Сибирский математический журнал
Июль—август, 2003. Том 44, № 4

УДК 517.982

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УГЛОВ РИССА В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОРЛИЧА

Ян Якьян

Аннотация: Получены представления углов Рисса пространств последовательностей Орлича с нормами Люксембурга и Орлича и указаны способы их вычисления.

Ключевые слова: пространство Орлича, угол Рисса, банахова решетка

1. Введение

Угол Рисса $a(X)$ банаховой решетки X был определен Дж. М. Борвейном и Б. Симсом [1] как

$$a(X) = \sup\{\|(|x| \vee |y|)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\},$$

где $|x| \vee |y| = \max(|x|, |y|)$. Очевидно, $1 \leq a(X) \leq 2$. Он является важным геометрическим параметром банаховых решеток и привлекает многих исследователей (см. [2–4]).

Банахово пространство X называют *пространством последовательностей Кёте*, если для любых $x \in l^0$, $y \in X$ таких, что $|x_i| \leq |y_i|$ для всех $i \in \mathbb{N}$, будет $x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$ (см. [4]). Данная работа посвящена вычислению углов Рисса класса пространств последовательностей Кёте, а именно пространств последовательностей Орлича. Вначале докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Для пространства последовательностей Кёте X угол Рисса $a(X)$ может быть найден по формуле*

$$a(X) = \sup\{\|(|x| \vee |y|)\| : x, y \in S(X),\ |x| \wedge |y| = 0\},$$

где $S(X)$ — единичная сфера в X.

Доказательство. Пусть

$$b = \sup\{\|(|x| \vee |y|)\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, |x| \wedge |y| = 0\}.$$

Очевидно, $a(X) \geq b$. Обратно, для любых $x, y \in B(X)$ таких, что $x \neq y$, определим x', y', полагая

$$x'_i = x_i,\ \text{если } |x_i| \geq |y_i|, \quad x'_i = 0,\ \text{если } |x_i| \leq |y_i|;$$

$$y'_i = 0,\ \text{если } |x_i| \geq |y_i|, \quad y'_i = y_i,\ \text{если } |x_i| \leq |y_i|.$$

Тогда $\|x'\| \leq 1$, $\|y'\| \leq 1$. Пусть $x'' = x'/\|x'\|$, $y'' = y'/\|y'\|$. Имеем $x'', y'' \in S(X)$ и $|x''| \wedge |y''| = 0$, в то время как $|x''| \vee |y''| \geq |x'| \vee |y'| = |x| \vee |y|$. Поэтому $a(X) \leq b$, откуда $a(X) = b$. $\square$

Пусть

$$\Phi(u)=\int\limits_0^{|u|}\phi(t)\,dt,\quad \Psi(v)=\int\limits_0^{|v|}\psi(s)\,ds$$

— пара взаимно дополнительных N-функций, т. е. $\phi(t)$ непрерывны справа, $\phi(0)=0$, $\phi(t)\nearrow\infty$ при $t\nearrow\infty$ и ψ — функция, обратная к ϕ справа. Пространство последовательностей Орлича l^Φ определяется как множество

$$\left\{\{x(i)\}:\rho_\Phi(\lambda x)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(\lambda x(i))<\infty \text{ для некоторого } \lambda>0\right\}.$$

Нормы Люксембурга и Орлича выражаются так:

$$\|x\|_{(\Phi)}=\inf\{c>0:\rho_\Phi(x/c)\le 1\}$$

и

$$\|x\|_\Phi=\inf_{k>0}\frac{1}{k}[1+\rho_\Phi(kx)].$$

Для упрощения обозначений будем писать кратко $l^{(\Phi)}$ вместо $(l^\Phi,\|\cdot\|_{(\Phi)})$ и l^Φ вместо $(l^\Phi,\|\cdot\|_\Phi)$. Говорят, что N-функция Φ *удовлетворяет* Δ_2-*условию в* 0 ($\Phi\in\Delta_2(0)$), если существуют $u_0>0$ и $K\ge 2$ такие, что $\Phi(2u)\le K\Phi(u)$, если $0<u\le u_0$. Будем говорить, что Φ *принадлежит* $\nabla_2(0)$, если ее дополнительная функция Ψ принадлежит $\Delta_2(0)$. Известно, что $\Phi\in\Delta_2(0)\cap\nabla_2(0)$ тогда и только тогда, когда l^Φ или $l^{(\Phi)}$ рефлексивны. Основные факты о пространствах Орлича можно найти в [3].

