}_i = \{p_i\},\ 1 \le i \le l-2, \quad \bar{p}_{l-1} = \{p_{l-1}, p_l\},$$

$$\bar{p}_i + \cdots + \bar{p}_j = \{p_i + \cdots + p_j\}, \quad 1 \le i \le j \le l-2,$$

$$\bar{p}_i + \cdots + 2(\bar{p}_j + \cdots + \bar{p}_{l-1}) \\ = \{p_i + \cdots + 2(p_j + \cdots + p_{l-2}) + p_{l-1} + p_l\}, \quad 1 \le i < j \le l-1,$$

$$\bar{p}_i + \cdots + \bar{p}_{l-1} = \{p_i + \cdots + p_{l-1}, p_i + \cdots + p_{l-2} + p_l\}, \quad 1 \le i \le l-2.$$

Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_{2k}, то $\overline{\Pi}$ имеет тип B_k (см. [8, гл. 13, § 3, п. 1]). Введем соответствующие обозначения для классов из $\overline{\Phi}$:

$$\bar{p}_i = \{p_i, p_{l-i-1}\}, \quad 1 \le i < k,$$

$$\bar{p}_i + \cdots + \bar{p}_j = \{p_i + \cdots + p_j, p_{l-j+1} + \cdots + p_{l-i+1}\},\ 1 \le i \le j < k,$$

$$\bar{p}_i + \cdots + 2(\bar{p}_j + \cdots + \bar{p}_k) = \{p_i + \cdots + p_{l-j+1}, p_j + \cdots + p_{l-i+1}\}, \quad 1 \le i < j \le k,$$

$$\bar{p}_i + \cdots + \bar{p}_k = \{p_i + \cdots + p_k, p_{l-i+1} + \cdots + p_{k+1}, p_i + \cdots + p_{l-i+1}\}, \quad 1 \le i \le k.$$

Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_{2k-1}, то $\overline{\Pi}$ имеет тип C_k (см. [8, гл. 13, § 3, п. 1]). Введем соответствующие обозначения для классов из $\overline{\Phi}$:

$$\bar{p}_i = \{p_i, p_{l-i-1}\},\ 1 \le i < k, \quad \bar{p}_k = \{p_k\},$$

$$\bar p_i+\dots+\bar p_j=\{p_i+\dots+p_j,\ p_{l-j+1}+\dots+p_{l-i+1}\},\quad 1\le i\le j\le k,\ (i,j)\ne(k,k),$$

$$\bar p_i+\dots+2(\bar p_j+\dots+\bar p_{k-1})+\bar p_k \\ =\{p_i+\dots+p_{l-j+1},\ p_j+\dots+p_{l-i+1}\},\quad 1\le i<j\le k-1,$$

$$2(\bar p_i+\dots+\bar p_{k-1})+\bar p_k=\{p_i+\dots+p_{l-i+1}\},\quad 1\le i\le k-1.$$

Пусть P_1^1 — параболическая подгруппа группы G, соответствующая системе классов эквивалентности $\overline{\Pi}\setminus\{\bar p_1\}$. Группа P_1^1 равна $U_1^1:L_1^1$, где подгруппы U_1^1 и L_1^1 определены в лемме 6.

Предложение 4. *Если $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, $l\ge 2$, то $\overline{L}_1^1\simeq {}^2\overline{A}_{l-2}(q^2)\cdot(q^2-1)$. Если $\mathscr{L}$ имеет тип D_l, $l\ge 4$, то $\overline{L}_1^1\simeq {}^2\overline{D}_{l-1}(q^2)\cdot(q-1)$.*

Доказательство. Рассмотрим в группе L_1^1 подгруппу $\overline{T}_1^1=\langle\overline{X}_S\mid S\in\overline{\Phi}_1\rangle$ и подгруппу $\overline{H}_1$, равную $\{\bar h_{\bar p_1}(t)\mid t\in K^*\}$, если $\mathscr{L}=A_l$, и равную $\{\bar h_{\bar p_1}(t)\mid t\in K_0^*\}$, если $\mathscr{L}=D_l$. Далее рассуждение дословно повторяет доказательство п. 2 предложения 1.

Двойные стабилизаторы представления имеют вид $P_1^1\cap x^{-1}P_1^1x$, $x\in G$. В силу разложения $G=B^1N^1B^1$ и включения $B^1\le P_1^1$ достаточно рассматривать сопряжение элементами из группы N^1. Будем отождествлять элемент из группы N^1 с его образом под действием гомоморфизма φ в группе W^1. Обозначим отражение $w_{\bar p_1}$ через w_1^1 и рассмотрим группу $M_2^1=P_1^1\cap w_1^1P_1^1w_1^1$.

