Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.927.25

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ВЛОЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К ИНДЕФИНИТНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

А. И. Парфснов

Аннотация: Формулируется критерий вложения интерполяционных пространств. Он применяется к исследованию базисности по Риссу в пространстве $L_{2,|g|}$ собственных функций индефинитной задачи $u'' = \lambda g u$ Штурма — Лиувилля с условиями Дирихле на интервале $(-1, 1)$, где функция $g(x)$ меняет знак в нуле. В частности, установлен критерий базисности в случае нечетности $g(x)$. Обсуждается связь результатов с устойчивостью в интерполяционных шкалах.

Ключевые слова: индефинитная задача Штурма — Лиувилля, вложение интерполяционных пространств, базисность по Риссу

1. Введение

В работе устанавливается один простой критерий вложения интерполяционных пространств, который применяется к нахождению условий базисности по Риссу собственных функций индефинитной спектральной задачи в весовом пространстве L_2, связанном с этой спектральной задачей.

Рассматривается линейный самосопряженный пучок

$$L_0 u(x) = \lambda g(x) u(x), \tag{1}$$

где $x \in (-1, 1)$, $L_0 u = -u''$, с областью определения $D(L_0) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(-1, 1) \cap W_2^2(-1, 1)$, $g \in L_1(-1, 1)$, $xg(x) > 0$ п. в. на $(-1, 1)$, λ — спектральный параметр. Поскольку возможны $g \notin L_2$, допускаются обобщенные собственные функции. Из них можно составить ортонормированный базис пространства $H_1 = D\big(L_0^{1/2}\big) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(-1, 1)$ с нормой $\|u\|_{H_1} = (u, u)_{H_1}^{1/2} = \big(L_0^{1/2} u, L_0^{1/2} u\big)_{L_2}^{1/2}$. Действительно, имеют место следующие факты [1]. Оператор L_0 допускает продолжение по непрерывности до изометрии $\widehat{L}_0$ пространства H_1 на негативное пространство H_1', построенное по H_1 и L_2, т. е. на пополнение L_2 по норме

$$\|u\|_{H_1'} = \sup_{\|v\|_{H_1} = 1} |(u, v)_{L_2}|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00819).

Самосопряженный в L_2 оператор B умножения на $g(x)$ имеет продолжение $\widehat{B} \in L(H_0, H_1')$, где пространство H_0 получено из $D(B) = \{u \in L_2 : gu \in L_2\}$ пополнением по норме $\|u\|_{H_0} = \||B|^{1/2}u\|_{L_2}$ и является весовым пространством Лебега с нормой $\left(\int\limits_{-1}^{1} |g(s)||u(s)|^2\,ds\right)^{1/2}$. При этом $\operatorname{Ker}\widehat{B} = \{0\}$. Переходя от пучка (1) к оператору $\widehat{L}_0^{-1}\widehat{B}$, учитывая компактность вложения $H_1 \subset H_0$ и самосопряженность $\widehat{L}_0^{-1}\widehat{B}$ в H_1, получим утверждение о базисности в H_1 (под обобщенными собственными функциями пучка (1) понимаются собственные функции оператора $\widehat{L}_0^{-1}\widehat{B} \in L(H_1, H_1)$).

Многие авторы рассматривали более сложный вопрос о базисности собственных функций пучка (1) в пространстве H_0, а именно базисности по Риссу, т. е. вопрос о существовании такого эквивалентного скалярного произведения в H_0, что некоторая система (обобщенных) собственных функций пучка (1) составляет ортонормированный базис пространства H_0. Если ответ на этот вопрос положителен, то говорим, что *имеет место базисность по Риссу в* H_0 или просто базисность. Этот вопрос изучался как для эллиптических операторов L_0 в частных производных высокого порядка, так и для абстрактных линейных самосопряженных пучков. Общая ситуация обрисована во введении к [2]; к библиографии в этой работе стоит добавить работы [3–13]. Мы делаем акцент на функции $g(x)$, не предполагая ее принадлежащей тем или иным классам непрерывных справа и слева от нуля функций, и берем простейший оператор L_0.