Мы часто будем рассматривать следующие индекс-функции, порожденные функцией Φ:

$$F_\Phi(t)=\frac{t\phi(t)}{\Phi(t)},\quad G_\Phi(c,u)=\frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(cu)}\quad (c>1). \tag{1}$$

В частности, вместо $G_\Phi(2,u)$ будем писать $G_\Phi(u)$. Эти функции порождают ряд параметров N-функций.

Следующие параметры введены И. Б. Симоненко [5] и Е. М. Семеновым [6]:

$$A_\Phi^0=\liminf_{t\to0^+}F_\Phi(t),\quad B_\Phi^0=\limsup_{t\to0^+}F_\Phi(t); \tag{2}$$

$$\alpha_\Phi^0=\liminf_{u\to0^+}G_\Phi(u),\quad \beta_\Phi^0=\limsup_{u\to0^+}G_\Phi(u). \tag{3}$$

Если $F_\Phi(t)$ монотонна в некоторой окрестности справа от 0, то должен существовать предел $\lim\limits_{t\to0^+}F_\Phi$, который обозначим через C_Φ^0. Аналогичные параметры могут быть связаны с $\Psi(v)$. Й. Линденштраусс и Л. Цафрири [7], а также М. М. Рао и З. В. Рен [8] получили формулы

$$\frac{1}{A_\Phi^0}+\frac{1}{B_\Psi^0}=1=\frac{1}{A_\Psi^0}+\frac{1}{B_\Phi^0}, \tag{4}$$

$$2^{-1/A_\Phi^0}\le\alpha_\Phi^0\le\beta_\Phi^0\le 2^{-1/B_\Phi^0}. \tag{5}$$

Автором в [9] установлено, что

$$2\alpha_\Phi^0\beta_\Psi^0=1=2\alpha_\Psi^0\beta_\Phi^0. \tag{6}$$

Эти соотношения играют важную роль в геометрии пространств Орлича и будут полезны в данной работе. Автором в [9] при изучении констант упаковок пространств последовательностей Орлича были введены следующие обобщенные параметры, которые будут использованы в разд. 3:

$$\alpha'_\Phi = \inf\left\{\frac{\Phi^{-1}(1/2k)}{\Phi^{-1}(1/k)} : k = 1, 2, \dots\right\}, \quad \beta'_\Psi = \sup\left\{\frac{\Psi^{-1}(1/2k)}{\Psi^{-1}(1/k)} : k = 1, 2, \dots\right\}. \tag{7}$$

$$\tilde{\alpha}_\Phi = \inf\left\{\frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(2u)} : 0 < u \le \frac{1}{2}\right\}, \tag{8}$$

$$\alpha^*_\Phi = \inf\left\{\frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(2u)} : 0 < u \le \frac{1}{2}(Q_\Phi - 1)\right\}, \tag{9}$$

где

$$Q_\Phi = \sup_{\|x\|_\Phi = 1}\left\{k > 1 : \|x\|_\Phi = \frac{1}{k}[1 + \rho_\Phi(kx)]\right\}. \tag{10}$$