Предложение 5. *Если ранг алгебры $\mathscr{L}$ больше 4, то группа M_2^1 равна $Y_{1,2}^1:L_{1,2}^1$, где*

$$Y_{1,2}^1=\big\langle X_S^1\mid S\in\overline{\Phi^+}\setminus(\overline{\Phi}_{1,2}\cup\{\bar p_1\})\big\rangle,\quad L_{1,2}^1=\big\langle H^1,X_S^1\mid S\in\overline{\Phi}_{1,2}\big\rangle.$$

Если алгебра $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, то $\overline{L}_{1,2}^1\simeq {}^2\overline{A}_{l-4}(q^2)\cdot(q^2-1)^2$, если тип D_l, то $\overline{L}_{1,2}^1\simeq {}^2\overline{D}_{l-2}(q^2)\cdot(q-1)^2$.

Доказательство. Заметим, что элемент w_1^1 переводит классы $\bar p_1$ и $\bar p_2$ в классы $-\bar p_1$ и $\bar p_1+\bar p_2$, а остальные классы из $\overline{\Pi}$ оставляет на месте. Это очевидно, если $\mathscr{L}$ имеет тип D_l, и, следовательно, $\bar p_1=\{p_1\}$, $\bar p_2=\{p_2\}$ и $w_1^1=w_{p_1}$.

Если же $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, то $\bar p_1=\{p_1,p_l\}$, $\bar p_2=\{p_2,p_{l-1}\}$ и $w_1^1=w_{p_1}w_{p_l}$. Отражение w_{p_l} переводит p_l и p_{l-1} в $-p_l$ и $p_{l-1}+p_l$, оставляя все остальные простые корни на месте. Таким образом, $w_1^1(\bar p_1)=\{-p_1,-p_l\}$, $w_1^1(\bar p_2)=\{p_1+p_2,p_{l-1}+p_l\}$, все остальные классы из $\overline{\Pi}$ остаются на месте, что и требовалось.

Доказательство равенства

$$w_1^1(\overline{\Phi^+}\cup\overline{\Phi}_1)\cap(\overline{\Phi^+}\cup\overline{\Phi}_1)=\overline{\Phi}_{1,2}\cup\overline{\Phi^+}\setminus\{\bar p_1\}$$

и разложения $M_2^1=Y_{1,2}^1:L_{1,2}^1$ дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения из предложения 2.

Рассмотрим теперь в группе $\overline{L}_{1,2}^1$ подгруппу $\overline{T}_{1,2}^1=\langle\overline{X}_S\mid S\in\overline{\Phi}_{1,2}\rangle$ и подгруппу $\overline{H}_2^1$, равную $\langle\bar h_{p_1}(t),\bar h_{p_2}(t)\mid t\in K_0^*\rangle$, если $\mathscr{L}=D_l$, и $\langle\bar h_{\bar p_1}(t),\bar h_{\bar p_2}(t)\mid t\in K^*\rangle$, если $\mathscr{L}=A_l$. Дословное повторение последнего абзаца доказательства предложения 2 завершает доказательство данного предложения.

Предложение 6. *Существует такой элемент $w_0^1 \in W^1$, что $w_0^1(\overline{\Phi}_1) = \overline{\Phi}_1$, а $w_0^1(\overline{\Phi^+} \setminus \overline{\Phi}_1) = \overline{\Phi^-} \setminus \overline{\Phi}_1$, и, следовательно, $w_0^1 P_1^1 w_0^1 \cap P_1^1 = L_1^1$.*

Доказательство. Как отмечено выше, система $\overline{\Phi}$ в зависимости от алгебры $\mathscr{L}$ имеет тип B_k или C_k, где k зависит от l. Для доказательства предложения нам достаточно найти элемент группы W^1, действующий на системе $\overline{\Phi}$ так же, как элемент w_0 из предложения 3 действует на системе соответствующего типа.