Ниже используется формулировка проблемы базисности на языке теории интерполяции банаховых пространств [1]. Рассмотрим изометрию J пространства H_0, состоящую в умножении функции на $\operatorname{sign} x$, и построим негативное пространство H_1' по H_1 и H_0, обозначив его через $H_{-1,*}$. Пусть $H_{-1} = JH_{-1,*}$, т. е. H_{-1} — пополнение H_0 по норме $\|u\|_{-1} = \|Ju\|_{-1,*}$. Оно является пополнением предгильбертова пространства H_0 со скалярным произведением $(u,v)_{H_{-1}} = (\widehat{L}_0^{-1}\widehat{B}u, \widehat{L}_0^{-1}\widehat{B}v)_{H_1}$. Легко видеть, что H_1 плотно в H_{-1} и из собственных функций пучка (1) можно составить ортонормированный базис пространства H_{-1}. Необходимым и достаточным условием базисности является условие [1, теорема 2.1]

$$(H_1, H_{-1})_{1/2,2} = H_0, \tag{2}$$

понимаемое, как обычно, с точностью до эквивалентности норм, в котором $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ означает метод вещественной интерполяции (см. п. 2). Здесь при переформулировке использована связь вещественной и комплексной интерполяций [14, замечание 1.18.10/3] в гильбертовом случае. Попутно заметим, что ввиду положительности левой части пучка (1) его спектр веществен и можно использовать вещественные пространства. Применение к (2) оператора J дает эквивалентное условие $(H_{1,*}, H_{-1,*})_{1/2,2} = H_0$, где $H_{1,*} = JH_1$. Достаточным для базисности является условие [1, теорема 2.2]

$$\exists\theta \in (0,1) \quad J \in L(H_\theta, H_\theta), \tag{3}$$

где $H_\theta = (H_0, H_1)_{\theta,2}$ или, иначе, $H_\theta \subset J^{-1}H_\theta = JH_\theta = H_{\theta,*}$, где $H_{\theta,*} = (H_0, H_{1,*})_{\theta,2}$. Будем пользоваться им в форме

$$\exists\theta \in (0,1) \quad H_{\theta,*} \subset H_\theta, \tag{4}$$

получаемой применением оператора J. В форме $\exists\theta \in (0,1)$ $H_\theta = H_{\theta,*}$ оно (в другом контексте) применялось П. Гриваром в [15].

После приведения в п. 2 необходимых сведений из теории интерполяции в п. 3 в леммах 1 и 2 устанавливается критерий выполнения абстрактного аналога условия (4). В п. 4 на его основе в следствии 4 устанавливается критерий выполнения условия (4). В заключительном п. 5 подводятся итоги. Оказывается, что для нечетной функции $g(x)$ полученное условие совпадает с условием, отвечающим за интерполяцию сужений рассматриваемых пространств на интервал $(0,1)$. Сопоставление достаточного условия базисности для нечетных $g(x)$ с известным достаточным условием небазисности дает необходимость обоих. Для произвольных $g(x)$ условие (3) не необходимо. Эти два результата трактуются как устойчивость и соответственно неустойчивость свойства равенства двух интерполяционных шкал на некотором отрезке. Приводится пример такой функции g, что выполняется (4), но ни для какого $\theta \in (0,1)$ соответствующее вложение-равенство не выполняется ни для сужений рассматриваемых пространств на $(0,1)$, ни для сужений на $(-1,0)$.

2. Интерполяционные пространства

Определения и утверждения этого пункта можно найти в [14, гл. 1]. Интерполяционной парой называется пара банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое линейное топологическое пространство. Для применяемого ниже метода $(\cdot,\cdot)_{\theta,q}$ скаляры вещественны или комплексны. Напомним, что выделяющим элементы банахова пространства двусторонних последовательностей скаляров l_p и задающим в нем (l_p) норму выражением является

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p} \text{ при } 1\le p<\infty \quad \text{и } \sup_{j\in\mathbb{Z}}|x_j| \text{ при } p=\infty.$$

По интерполяционной паре $\{A_0,A_1\}$ строятся банаховы $A_0\cap A_1$, A_0+A_1 путем наделения соответствующих линеалов нормами $J(1,\cdot)$ и $K(1,\cdot)$, где

$$J(t,a)=J(t,a;A_0,A_1)=\max\{\|a\|_{A_0},t\|a\|_{A_1}\},\quad a\in A_0\cap A_1,$$

$$K(t,a)=K(t,a;A_0,A_1)=\inf\{\|a_0\|_{A_0}+t\|a_1\|_{A_1}:$$
$$a=a_0+a_1,\ a_0\in A_0,\ a_1\in A_1\},\quad a\in A_0+A_1,\quad 0<t<\infty,$$

и банахово $(A_0,A_1)_{\theta,q}$, где $0<\theta<1$, $1\le q\le\infty$, всех тех $a\in A_0+A_1$, для которых $\{2^{-j\theta}K(2^j,a)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ принадлежит l_q, с нормой $\|\{2^{-j\theta}K(2^j,a)\}\|_{l_q}$ (дискретный вариант K-метода Петре).