2. Формулы для углов Рисса

Теорема 1. *Пусть Φ — N-функция, $\Phi \in \Delta_2(0)$. Тогда угол Рисса пространства последовательностей Орлича $l^{(\Phi)}$, снабженного нормой Люксембурга, представим в виде*

$$a(l^{(\Phi)}) = \sup\{k_x : \rho_\Phi(x/k_x) = 1/2,\ x \in S(l^{(\Phi)})\}. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим правую часть в равенстве (11) через d. Для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots) \in S(l^{(\Phi)})$ положим $y = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots)$, $z = (0, x_1, 0, x_2,\ 0, x_3, \dots)$. Тогда $\|y\|_{(\Phi)} = \|z\|_{(\Phi)} = 1$, $|y| \wedge |z| = 0$ и $\|(|y| \vee |z|)\|_{(\Phi)} = \|y + z\|_{(\Phi)}$. Так как $\Phi \in \Delta_2(0)$, имеем

$$1 = \rho_\Phi\left(\frac{y + z}{\|y + z\|_{(\Phi)}}\right) = 2\rho_\Phi\left(\frac{x}{\|(|y| \vee |z|)\|_{(\Phi)}}\right).$$

Это означает, что для любого $x \in S(l^{(\Phi)})$ найдется $k_x = \|(|y| \vee |z|)\|_{(\Phi)}$ такое, что $\rho_\Phi(x/k_x) = 1/2$. По лемме 1

$$a(l^{(\Phi)}) \ge \sup\{k_x : \rho_\Phi(x/k_x) = 1/2,\ x \in S(l^{(\Phi)})\} = d.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x, y \in S(l^{(\Phi)})$, $|x| \wedge |y| = 0$, такие, что

$$\|(|y| \vee |z|)\|_{(\Phi)} > a(l^{(\Phi)}) - \varepsilon.$$

Поскольку

$$\rho_\Phi((|x| \vee |y|)/d) = \rho_\Phi(x/d) + \rho_\Phi(y/d) \le 1/2 + 1/2 = 1,$$

получаем

$$\|(|x| \vee |y|)/d\|_{(\Phi)} \le 1,$$

откуда $\||x| \vee |y|\|_{(\Phi)} \le d$. Следовательно, $d \ge a(l^{(\Phi)}) - \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $d \ge a(l^{(\Phi)}) - \varepsilon$. Значит, $a(l^{(\Phi)}) = d$. $\square$

Для получения выражения для $a(l^\Phi)$, если пространства снабжены нормой Орлича, нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть Φ — N-функция, $\Phi \in \Delta_2(0)$. Тогда для каждых $x \in S(l^\Phi)$ и $k > 1$ существует единственное $d_{x,k} > 1$ такое, что*

$$\rho_\Phi(kx/d_{x,k}) = (k-1)/2.$$

Доказательство. Функция $\rho_\Phi(kx/d)$ как функция от d непрерывна и строго убывает. Поскольку

$$\rho_\Phi(kx) \geq \|kx\|_\Phi - 1 = k - 1 > (k-1)/2$$

и $\lim\limits_{d\to\infty} \rho_\Phi(kx/d) = 0 < (k-1)/2$, когда $\Phi \in \Delta_2(0)$, существует единственное $d_{x,k}$ такое, что $\rho_\Phi(kx/d_{x,k}) = (k-1)/2$. $\square$

Теорема 2. *Пусть Φ — N-функция, $\Phi \in \Delta_2(0)$. Тогда угол Рисса пространства последовательностей Орлича l^Φ, снабженного нормой Орлича, имеет вид*

$$a(l^\Phi) = \sup_{\|x\|=1} \inf_{k>1} \{d_{x,k} : \rho_\Phi(kx/d_{x,k}) = (k-1)/2\}. \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим

$$d = \sup_{\|x\|=1} \inf_{k>1} \{d_{x,k} : \rho_\Phi(kx/d_{x,k}) = (k-1)/2\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ найдутся $x \in l^\Phi$, $\|x\|_\Phi = 1$, и $k > 1$ такие, что $d_{x,k} \geq d - \varepsilon$. Пусть $y = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$, $z = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$. Очевидно, что $\|y\|_\Phi = \|z\|_\Phi = 1$, $|y| \vee |z| = 0$, и