Если $\mathscr{L}$ имеет тип D_l, то система $\overline{\Phi}$ имеет тип B_{l-1}. Элемент $w_1^1 = w_r w_s$, где $r = p_1 + \cdots + p_{l-2} + p_l$, $s = p_1 + \cdots + p_{l-2} + p_{l-1}$, принадлежит группе W^1 и действует на $\overline{\Phi}$ требуемым образом:

$$w_1^1(\bar{p}_1) = \{-p_1 - 2(p_2 + \cdots + p_{l-2}) - p_{l-1} - p_l\} = -\bar{p}_1 - 2(\bar{p}_2 + \cdots + \bar{p}_{l-1}).$$

Если $\mathscr{L}$ имеет тип A_l, то система $\overline{\Phi}$ имеет тип B_k, если $l = 2k$, и тип C_k, если $l = 2k-1$. Элемент $w_1^1 = w_r$, где $r = p_1 + p_2 + \cdots + p_l$, принадлежит группе W^1 и действует на системе Π следующим образом:

$$w_1^1(p_1) = -(p_2 + \cdots + p_l), \quad w_1^1(p_l) = -(p_1 + \cdots + p_{l-1}),$$
$$w_1^1(p_i) = p_i, \quad 2 \le i \le l-1.$$

Следовательно,

$$w_1^1(\bar{p}_1) = \{-(p_2 + \cdots + p_l), \quad -(p_1 + \cdots + p_{l-1})\}.$$

Последний класс соответствует корню $-p_1 - 2(p_2 + \cdots + p_k)$, если $l = 2k$, и корню $-p_1 - 2(p_2 + \cdots + p_{k-1}) - p_k$, если $l = 2k-1$.

Искомый элемент w_1^1 найден, и предложение доказано.

8. Группа $^2D_l(q^2)$

А. Группа $^2D_l(q^2)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Как и в случае группы $D_l(q)$, можно считать, что $l \ge 4$. Обозначим группу $^2D_l(q^2)$ через G. По лемме 7 порядок группы G равен

$$\frac{1}{d} q^N (q^2 - 1)(q^4 - 1) \ldots (q^{2l-2} - 1)(q^l + 1),$$

где $d = (4, q^l + 1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = l(l-1)$. Если l нечетно и $q \equiv 3(4)$, то группа $Z(\overline{G})$ равна $\{z(t) \mid t^4 = 1\}$, где $z(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2)\bar{h}_{p_3}(t^2) \ldots \bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t^3)$. В остальных случаях $Z(\overline{G}) = \{z'(t) \mid t^2 = 1\}$, где $z'(t) = \bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t)$.

Как следует из [4], подгруппами наименьшего индекса в G являются параболические подгруппы. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству предложения 1 из [5], можно посчитать порядки максимальных параболических подгрупп группы G:

$$|P_i^1| = \frac{1}{d} q^N (q-1)(q^{l-i} + 1) \prod_{k=1}^{i-1} (q^{k+1} - 1) \prod_{k=1}^{l-i-1} (q^{2k} - 1), \quad 1 \le i \le l-4,$$

$$|P_{l-3}^1| = \frac{1}{d} q^N (q-1) \prod_{k=1}^{l-4} (q^{k+1} - 1) \prod_{k=1}^{3} (q^{k+1} + (-1)^k),$$

$$|P_{l-2}^1| = \frac{1}{d} q^N (q-1)(q^4 - 1) \prod_{k=1}^{l-3} (q^{k+1} - 1),$$

$$\left|P_{l-1}^1\right| = \frac{1}{d} q^N (q-1) \prod_{k=1}^{l-2} (q^{k+1}-1).$$

Наибольший порядок равен

$$\left|P_1^1\right| = \frac{1}{d} q^N (q-1)(q^2-1)(q^4-1)\dots(q^{2l-4}-1)(q^{l-1}+1).$$

Получаем, что степень представления равна

$$n = |G : P_1^1| = (q^{l-1}-1)(q^l+1)/(q-1).$$

По лемме 6 группа P_1^1 равна $U_1^1 : L_1^1$, где

$$U_1^1 = \left\langle X_S^1 \mid S \in (\overline{\Phi})^0 \right\rangle, \quad L_1^1 = \left\langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_1 \right\rangle.$$

Группа U_1^1 является подгруппой абелевой группы U_1 (см. п. 6), и $U_1^1 = p^{m(2l-2)}$.

По предложению 4 имеем $\overline{L}_1^1 \simeq {}^2\overline{D}_{l-1}(q^2) \cdot (q-1)$. Рассмотрим подгруппу $\overline{T}_1^1$, определенную в доказательстве. Элемент

$$h_0(t) = \bar{h}_{p_1}(t^2)\bar{h}_{p_2}(t^2)\dots\bar{h}_{p_{l-1}}(t)\bar{h}_{p_l}(t)$$

централизует $\overline{T}_1^1$ для всех $t \in K_0^*$.

Если q четно или $q \equiv 1(4)$, то $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1^1 = Z(\overline{G}) = Z\big(\overline{T}_1^1\big) = d$, и получаем, что $L_1^1 = ({}^2D_{l-1}(q^2) \times (q-1)/d) \cdot d$.