Заметим, что вложения $l_1\subset l_q\subset l_\infty$ влекут соответствующие вложения интерполяционных пространств. Классы $J(\theta;A_0,A_1)$ и $K(\theta;A_0,A_1)$ определяются как классы всех банаховых пространств E таких, что $(A_0,A_1)_{\theta,1}\subset E\subset A_0+A_1$ и соответственно $A_0\cap A_1\subset E\subset (A_0,A_1)_{\theta,\infty}$. Класс $J(\theta;A_0,A_1)$ выделяется эквивалентным образом условиями $A_0\cap A_1\subset E\subset A_0+A_1$ и

$$\exists c>0\ \forall x\in A_0\cap A_1\quad \|x\|_E\le c\|x\|_{A_0}^{1-\theta}\|x\|_{A_1}^{\theta}.$$

Из определения очевидна монотонность

$$A\subset B\Rightarrow (A,C)_{\theta,q}\subset (B,C)_{\theta,q}$$

вещественного метода, из которой следует, что топология в $(A,B)_{\theta,q}$ определяется топологиями пространств A и B. Отметим также факт $(A_0,A_1)_{\theta,q}=(A_1,A_0)_{1-\theta,q}$.

В следующем утверждении для фиксированной интерполяционной пары $\{A_0,A_1\}$ классы $J(\theta)\cap K(\theta)$ при $\theta=0,1$ полагаются состоящими из A_0 и соответственно A_1.

Теорема о реитерации. *Пусть* $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 1$, $E_j \in J(\theta_j) \cap K(\theta_j)$ *при* $j = 0, 1$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда при* $0 < \lambda < 1$

$$(E_0, E_1)_{\lambda,p} = (A_0, A_1)_{(1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1, p}.$$

3. Критерий выполнения условия (5)

Условие (4) является частным случаем условия

$$\exists \theta \in (0,1) \quad (A,B)_{\theta,2} \subset (A,C)_{\theta,2}, \tag{5}$$

где банаховы B, C непрерывно вложены в банахово A.

Лемма 1. *Условие* (5) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\exists \beta \in (0,1) \quad (A,B)_{\beta,1} \subset (A,C)_{\beta,\infty},$$

причем $\sup \beta = \sup \theta$.

Доказательство. Если $(A,B)_{\theta,2} \subset (A,C)_{\theta,2}$, то из монотонности вещественного метода по второму индексу имеем

$$(A,B)_{\theta,1} \subset (A,B)_{\theta,2} \subset (A,C)_{\theta,2} \subset (A,C)_{\theta,\infty}.$$

С другой стороны, если $(A,B)_{\beta,1} \subset (A,C)_{\beta,\infty}$ и $0 < \theta < \beta$, то после применения метода $(A,\cdot)_{\theta/\beta,2}$, его монотонности и теоремы о реитерации получим

$$(A,B)_{\theta,2} = (A,(A,B)_{\beta,1})_{\theta/\beta,2} \subset (A,(A,C)_{\beta,\infty})_{\theta/\beta,2} = (A,C)_{\theta,2}.$$

Утверждение о супремумах очевидно. □

Лемма 2. *Пусть банаховы* B, C *содержатся в* A *и* $0 < \beta < 1$. *Тогда* $(A,B)_{\beta,1} \subset (A,C)_{\beta,\infty}$ *в том и только в том случае, когда*

$$\exists c > 0 \; \forall x \in B \; \forall t \in (0,\infty) \; \exists y \in C \quad \|x-y\|_A + t\|y\|_C \le ct^\beta \|x\|_A^{1-\beta} \|x\|_B^\beta. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$(A,B)_{\beta,1} \subset (A,C)_{\beta,\infty} \Leftrightarrow (A,B)_{\beta,1} \subset (A,C)_{\beta,\infty} \subset A = A + B \Leftrightarrow$$

$$(A,C)_{\beta,\infty} \in J(\beta; A, B) \Leftrightarrow (B = A \cap B \subset (A,C)_{\beta,\infty}) \&$$

$$(\exists c_1 > 0 \; \forall x \in B \; \|x\|_{(A,C)_{\beta,\infty}} \le c_1 \|x\|_A^{1-\beta} \|x\|_B^\beta) \Leftrightarrow$$

$$\exists c_1 > 0 \; \forall x \in B \; (x \in (A,C)_{\beta,\infty}) \& (\|x\|_{(A,C)_{\beta,\infty}} \le c_1 \|x\|_A^{1-\beta} \|x\|_B^\beta).$$