$$\begin{aligned}\inf_{k>1} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\Phi\left(\frac{k(|y| \vee |z|)}{d-\varepsilon}\right)\right] &= \inf_{k>1} \frac{1}{k}\left[1 + 2\rho_\Phi\left(\frac{kx}{d-\varepsilon}\right)\right] \\ &> \inf_{k>1} \frac{1}{k}\left[1 + 2\rho_\Phi\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right)\right] = \inf_{k>1} \frac{1}{k}\left(1 + 2 \cdot \frac{k-1}{2}\right) = 1.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{(|y| \vee |z|)}{d-\varepsilon}\right\|_\Phi \\ &\quad = \min\left\{\inf_{0<k\leq 1} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\Phi\left(\frac{k(|y| \vee |z|)}{d-\varepsilon}\right)\right],\ \inf_{k>1} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\Phi\left(\frac{k(|y| \vee |z|)}{d-\varepsilon}\right)\right]\right\} \\ &\quad \geq \min\left\{1, \inf_{k>1} \frac{1}{k}\left[1 + \rho_\Phi\left(\frac{k(|y| \vee |z|)}{d-\varepsilon}\right)\right]\right\} = 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $\|(|y| \vee |z|)\|_\Phi \geq d - \varepsilon$. Ввиду произвольности ε и определения $a(X)$ имеем $a(l^\Phi) \geq d$.

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $x, y \in S(l^\Phi)$, $|x| \wedge |y| = 0$, такие, что $\|(|x| \vee |y|)\|_\Phi > a(l^\Phi) - \varepsilon$. По определению d и лемме 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $k > 1$, $d_{x,k} < d + \varepsilon$ и $h > 1$, $d_{y,h} < d + \varepsilon$, для которых

$$\rho_\Phi\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right) = \frac{k-1}{2}, \quad \rho_\Phi\left(\frac{hy}{d_{y,h}}\right) = \frac{h-1}{2}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $k \geq h > 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(|x| \vee |y|)}{d+\varepsilon}\right\|_{\Phi} &\leq \frac{1}{h}\left[1+\rho_{\Phi}\left(\frac{h(|x| \vee |y|)}{d+\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{h}\left[1+\rho_{\Phi}\left(\frac{hx}{d+\varepsilon}\right)+\rho_{\Phi}\left(\frac{hy}{d+\varepsilon}\right)\right] \\ &= \frac{1}{h}+\frac{1}{h}\rho_{\Phi}\left(\frac{hx}{d+\varepsilon}\right)+\frac{1}{h}\rho_{\Phi}\left(\frac{hy}{d+\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{h}+\frac{1}{k}\rho_{\Phi}\left(\frac{kx}{d+\varepsilon}\right)+\frac{1}{h}\rho_{\Phi}\left(\frac{hy}{d+\varepsilon}\right) \\ &\leq \frac{1}{h}+\frac{1}{k}\rho_{\Phi}\left(\frac{kx}{d_{x,k}}\right)+\frac{1}{h}\rho_{\Phi}\left(\frac{hy}{d_{y,h}}\right) \\ &= \frac{1}{h}+\frac{1}{k}\frac{k-1}{2}+\frac{1}{h}\frac{h-1}{2} = \frac{3}{2h}+\frac{1}{2k}-1 < 1.\end{aligned}$$

Отсюда $\|(|x| \vee |y|)\|_{\Phi} \leq d+\varepsilon$ и $a(l^{\Phi}) < d+2\varepsilon$, значит, $a(l^{\Phi}) \leq d$ ввиду произвольности ε. $\square$

3. Вычисление углов Рисса

Здесь мы выведем формулу для вычисления углов Рисса. Идея доказательства восходит к работе автора [9], в которой он изучал нахождение сферических констант упаковок для пространств последовательностей Орлича.