Пусть теперь $q \equiv 3(4)$. Если l четно, то $\langle \bar{h}_0\rangle \cap \overline{T}_1^1 = Z(\overline{G}) > Z\big(\overline{T}_1^1\big)$. Значит,

$$\overline{L}_1^1 = 2 \cdot ((2 \cdot {}^2D_{l-1}(q^2)) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1^1 = ((2 \cdot {}^2D_{l-1}(q^2)) \times (q-1)/2) \cdot 2.$$

Если l нечетно, то $\langle \bar{h}_0\rangle \cap \overline{T}_1^1 = Z\big(\overline{T}_1^1\big) > Z(\overline{G})$, кроме того, $\bar{h}_{p_1}(t) \in \big\langle \overline{T}_1^1, Z(\overline{G}), h_0 \big\rangle$ для любого $t \in K_0^*$. Следовательно,

$$\overline{L}_1^1 = 2 \cdot (\,{}^2D_{l-1}(q^2) \times (q-1)/2) \cdot 2, \quad L_1^1 = {}^2D_{l-1}(q^2) \times (q-1)/2.$$

B. Двойные стабилизаторы. Напомним, что двойные стабилизаторы имеют вид $P_1^1 \cap w^{-1} P_1^1 w$, $w \in W^1$.

Пусть $w = w_{\bar{p}_1}$. По предложению 5 группа M_2 равна $P_1^1 \cap w P_1^1 w = Y_{1,2}^1 : L_{1,2}^1$, где

$$Y_{1,2}^1 = \left\langle X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi^+} \setminus (\overline{\Phi}_{1,2} \cup \{\bar{p}_1\}) \right\rangle, \quad L_{1,2}^1 = \left\langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_{1,2} \right\rangle.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов следует, что центр группы $Y_{1,2}^1$ совпадает с ее коммутантом и равен $X^1_{\bar{p}_1+2(\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_{l-1})}$. Таким образом, $Y_{1,2}^1 = p^m \cdot p^{m(4l-6)}$.

По предложению 5 $\overline{L}_{1,2}^1 \simeq {}^2\overline{D}_{l-2}(q^2) \cdot (q-1)^2$. Рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}^1$ из доказательства предложения. Элементы $h_0(t)$ и $\bar{h}_{\bar{p}_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}^1$ для всех $t \in K_0^*$.

Если l четно или $q \not\equiv 3(4)$, то $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_1^1 = Z(\overline{G}) = Z\big(\overline{T}_{1,2}^1\big)$, и, следовательно, $L_{1,2}^1 = ({}^2D_{l-2}(q^2) \times (q-1)/d) \cdot d \times (q-1)$.

Если l нечетно и $q \equiv 3(4)$, то

$$Z(\overline{G}) = \{z(t) \mid t^4 = 1\}, \quad Z\big(\overline{T}_{1,2}^1\big) = \{z_2(t) \mid t^4 = 1\},$$

где $z_2(t) = h_{\bar{p}_1}(t^2)z(t)$, $\langle h_0\rangle \cap \overline{T}_{1,2} = Z(\overline{G}) \cap Z\big(\overline{T}^1_{1,2}\big)$. Таким образом,

$$\overline{L}^1_{1,2} = 2 \cdot (2 \cdot {}^2D_{l-2}(q^2) \times (q-1)/2) \cdot 2 \times (q-1),$$

$$L^1_{1,2} = (2 \cdot ({}^2D_{l-2}(q^2) \times (q-1)/2) \times (q-1)/2) \cdot 2.$$

Подстепень n_2 равна $\big|P^1_1 : M_2\big| = q(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)/(q-1)$.

По предложению 6 существует элемент $w^1_0 \in W^1$ такой, что $M_3 = P^1_1 \cap w^1_0 P^1_1 w^1_0 = L^1_1$. Подстепень n_3 равна $|P^1_1 : M_3| = |U^1_1| = q^{2l-2}$, $n = 1 + n_2 + n_3$, и ранг представления равен 3.