Последнее же условие в цепочке эквивалентно условию (6), потому что норма в $(A,C)_{\beta,\infty}$ эквивалентна, очевидно, норме

$$\sup_{0<t<\infty} t^{-\beta} K(t, \cdot; A, C) = \sup_{0<t<\infty} (t^{-\beta} \inf_{y \in C} [\| \cdot - y\|_A + t\|y\|_C]). \quad \square$$

4. Критерий выполнения условия (3)

Применим леммы 1 и 2 для выяснения условий справедливости включения (3). Не ограничиваясь гильбертовым случаем, возьмем $p \in (1,\infty)$ и положим $q = p/(p-1)$,

$$Q = \{u : (-1,1) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \text{ измерима}; \|u\|_Q = \||g|^{1/p}u\|_{L_p(-1,1)} < \infty\},$$

$W = \overset{\circ}{W}{}^1_p(-1,1)$ с нормой $\|u\|_W = \|u'\|_{L_p(-1,1)}$, $W_* = JW$. Для $\varepsilon \in (0,1]$ положим

$$I_\varepsilon^+ = \int\limits_0^\varepsilon g(s)\,ds, \quad I_\varepsilon^- = \int\limits_{-\varepsilon}^0 |g(s)|\,ds \quad \left(= -\int\limits_{-\varepsilon}^0 g(s)\,ds\right) \quad \text{и } \widetilde{I}_\varepsilon = I_\varepsilon^- + I_\varepsilon^+.$$

Теорема 3. *Пусть $\beta \in (0,1)$. Тогда $(Q,W_*)_{\beta,1} \subset (Q,W)_{\beta,\infty}$ в том и только в том случае, когда*

$$\exists c_1 > 0 \quad (0 < \eta \le \varepsilon \le 1) \Rightarrow \min\{I_\eta^+, I_\eta^-\} \le c_1 \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^{\beta(p-1)/(1-\beta)} \widetilde{I}_\varepsilon. \tag{7}$$

Доказательство. Условие (6) из леммы 2 принимает в нашем случае вид

$$\exists c > 0\ \forall x \in W\ \forall t \in (0,\infty)\ \exists y \in W \quad \|Jx - y\|_Q + t\|y\|_W \le ct^\beta \|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta. \tag{8}$$

(a) Пусть $0 < 2\eta \le \varepsilon \le 1$ и (8) имеет место. Для четной $x(s) \in W$, равной 0 при $s \in [\varepsilon,1]$ и $1 - s/\varepsilon$ при $s \in [0,\varepsilon]$, имеем

$$\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta \le \widetilde{I}_\varepsilon^{(1-\beta)/p} 2^{\beta/p} \varepsilon^{-\beta/q} = M.$$

Если $y \in W$ соответствует x и $t = (2^{1+1/q}cM\eta^{1/q})^{1/(1-\beta)}$, то

$$\max_{-\eta \le s_1, s_2 \le \eta} |y(s_1) - y(s_2)| \le \int\limits_{-\eta}^{\eta} |y'(s)|\,ds \le (2\eta)^{1/q}\|y\|_W \le (2\eta)^{1/q} ct^{\beta-1} M = \frac{1}{2}.$$

Не могут существовать $s_1 \in [-\eta, 0)$, $s_2 \in (0,\eta]$ со свойством

$$\max\{|(Jx-y)(s_1)|, |(Jx-y)(s_2)|\} < 1/4,$$

ибо тогда

$$1 \le |Jx(s_1) - Jx(s_2)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + |y(s_1) - y(s_2)| \le 1.$$

Поэтому $|Jx - y| \ge 1/4$ на $[-\eta, 0)$ либо на $(0,\eta]$. В первом случае

$$\frac{1}{4}\left(I_\eta^-\right)^{1/p} \le \|Jx - y\|_Q \le \mathrm{c}t^\beta M = c'\eta^{\frac{\beta}{(1-\beta)q}} M^{\frac{\beta}{1-\beta}+1} = c''\varepsilon^{-\frac{\beta}{(1-\beta)q}} \widetilde{I}_\varepsilon^{1/p} \eta^{\frac{\beta}{(1-\beta)q}},$$

и аналогично во втором. Оценка (7) доказана тем самым при $\eta < \varepsilon/2$. Если $\eta \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$, то

$$\min\{I_\eta^+, I_\eta^-\} \le I_\varepsilon^+ \le \left(\frac{2\eta}{\varepsilon}\right)^{\beta(p-1)/(1-\beta)} \widetilde{I}_\varepsilon.$$