Теорема 3. *Пусть Φ — N-функция, $\Phi \in \Delta_2(0)$. Тогда*

$$\max(1/\alpha'_{\Phi}, 1/\alpha^0_{\Phi}) \leq a(l^{(\Phi)}) \leq 1/\tilde{\alpha}_{\Phi}. \tag{13}$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что

$$\frac{1}{\alpha^0_{\Phi}} \leq a(l^{(\Phi)}). \tag{14}$$

Ход доказательства аналогичен примененному в [8, лемма 2.2(i)]. Согласно определению α^0_{Φ} существует последовательность $1 > u_n \searrow 0$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{-1}(u_n)}{\Phi^{-1}(2u_n)} = \alpha^0_{\Phi}.$$

Для любого $0 < \varepsilon < 1$ подберем целое $n_0 \geq 1$ так, что $u_n < \varepsilon/2$ для $n \geq n_0$ и $[\Phi^{-1}(u_n)/\Phi^{-1}(2u_n)] < \alpha^0_{\Phi} + \varepsilon$. Для удобства положим $u_0 = u_{n_0}$. Тогда

$$2u_0 < \varepsilon, \quad \Phi^{-1}(2u_0) > \frac{\Phi^{-1}(u_0)}{\alpha^0_{\Phi}+\varepsilon}. \tag{15}$$

Пусть $k_0 = [\frac{1}{2u_0}]$ — целая часть $\frac{1}{2u_0}$. Тогда $k_0 \leq \frac{1}{2u_0} < k_0+1$ и тем самым $\frac{1}{2k_0} < \frac{u_0}{1-2u_0}$. Определим

$$x_0 = \Phi^{-1}(2u_0)\sum_{i=1}^{k_0} e_i, \quad y_0 = \Phi^{-1}(2u_0)\sum_{i=k_0+1}^{2k_0} e_i,$$

где $e_i = (\overbrace{0,\dots,0,1}^{i}, 0, 0, \dots)$. Легко видеть, что

$$\|x_0\|_{(\Phi)} = \|y_0\|_{(\Phi)} = \frac{\Phi^{-1}(2u_0)}{\Phi^{-1}(1/k_0)} \leq 1.$$

Из (15) вытекает, что

$$\|(|x_0| \vee |y_0|)\|_{(\Phi)} = \|x_0 + y_0\|_{(\Phi)} = \frac{\Phi^{-1}(2u_0)}{\Phi^{-1}(1/2k_0)} > \frac{\Phi^{-1}(u_0)}{(\alpha_\Phi^0 + \varepsilon)\Phi^{-1}(1/2k_0)}$$
$$> \frac{(1-2u_0)\Phi^{-1}(u_0/(1-2u_0))}{(\alpha_\Phi^0 + \varepsilon)\Phi^{-1}(1/2k_0)} > \frac{1-\varepsilon}{\alpha_\Phi^0 + \varepsilon},$$

так что (14) выполнено ввиду произвольности ε.

Теперь покажем, что

$$\frac{1}{\alpha'_\Phi} \le a(l^{(\Phi)}). \tag{16}$$

Для каждого $k \ge 1$ определим

$$Z_k = (0, 0, \dots, 0), \quad X_k = \Phi^{-1}(1/k)(1, 1, \dots, 1),$$

где $\dim Z_k = \dim X_k = k$. Положим $x_0 = (X_k, Z_k, Z_k, \dots)$, $y_0 = (Z_k, X_k, Z_k, \dots)$, тогда $\|x_0\|_{(\Phi)} = \|y_0\|_{(\Phi)} = 1$ и

$$\|(|x_0| \vee |y_0|)\|_{(\Phi)} = \frac{\Phi^{-1}(1/k)}{\Phi^{-1}(1/2k)}.$$

Поэтому

$$a(l^{(\Phi)}) \ge \sup\left\{\frac{\Phi^{-1}(1/k)}{\Phi^{-1}(1/2k)} : k = 1, 2, \dots\right\} = \frac{1}{\alpha'_\Phi}.$$

Отметим, что (16) доказано в [1, с. 347] при дополнительном предположении $\Phi(1) = 1$.