Теорема 5. *Для простых неабелевых групп $D_l(q)$, $l \geq 5$, $q = p^m \geq 4$, параметры n, M, n_2, M_2, n_3, M_3 минимального подстановочного представления содержатся в следующем списке:*

$$n = (q^l+1)\frac{q^{l-1}-1}{q-1}, \quad n_2 = (q^l+q)\frac{q^{l-2}-1}{q-1}, \quad n_3 = q^{2(l-1)},$$

при этом если $p = 2$ или $q \equiv 1(4)$, то

$$M = p^{m(2l-2)} : \left({}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-6)}) : \left(\left({}^2D_{l-2}(q^2) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1 \times (q-1)\right),$$

$$M_3 = \left({}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{d_1}\right) \cdot d_1,$$

где $d_1 = (q+1, 2)$;

если l четно, $q \equiv 3(4)$, то

$$M = p^{m(2l-2)} : \left(2 \cdot {}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2,$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-6)}) : \left(\left({}^2D_{l-2}(q^2) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2 \times (q-1)\right),$$

$$M_3 = \left(2 \cdot {}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2;$$

если l нечетно, $q \equiv 3(4)$, то

$$M = p^{m(2l-2)} : \left({}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{2}\right),$$

$$M_2 = (p^m \cdot p^{m(4l-6)}) : \left(2 \cdot {}^2D_{l-2}(q^2) \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-1}{2}\right) \cdot 2,$$

$$M_3 = {}^2D_{l-1}(q^2) \times \frac{q-1}{2}.$$

Во всех случаях ранг представления равен 3.

9. Группа $^2A_{2k}(q^2)$

А. Группа $^2A_{2k}(q^2)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Группа $^2A_2(4)$ не проста, поэтому будем считать, что $q \geq 3$. Обозначим группу $^2A_{2k}(q^2)$ через G. По лемме 7

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^3+1)\dots(q^{l+1}+1),$$

где $d = (l+1, q+1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = l(l+1)/2$.

Группа $Z(\overline{G})$ равна

$$\{z(t) = \bar{h}_{\bar{p}_1}(t^l)\dots\bar{h}_{\bar{p}_k}(t^{k+1}) \mid t^{q+1} = t^{l+1} = 1\}.$$

Как следует из [3], при $(l,q) \neq (2,5)$ подгруппами наименьшего индекса в G являются параболические подгруппы. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству предложения 1 из [5], можно посчитать порядки максимальных параболических подгрупп группы G:

$$\left|P_i^1\right| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1) \prod_{k=1}^{i-1}(q^2k+1-1) \prod_{k=1}^{l-2i}(q^{k+1}+(-1)^k), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Наибольший порядок

$$\frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^2-1)(q^3+1)\dots(q^{l-1}+1)$$

имеет группа P_1^1. Получаем, что при $(l,q) \neq (2,5)$ степень минимального подстановочного представления n равна $\left|G : P_1^1\right| = (q^{l+1}+1)(q^l-1)/(q^2-1)$.

По лемме 6 группа P_1^1 равна $U_1^1 : L_1^1$, где

$$U_1^1 = \left\langle X_S^1 \mid S \in (\overline{\Phi})^0 \right\rangle, \quad L_1^1 = \left\langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_1 \right\rangle.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов следует, что центр группы U_1^1 совпадает с ее коммутантом и равен

$$\{x_{\bar{p}_1+\dots+\bar{p}_k}(0,u) \mid u \in K^*, u+\bar{u} = 0\}.$$

Таким образом, $U_1^1 = p^m \cdot p^{m(2l-2)}$.

Если $l = 2$, то $L_1^1 = H^1 = (q^2-1)/d$. Пусть $l \geq 4$. По предложению 4 имеем $\overline{L}_1^1 \simeq {}^2\overline{A}_{l-2}(q^2)\cdot(q^2-1)$. Рассмотрим группу $\overline{T}_1^1$, определенную в доказательстве предложения. Элемент

$$h_1(t) = \bar{h}_{\bar{p}_1}(t^{(q-1)(k-1)-1})\bar{h}_{\bar{p}_2}(t^{(q-1)(k-2)-1})\dots\bar{h}_{\bar{p}_{k-1}}(t^q)$$

централизует группу $\overline{T}_1^1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того,

$$\langle h_1\rangle \cap \overline{T}_1^1 = Z\big(\overline{T}_1^1\big), \quad Z(\overline{G}) \leq \langle h_1\rangle, \quad Z\big(\overline{T}_1^1\big) \cap Z(\overline{G}) = 1.$$

Таким образом,

$$L_1^1 = d_1 \cdot ({}^2A_{l-2}(q^2) \times (q^2-1)/dd_1) \cdot d_1,$$

где $d_1 = (l-1, q+1)$.

В. Двойные стабилизаторы. Двойные стабилизаторы имеют вид $P_1^1 \cap w^{-1}P_1^1 w$, $w \in W^1$.