(b) Пусть выполнено условие (7), $x \in W$ и $t \in (0,\infty)$. Предположим вначале, что $x(0) \ne 0$. В этом случае при доказательстве условия (8) ввиду его однородности можно считать без ограничения общности, что $x(0) = 1$. Для такого x имеем $\|x\|_W \ge 2^{1/p}$. Положим $\varepsilon = (2\|x\|_W)^{-q}$ $(\le 2^{-(p+1)/(p-1)} < 1)$, а четную $x_1(s) = x(s) - x_0(s) \in W$ возьмем равной 0 при $s \in [\varepsilon, 1]$ и $1 - s/\varepsilon$ при $s \in [0, \varepsilon]$. Тогда

$$|s| < \varepsilon \Rightarrow |x(0) - x(s)| \le \varepsilon^{1/q}\|x\|_W = 1/2, \quad |x(s)| \ge 1/2;$$

$$\widetilde{I}_\varepsilon^{1/p}/2 \le \|x\|_Q, \quad \|x_1\|_Q \le \widetilde{I}_\varepsilon^{1/p} \le 2\|x\|_Q, \quad \|x_0\|_Q \le 3\|x\|_Q,$$

$$\|x_1\|_W = 2^{1/p}\varepsilon^{-1/q} = c_2\|x\|_W, \quad \|x_0\|_W \le (c_2 + 1)\|x\|_W.$$

Положим $y_0 = Jx_0 \in W$ при $t\|x_0\|_W \le \|x_0\|_Q$ и $y_0 = 0 \in W$ в противном случае. В первом случае

$$\|Jx_0 - y_0\|_Q + t\|y_0\|_W = (t\|x_0\|_W)^{1-\beta}(t\|x_0\|_W)^\beta \le t^\beta\|x_0\|_Q^{1-\beta}\|x_0\|_W^\beta,$$

и во втором тоже

$$\|Jx_0 - y_0\|_Q + t\|y_0\|_W = \|x_0\|_Q^{1-\beta}\|x_0\|_Q^\beta \le t^\beta\|x_0\|_Q^{1-\beta}\|x_0\|_W^\beta.$$

Если $\eta = \left(t^{\beta-1}\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta\right)^{-q}$, то $\eta/\varepsilon = 2^q(t\|x\|_W/\|x\|_Q)^{q(1-\beta)}$. При $\eta \ge \varepsilon$ положим $y_1 = 0 \in W$ и получим

$$\|Jx_1 - y_1\|_Q + t\|y_1\|_W \le 2\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_Q^\beta \le 2^{\frac{1}{1-\beta}}t^\beta\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta.$$

При $\eta < \varepsilon$ и $I_\eta^- < I_\eta^+$ положим $y_1 = z_1$, где $z_1 \in W$ совпадает с Jx_1 на $[-1, -\eta] \cup [0, 1]$ и линейна на $[-\eta, 0]$. Тогда

$$\begin{aligned}\|Jx_1 - y_1\|_Q < 2\big(I_\eta^-\big)^{1/p} \le 2c_1^{1/p}\left[2^q\left(\frac{t\|x\|_W}{\|x\|_Q}\right)^{q(1-\beta)}\right]^{\frac{\beta}{q(1-\beta)}}\widetilde{I}_\varepsilon^{1/p}& \\ \le 2^{1+\frac{1}{1-\beta}}c_1^{1/p}t^\beta\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta&;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y_1\|_W < \left(\varepsilon\cdot\varepsilon^{-p} + \eta\cdot\left(\frac{2}{\eta}\right)^p + \varepsilon\cdot\varepsilon^{-p}\right)^{1/p}& \\ < (2 + 2^p)^{1/p}\eta^{-1/q} = (2 + 2^p)^{1/p}t^{\beta-1}\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta&.\end{aligned}$$

При $\eta < \varepsilon$ и $I_\eta^- \ge I_\eta^+$ положим $y_1(s) = -z_1(-s)$ на $[-1, 1]$; норма $\|Jx_1 - y_1\|_Q$ имеет ту же оценку. Наконец, при $x(0) = 0$ будем считать $y_1 = 0 \in W$ и сохраним определение y_0 по $x_0 = x \in W \cap W_*$. Ввиду оценок

$$\begin{aligned}&\|Jx - (y_0 + y_1)\|_Q + t\|y_0 + y_1\|_W \\ &\qquad \le (\|Jx_0 - y_0\|_Q + t\|y_0\|_W) + (\|Jx_1 - y_1\|_Q + t\|y_1\|_W),\end{aligned}$$

$$\|x_0\|_Q^{1-\beta}\|x_0\|_W^\beta \le 3^{1-\beta}(c_2 + 1)^\beta\|x\|_Q^{1-\beta}\|x\|_W^\beta$$

ясно, что при некоторой $c > 0$ выбор $y = y_0 + y_1$ завершает доказательство условия (8) и тем самым теоремы 3. □

Из леммы 1 и теоремы 3 выводится

Следствие 4. *Достаточное для базисности условие* (3) *выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого* $\beta \in (0, 1)$ *и* $p = 2$ *справедливо условие* (7), *причем* $\sup\beta = \sup\theta$.