Осталось доказать, что

$$a(l^{(\Phi)}) \le \frac{1}{\tilde{\alpha}_\Phi}. \tag{17}$$

Рассмотрим индекс-функцию $G_\Phi(u)$ для $u > 0$, и пусть $t = \Phi^{-1}(2u)$. Тогда $u = \frac{1}{2}\Phi(u)$ и

$$\Phi\left\{G_\Phi\left[\frac{1}{2}\Phi(t)\right]t\right\} = \frac{1}{2}\Phi(t). \tag{18}$$

Для каждого $x = \{x(i)\} \in l^{(\Phi)}$, $\|x\|_{(\Phi)} = 1$, поскольку $\Phi \in \triangle_2(0)$, имеем

$$\rho_\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(|x(i)|) = 1,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\Phi(|x(i)|) \le \frac{1}{2}, \quad i \ge 1.$$

Следовательно,

$$\tilde{\alpha}_\Phi \le \frac{\Phi^{-1}(u_i)}{\Phi^{-1}(2u_i)} = G_\Phi(u_i) = G_\Phi\left[\frac{1}{2}\Phi(|x(i)|)\right],$$

когда $u_i = \frac{1}{2}\Phi(|x(i)|) \ne 0$. Отсюда вытекает, что

$$\rho_\Phi(\tilde{\alpha}_\Phi x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(\tilde{\alpha}_\Phi |x(i)|)$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \Phi\left\{G_\Phi\left[\frac{1}{2}\Phi(|x(i)|)\right]|x(i)|\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(|x(i)|) = \frac{1}{2}.$$

Если k_x удовлетворяет равенству $\rho_\Phi(x/k_x) = 1/2$, то $k_x \le 1/\tilde{\alpha}_\Phi$. Таким образом, ввиду теоремы 1 неравенство (17) выполнено. $\square$

Теорема 4. *Пусть $\Phi(u)$ — N-функция, $\Phi \in \Delta_2(0)$. Тогда*

$$\max\bigl(2\beta^0_\Psi, 2\beta'_\Psi\bigr) \le a(l^\Phi) \le \frac{1}{\alpha^*_\Phi}. \tag{19}$$

Доказательство. Согласно определению β^0_Ψ существует последовательность $1 > v_n \searrow 0$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}[\Psi^{-1}(v_n)/\Psi^{-1}(2v_n)] = \beta^0_\Psi.$$

Для каждого $0 < \varepsilon < 1/2$, выберем $v \in \{v_n : n \ge 1\}$ такое, что $2v < \varepsilon$ и

$$\frac{1}{\Psi^{-1}(2v)} > \frac{\beta^0_\Psi - \varepsilon}{\Psi^{-1}(v)}. \tag{20}$$

Пусть $k = [1/2v]$ — целая часть $(2v)^{-1}$, тогда $k \le (2v)^{-1} < k+1$. Положим

$$x = \frac{2v}{\Psi^{-1}(2v)}\sum_{i=1}^{k} e_i, \quad y = \frac{2v}{\Psi^{-1}(2v)}\sum_{i=k+1}^{2k} e_i.$$

В силу свойств N-функций для $u_2 \ge u_1 > 0$ имеем

$$\frac{u_2}{\Psi^{-1}(u_2)} \ge \frac{u_1}{\Psi^{-1}(u_1)},$$

так что

$$\|x\|_\Phi = \|y\|_\Phi = \frac{2v}{\Psi^{-1}(2v)}k\Psi^{-1}(1/k) \le 1.$$

С другой стороны, из (20) вытекает, что

$$\|(|x| \vee |y|)\|_\Phi = \|x+y\|_\Phi = \frac{2v}{\Psi^{-1}(2v)}2k\Psi^{-1}\left(\frac{1}{2k}\right)$$
$$> 2(\beta^0_\Psi - \varepsilon)\frac{v}{\Psi^{-1}(v)}2k\Psi^{-1}\left(\frac{1}{2k}\right) \ge 2(\beta^0_\Psi - \varepsilon)\frac{1}{2(k+1)\Psi^{-1}(1(2(k+1)))}2k\Psi^{-1}\left(\frac{1}{2k}\right)$$
$$> 2\bigl(\beta^0_\Psi - \varepsilon\bigr)k/(k+1) = 2\bigl(\beta^0_\Psi - \varepsilon\bigr)(1 - 1/(k+1)) > 2\bigl(\beta^0_\Psi - \varepsilon\bigr)(1-\varepsilon).$$

Таким образом, $a(l^\Phi) \ge 2\beta^0_\Psi$ ввиду произвольности ε.