Пусть $w = w_{\bar{p}_1}$. По предложению 5 группа M_2 равна $P_1^1 \cap w P_1^1 w = Y_{1,2}^1 : L_{1,2}^1$, где

$$Y_{1,2}^1 = \left\langle X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi^+} \setminus (\overline{\Phi}_{1,2} \cup \{\bar{p}_1\})\right\rangle, \quad L_{1,2}^1 = \left\langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_{1,2}\right\rangle.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов следует, что центр группы $Y_{1,2}^1$ при $l \le 4$ совпадает с ее коммутантом и равен

$$\langle x_{\bar{p}_1+2(\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_k)}(t),\ x_{\bar{p}_1+\dots+\bar{p}_k}(0,u),\ x_{\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_k}(0,u) \mid t \in K_0^*,\ u \in K^*,\ u+\bar{u}=0\rangle.$$

Таким образом, $Y_{1,2}^1 = p^{4m} \cdot p^{m(4l-12)}$.

Если $l = 4$, то $L_{1,2}^1 = H^1 = (q^2-1)/d$. Пусть $l \ge 6$. По предложению 5 имеем $\overline{L}_{1,2}^1 \simeq {}^2\overline{A}_{l-4}(q^2) \cdot (q^2-1)^2$. Рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}^1$, определенную в доказательстве предложения. Элементы $h_2(t) = h_1(t)\bar{h}_{\bar{p}_1}(t)$ и $\bar{h}_{\bar{p}_1}(t)$ централизуют $\overline{T}_{1,2}^1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того,

$$\langle h_2\rangle \cap \overline{T}_{1,2}^1 = Z\big(\overline{T}_{1,2}^1\big), \quad Z(\overline{G}) \le \langle h_1\rangle, \quad Z\big(\overline{T}_{1,2}^1\big) \cap Z(\overline{G}) = 1.$$

Получаем, что

$$\begin{aligned}\overline{L}_{1,2}^1 &= d_2 \cdot ({}^2A_{l-4}(q^2) \times (q^2-1)/d_2 \times (q^2-1)) \cdot d_2,\\ L_{1,2}^1 &= d_2 \cdot ({}^2A_{l-4}(q^2) \times (q^2-1)/dd_2 \times (q^2-1)) \cdot d_2,\end{aligned}$$

где $d_2 = (l-3, q+1)$.

Если $l = 2$, то подстепень n_2 равна $\left|P_1^1 : L_1^1\right| = \left|U_1^1\right| = q^3$, $n = 1 + n_2$ и ранг представления равен 2. Если $l \ge 4$, то

$$n_2 = \left|P_1^1 : M_2\right| = q^2(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)/(q^2-1), \quad n > 1 + n_2,$$

и мы продолжаем рассматривать группу P_1^1.

По предложению 6 существует элемент $w_0^1 \in W^1$ такой, что $M_3 = P_1^1 \cap w_0^1 P_1^1 w_0^1 = L_1^1$. Подстепень n_3 равна $|P_1^1 : M_3| = |U_1^1| = q^{2l-1}$, $n = 1 + n_2 + n_3$, и ранг представления при $l \ge 4$ равен 3.

10. Группа ${}^2A_{2k-1}(q^2)$

А. Группа ${}^2A_{2k-1}(q^2)$ и ее параболические подгруппы наименьшего индекса. Имеем ${}^2A_1(q^2) \simeq A_1(q)$, поэтому можно считать, что $l \ge 3$. Обозначим группу ${}^2A_{2k-1}(q^2)$ через G. По лемме 7

$$|G| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^3+1)\dots(q^{l+1}-1),$$

где $d = (l+1, q+1)$ — порядок центра универсальной группы $\overline{G}$, а $N = l(l+1)/2$. Группа $Z(\overline{G})$ равна

$$\{z(t) = \bar{h}_{\bar{p}_1}(t^l)\dots\bar{h}_{\bar{p}_k}(t^{k+1}) \mid t^{q+1} = t^{l+1} = 1\}.$$

Как следует из [4], при $q \ge 3$ и $l \ge 5$ подгруппой наименьшего индекса в G является параболическая подгруппа. Наибольший порядок, как и в случае группы ${}^2A_{2k}(q)$, имеет параболическая подгруппа P_1^1, и

$$\left|P_1^1\right| = \frac{1}{d} q^N (q^2-1)(q^2-1)(q^3+1)\dots(q^{l-1}+1).$$

Получаем, что степень минимального представления при указанных ограничениях равна $n = \left|G : P_1^1\right| = (q^{l+1}-1)(q^l+1)/(q^2-1)$.