5. Заключение

Если Q_+ и W_+ суть сужения Q и W на $(0,1)$, а $W_{+0} = \{u \in W_+ : u(0) = 0\}$ с индуцированной нормой, то верна следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 5. *Если $0 < \beta < 1$, то $(Q_+, W_+)_{\beta,1} \subset (Q_+, W_{+0})_{\beta,\infty}$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists c_1 > 0 \quad (0 < \eta \le \varepsilon \le 1) \Rightarrow I_\eta^+ \le c_1 \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^{\beta(p-1)/(1-\beta)} I_\varepsilon^+. \tag{9}$$

По лемме 1 эти условия выполняются для некоторого $\beta \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\theta \in (0,1)$

$$(Q_+, W_{+0})_{\theta,2} = (Q_+, W_+)_{\theta,2} \tag{10}$$

и $\sup\beta = \sup\theta$. В этом случае можно также применить исчерпывающий результат из [16] о сравнении пространств $(X, Y_0)_{\theta,q}$ и $(X, Y)_{\theta,q}$, где $1 \le q < \infty$, Y_0 замкнуто и имеет коразмерность 1 в Y и $X \cap Y$ плотно в X и в Y. Для этого надо оценить K-функционал

$$K\big(t, T; Q'_+, W'_+\big),$$

где $T \in W'_+$ действует по правилу $u \mapsto u(0)$ и W_{+0} является ядром T. Значения θ, для которых выполняется (10), заполняют интервал $(0, \sup\theta)$ [16]. Поскольку тождественный оператор I непрерывен из W_{+0} в W_+ и из Q_+ в Q_+, а равенство пространств есть свойство I быть изоморфизмом, то последний факт следует также из свойства устойчивости, выраженного в теореме 2.7 из [17]. (В [16, 17] есть ссылки на более ранние работы, которыми можно воспользоваться с тем же успехом.)

Условие (10) использовалось С. Г. Пятковым как достаточное для выполнения (3) и, следовательно, базисности по Риссу. Для нечетных $g(x)$ оно необходимо.

Теорема 6. *Если $g(x)$ нечетна, то следующие утверждения эквивалентны:*
(a) *есть базисность по Риссу в H_0;*
(b) *для некоторого $\beta \in (0,1)$ при $p = 2$ выполняется условие* (9)*;*
(c) *существует $\mu \in (0,1)$ такое, что $I_{\mu\varepsilon}^+ \le I_\varepsilon^+/2$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$;*
(d) *не существует таких последовательностей чисел a_n, b_n, что $0 < a_n < b_n \le 1$ и*

$$a_n/b_n \to 0, \quad I_{a_n}^+/I_{b_n}^+ \to 1 \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Доказательство. Импликации (b) $\Rightarrow$ (c) и (c) $\Rightarrow$ (d) очевидны. Пусть при $p = 2$ условие (9) не выполняется ни при каком $\beta \in (0,1)$. Для каждого натурального $n \ge 2$ найдутся η, ε такие, что $0 < \eta \le \varepsilon \le 1$ и $I_\eta^+ > n^{1/n}(\eta/\varepsilon)^{1/n} I_\varepsilon^+$. Тогда $\eta/\varepsilon < n^{-1}$ и существует натуральное m: $n^{-m} \ge \eta/\varepsilon > n^{-m-1}$ $(\ge n^{-2m})$. Среди индексов $1, \dots, m$ найдется такой (j), что $I_{x_{j-1}}^+ > n^{-2/n} I_{x_j}^+$, где $x_k = \varepsilon n^{k-m}$, так как иначе

$$n^{-2m/n} I_\varepsilon^+ < n^{1/n}(\eta/\varepsilon)^{1/n} I_\varepsilon^+ < I_\eta^+ \le I_{x_0}^+ \le (n^{-2/n})^m I_\varepsilon^+;$$

противоречие. Поскольку $n^{-2/n} \nearrow 1$ при $n \to \infty$ и $x_{j-1}/x_j = n^{-1} \to 0$, можно положить $a_n = x_{j-1}$ и $b_n = x_j$ и получить отрицание утверждения (d). Таким образом, (b), (c) и (d) эквивалентны.

Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) следует из следствия 4, а импликация (не (d)) $\Rightarrow$ (не (a)) доказана в [7, следствие 1]. (Если (d) неверно, то $H_0 \notin J(1/2; H_1, H_{-1})$; неравенство, соответствующее классу $J(1/2)$, применялось и в других работах по небазисности [9, 10, 18, 19].) $\square$

В частности, нет базисности, если $g(x) = -g(-x) = (x \ln^\alpha(1/x))^{-1}$ при $0 < x < 1/2$, где $\alpha > 1$. Существует одно достаточное условие базисности, не охваченное следствием 4. Оно требует [18, следствие 2.7] существования $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\delta \in (0, \min\{|t|^{-1}, 1\})$ таких, что функция $f(x)$, равная $g(x)/g(tx)$ на $[-\delta, 0)$, непрерывно дифференцируема на $[-\delta, 0]$ и $f(0) \neq t$ (ради простоты Волкмер ограничился рассмотрением $g \in L_\infty(-1, 1)$). Возьмем $t = -1/2$, $\delta \in (0, 1)$, $f \equiv -1$ на $[-\delta, 0]$. Функцию $g = g_1$ на $(0, \delta/2]$ зададим позже. По условию $g_1(-x) = -g_1(x/2)$ при $x \in (0, \delta]$, откуда

$$I_\eta^- = -\int_0^\eta g_1(-x)\,dx = \int_0^\eta g_1(x/2)\,dx = 2I_{\eta/2}^+ \quad (\eta \in (0, \delta]).$$

Если для некоторого $\beta \in (0, 1)$ и $p = 2$ выполняется (7), то

$$(0 < \eta \le \varepsilon \le \delta/2) \Rightarrow I_{\eta/2}^+ \le \min\bigl\{I_\eta^+, 2I_{\eta/2}^+\bigr\}$$
$$\le c_1 \left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \bigl(I_\varepsilon^+ + 2I_{\varepsilon/2}^+\bigr) \le 3 \cdot 2^{\frac{\beta}{1-\beta}} c_1 \left(\frac{\eta/2}{\varepsilon}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} I_\varepsilon^+,$$

что невозможно для функции $\varepsilon \mapsto I_\varepsilon^+$, не удовлетворяющей условию (b) теоремы 6. Для $g = g_1$ есть базисность, но (3) не имеет места.

Пусть $Y = (H_{1,*}, H_{-1})_{1/2,2}$. Используя двойственность относительно $(\cdot, \cdot)_{H_0}$, в частности взаимную двойственность $H_{1,*}$ и H_{-1}, и проводя необходимые отождествления, можно установить, что $Y' = Y$, $Y \subset H_0$, и получить известный факт $Y = H_0$. Если имеет место базисность (условие (2)), то по теореме о реитерации

$$H_\theta = (H_1, H_{-1})_{(1-\theta)/2,2}, \quad H_{\theta,*} = (H_{1,*}, H_{-1})_{(1-\theta)/2,2}.$$

Таким образом, импликация (a) $\Rightarrow$ (b) теоремы 6 и следствие 4 означают, что для нечетных $g(x)$ имеет место устойчивость равенства

$$(H_1, H_{-1})_{\mu,2} = (H_{1,*}, H_{-1})_{\mu,2}$$

по параметру μ около значения $\mu = 1/2$. Для $g = g_1$ устойчивости нет.

Приведем пример функции g со свойством (4) такой, что (в понятных обозначениях и при $p = 2$)

$$(Q_+, W_{+0})_{\theta,2} \neq (Q_+, W_+)_{\theta,2}, \quad (Q_-, W_{-0})_{\theta,2} \neq (Q_-, W_-)_{\theta,2} \text{ для всех } \theta \in (0, 1).$$

Возьмем такую $f : (0, 1) \to (0, \infty)$, что для $I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon f(s)\,ds$ вместо I_ε^+ выполняется (9) при некотором $\beta \in (0, 1)$. Задавшись последовательностями $x_k = (k!)^{-1}$ и $0 < d_k < 1$, для $s \in (0, 1]$ положим

$$g((-1)^k s) = (-1)^k f(s) d_k$$

и

$$g(-(-1)^k s) = -(-1)^k f(s)[1 - d_k], \quad \text{если } s \in (x_{k+1}, x_k].$$