По лемме 6 группа P_1^1 равна $U_1^1 : L_1^1$, где

$$U_1^1 = \langle X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi^+} \setminus \overline{\Phi}_1 \rangle, \quad L_1^1 = \langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_1 \rangle.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов следует, что в группе U_1^1 центр совпадает с коммутантом и равен

$$\{x_{2(\bar{p}_1+\dots+\bar{p}_{k-1})+\bar{p}_k}(t) \mid t \in K_0^*\}.$$

Таким образом, $U_1^1 = p^m \cdot p^{m(2l-2)}$.

По предложению 4 $\overline{L}_1^1 \simeq {}^2\overline{A}_{l-2}(q^2) \cdot (q^2-1)$. Рассмотрим группу $\overline{T}_1^1$, определенную в доказательстве предложения. Имеем

$$Z(\overline{T}_1^1) = \{\bar{h}_{\bar{p}_2}(t^{l-2}) \dots \bar{h}_{\bar{p}_k}(t^{k-1}),\ t^{q+1} = t^{l-1} = 1\},$$

и порядок этой группы равен $d_1 = (q+1, l-1)$. Элементы

$$h_1(t) = \bar{h}_{\bar{p}_1}(t^{q+1}) \dots \bar{h}_{\bar{p}_{k-1}}(t^{q+1}),$$

$$h_2(t) = \bar{h}_{\bar{p}_1}(t^{(q-1)(k-1)})\bar{h}_{\bar{p}_2}(t^{(q-1)(k-2)}) \dots \bar{h}_{\bar{p}_{k-1}}(1)$$

централизуют $\overline{T}_1^1$ для всех $t \in K^*$. Кроме того,

$$\langle h_1 \rangle \cap \langle h_2 \rangle = 1, \quad \overline{T}_1^1 \cap \langle h_1, h_2 \rangle = Z(\overline{T}_1^1).$$

Если q четно, то сразу получаем, что

$$L_1^1 = d_1 \cdot ({}^2A_{l-2}(q^2) \times (q+1)/dd_1 \times (q-1)) \cdot d_1.$$

В случае, когда q нечетно,

$$\langle Z(\overline{G}), Z(\overline{T}_1^1) \rangle = \{h_2(t) \mid t^{dd_1/2} = 1\} \times \{h_1(t) \mid t^2 = 1\}.$$

Следовательно,

$$L_1^1 = d_1 \cdot ({}^2A_{l-2}(q^2) \times 2(q+1)/dd_1 \times (q-1)/2) \cdot d_1.$$

B. Двойные стабилизаторы. Двойные стабилизаторы имеют вид $P_1^1 \cap w^{-1}P_1^1 w$, $w \in W^1$.

Пусть $w = w_{\bar{p}_1}$. По предложению 5 группа M_2 равна $P_1^1 \cap wP_1^1 w = Y_{1,2}^1 : L_{1,2}^1$, где

$$Y_{1,2}^1 = \langle X_S^1 \mid S \in (\overline{\Phi}_{1,2})^0 \setminus \{\bar{p}_1\} \rangle, \quad L_{1,2}^1 = \langle H^1, X_S^1 \mid S \in \overline{\Phi}_{1,2} \rangle.$$

Из формулы Шевалле для коммутаторов следует, что центр группы $Y_{1,2}^1$ совпадает с ее коммутантом и равен

$$\langle x_{2(\bar{p}_1+\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_{k-1})+\bar{p}_k}(t),\ x_{2(\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_{k-1})+\bar{p}_k}(t),$$
$$x_{\bar{p}_1+2(\bar{p}_2+\dots+\bar{p}_{k-1})+\bar{p}_k}(s) \mid t \in K_0^*,\ s \in K^* \rangle.$$

Таким образом, $Y_{1,2}^1 = p^{4m} \cdot p^{m(4l-12)}$.

По предложению 5 будет $\overline{L}_{1,2}^1 \simeq {}^2\overline{A}_{l-4}(q^2) \cdot (q-1)^2$. Рассмотрим группу $\overline{T}_{1,2}^1$ из доказательства предложения. Имеем

$$Z(\overline{T}_1^1) = \{z_2(t) = \bar{h}_{\bar{p}_3}(t^{l-4}) \dots \bar{h}_{\bar{p}_k}(t^{k-2}) \mid t^{q+1} = t^{l-3} = 1\},$$

и порядок этой группы равен $d_2 = (q+1, l-3)$. Элементы $h_1(t), h_2(t)$ и $\bar{h}_{\bar{p}_1}(t)$ централизуют группу $\overline{T}^1_{1,2}$ для всех $t \in K^*$. Как и в случае группы L^1_1, получаем, что

$$L^1_{1,2} = d_2 \cdot ({}^2A_{l-4}(q^2) \times (q+1)/dd_2 \times (q-1) \times (q^2-1)) \cdot d_2,$$

если q — четное число, и

$$L^1_{1,2} = d_2 \cdot ({}^2A_{l-4}(q^2) \times e(q+1)/dd_2 \times (q-1)/2 \times 2(q^2-1)/e) \cdot d_2$$

в противном случае. Через e обозначено число (d, d_2).