Свойство (4) выполняется по следствию 4 ввиду того, что

$$I_\eta^+ \le I_\eta \le c_1(\eta/\varepsilon)^{\beta/(1-\beta)} I_\varepsilon = c_1(\eta/\varepsilon)^{\beta/(1-\beta)} \widetilde{I}_\varepsilon.$$

Вместе с тем

$$\int\limits_0^{x_k} |g((-1)^k s)|\,ds \ge \int\limits_{x_{k+2}}^{x_{k+1}} |g((-1)^k s)|\,ds = [1-d_{k+1}] \int\limits_{x_{k+2}}^{x_{k+1}} f(s)\,ds,$$

$$\frac{\int\limits_0^{x_{k+1}} |g((-1)^k s)|\,ds}{\int\limits_0^{x_k} |g((-1)^k s)|\,ds} \ge 1 - \frac{d_k}{1-d_{k+1}} \frac{\int\limits_{x_{k+1}}^{x_k} f(s)\,ds}{\int\limits_{x_{k+2}}^{x_{k+1}} f(s)\,ds} \to 1 \quad \text{при } k \to \infty,$$

если d_k достаточно быстро сходится к нулю. Взяв $a_n = x_{2n+1}$ и $b_n = x_{2n}$, убеждаемся при помощи теоремы 5 и эквивалентности (b) $\Leftrightarrow$ (d) теоремы 6, что (10) не имеет места при $\theta \in (0,1)$. Для пространств над $(-1,0)$ это доказывается выбором $a_n = x_{2n}$, $b_n = x_{2n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пятков С. Г.* Некоторые свойства собственных функций линейных пучков // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 111–124.
2. *Пятков С. Г.* Индефинитные эллиптические спектральные задачи // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 409–426.
3. *Зяблов А. А.* О свойствах базисности собственных функций одной модельной задачи с индефинитным весом // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 4. С. 149–151.
4. *Fleige A.* The “turning point condition" of Beals for indefinite Sturm–Liouville problems // Math. Nachr. 1995. V. 172. P. 109–112.
5. *Curgus B., Najman B.* The operator (sgn x)$\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to a selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, N 4. P. 1125–1128.
6. *Faierman M., Langer H.* Elliptic problems involving an indefinite weight function // Oper. Theory: Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 1996. V. 87. P. 105–127.
7. *Abasheeva N. L., Pyatkov S. G.* Counterexamples in indefinite Sturm–Liouville problems // Siberian Adv. Math. 1997. V. 7, N 4. P. 1–8.
8. *Fleige A., Najman B.* Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators // Oper. Theory: Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 1998. V. 102. P. 85–95.
9. *Fleige A.* A counterexample to completeness properties for indefinite Sturm–Liouville problems // Math. Nachr. 1998. V. 190. P. 123–128.
10. *Абашеева Н. Л.* Контрпримеры для эллиптических спектральных задач с незнакоопределенной весовой функцией // Неклассические уравнения математической физики: Третий Сибирский конгр. по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ–98), посвященный памяти С. Л. Соболева (Новосибирск, 22–27 июня 1998 г.) Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1998. С. 113–121.
11. *Pyatkov S. G.* Interpolation of some function spaces and indefinite Sturm–Liouville problems // Oper. Theory: Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 1998. V. 102. P. 179–200.
12. *Fleige A.* Non-semibounded sesquilinear forms and left-indefinite Sturm-Liouville problems // Integral Equations and Operator Theory. 1999. V. 33, N 1. P. 20–33.
13. *Пятков С. Г.* Интерполяция весовых пространств Соболева // Мат. труды. 2001. Т. 4, № 1. С. 122–173.
14. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
15. *Grisvard P.* An approach to the singular solutions of elliptic problems via the theory of differential equations in Banach spaces // Differential equations in Banach spaces: Proc. Conf., Bologna (Italy), 1985. Berlin etc.: Springer-Verl., 1986. P. 137–155. (Lect. Notes Math.; 1223).
16. *Ivanov S., Kalton N.* Interpolation of subspaces and applications to exponential bases // Алгебра и анализ. 2001. V. 13, N 2. P. 93–115.

17. *Kalton N., Mitrea M.* Stability results on interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350, N 10. P. 3903–3922.
18. *Volkmer H.* Sturm–Liouville problems with indefinite weights and Everitt's inequality // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1996. V. 126, N 5. P. 1097–1112.
19. *Пятков С. Г.* О некоторых свойствах собственных функций линейных пучков // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 141–148.

Статья поступила 5 апреля 2002 г.

Парфёнов Антон Игоревич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pai79@sibmail.ru