Подстепень n_2 равна $\left|P^1_1 : M_2\right| = q^2(q^{l-2}-1)(q^{l-1}+1)/(q^2-1)$.

По предложению 6 существует элемент w^1_0 такой, что $M_3 = P^1_1 \cap w^1_0 P^1_1 w^1_0 = L^1_1$. Подстепень n_3 равна $|P^1_1 : M_3| = |U^1_1| = q^{2l-1}$, $n = 1 + n_2 + n_3$, и ранг представления равен 3.

Результаты пп. 9, 10 суммирует следующая

Теорема 6. *Для простых неабелевых групп ${}^2A_l(q^2)$, $q = p^m$, параметры n, M, n_2, M_2, n_3, M_3 минимального подстановочного представления содержатся в следующем списке:*

если $l = 2$, $q \neq 2, 5$, то

$$n = q^3+1,\ M = (p^m \cdot p^{2m}) : \frac{q^2-1}{(3,q+1)}, \quad n_2 = q^3,\ M_2 = \frac{q^2-1}{(3,q+1)};$$

если $l = 2k > 2$, то

$$n = (q^{l+1}+1)\frac{q^l-1}{q^2-1}, \quad M = (p^m \cdot p^{m(2l-2)}) : \left(d_1 \cdot \left({}^2A_{l-2}(q^2) \times \frac{q^2-1}{dd_1}\right) \cdot d_1\right),$$

$$n_2 = q^2(q^{l-1}+1)\frac{q^{l-2}-1}{q^2-1},$$

$$M_2 = (p^{4m} \cdot p^{m(4l-12)}) : \left(d_2 \cdot \left({}^2A_{l-4}(q^2) \times \frac{q^2-1}{dd_2} \times (q^2-1)\right) \cdot d_2\right),$$

$$n_3 = q^{2l-1}, \quad M_3 = d_1 \cdot \left({}^2A_{l-2}(q^2) \times \frac{q^2-1}{dd_1}\right) \cdot d_1;$$

если $l = 2k-1 \geq 5$, $q \geq 3$, то

$$n = (q^l-1)\frac{q^{l+1}-1}{q^2-1},$$

$$M = (p^m \cdot p^{m(2l-2)}) : \left(d_1 \cdot \left({}^2A_{l-2}(q^2) \times \frac{e_1(q+1)}{dd_1} \times \frac{q-1}{e_1}\right) \cdot d_1\right),$$

$$n_2 = q^2(q^{l-2}+1)\frac{q^{l-1}-1}{q^2-1},$$

$$M_2 = (p^{4m} \cdot p^{m(4l-12)}) : \left(d_2 \cdot \left({}^2A_{l-4}(q) \times \frac{e_2(q+1)}{dd_2} \times \frac{q-1}{e_1} \times \frac{e_1(q^2-1)}{e_2}\right) \cdot d_2\right),$$

$$n_3 = q^{2l-1}, \quad M_3 = d_1 \cdot \left({}^2A_{l-2}(q^2) \times \frac{e_1(q+1)}{dd_1} \times \frac{q-1}{e_1}\right) \cdot d_1,$$

где $d = (l+1, q+1)$, $d_1 = (l-1, q+1)$, $d_2 = (l-3, q+1)$, $e_1 = (d, d_1)$, $e_2 = (d, d_2)$.

Во всех случаях ранг представления не превосходит 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Минимальное подстановочное представление простой группы Томпсона // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 5. С. 562–580.
2. *Cooperstein B. N.* Minimal degree for a permutation representation of a classical group // Israel J. Math. 1978. V. 30, N 3. P. 213–235.
3. *Мазуров В. Д.* Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
4. *Васильев А. В., Мазуров В. Д.* Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 6. С. 603–627.
5. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
6. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 518–530.
7. *Васильев А. В.* Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
8. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972.

Статья поступила 24 января 2003 г.

Гречкосеева Мария Александровна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
grechkoseeva@gorodok.net