Теперь покажем, что $a(l^\Phi) \ge 2\beta'_\Psi$. Действительно, для любого фиксированного целого $k \ge 1$ пусть $Z_k = (0,0,\dots,0)$ и $X_k = [k\Psi^{-1}(\frac{1}{k})]^{-1}(1,1,\dots,1)$, где $\dim Z_k = \dim X_k = k$. Положим

$$x_0 = (X_k, Z_k, Z_k, \dots), \quad y_0 = (Z_k, X_k, Z_k, \dots).$$

Тогда $\|x_0\|_\Phi = \|y_0\|_\Phi = 1$ и

$$\|(|x_0| \vee |y_0|)\|_\Phi = \frac{2\Psi^{-1}(1/2k)}{\Psi^{-1}(1/k)}.$$

Поэтому

$$a(l^{(\Phi)}) \ge \sup\left\{\frac{2\Psi^{-1}(1/2k)}{\Psi^{-1}(1/k)} : k = 1,2,\dots\right\} = 2\beta'_\Psi.$$

Для доказательства правого неравенства в (19) рассмотрим $G_\Phi(u)$ из доказательства теоремы 3. Тогда $\Phi[G_\Phi(u)\Phi^{-1}(2u)] = u$. Для любого $x = (x(i)) \in$

$S(l^\Phi)$ найдется $k>1$ такое, что $1=\|x\|_\Phi=\frac{1}{k}(1+\rho_\Phi(kx))$. Пусть $u_i=\frac{1}{2}\Phi(k|x(i)|)$, $x(i)\neq 0$. Тогда

$$\Phi(k|x(i)|)\le \rho_\Phi(kx)=k-1\le Q_\Phi-1.$$

Поэтому $u_i\le \frac{1}{2}(Q_\Phi-1)$. Согласно определению α^*_Φ получаем

$$\alpha^*_\Phi\le \frac{\Phi^{-1}(u_i)}{\Phi^{-1}(2u_i)}=G_\Phi(u_i)$$

для любого $u_i\neq 0$. Таким образом,

$$\rho_\Phi\left(\frac{kx}{1/\alpha^*_\Phi}\right)=\rho_\Phi(\alpha^*_\Phi kx)=\sum_{i=1}^\infty \Phi(\alpha^*_\Phi k|x(i)|)$$
$$\le \sum_{i=1}^\infty \Phi[G_\Phi((1/2)\Phi(k|x(i)|))k|x(i)|]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty \Phi(k|x(i)|)=\frac{k-1}{2},$$

что, очевидно, приводит к неравенству $d_{x,k}\le \frac{1}{\alpha^*_\Phi}$. Взяв супремум по множеству $\|x\|_\Phi=1$, выводим, что

$$a(l^\Phi)\le \frac{1}{\alpha^*_\Phi}.$$

Доказательство закончено. □

Следствие 1. *Пусть Φ — N-функция такая, что $\Phi\in\Delta_2(0)$. Тогда*
(i) [1, c. 347; 3, c. 118] $\Phi\in\nabla_2(0)$ *тогда и только тогда, когда* $a(l^{(\Phi)})<2$;
(ii) $\Phi\in\nabla_2(0)$ *тогда и только тогда, когда* $a(l^\Phi)<2$.

Доказательство. В самом деле, если $\Phi\notin\nabla_2(0)$, то $\alpha^0_\Phi=\frac{1}{2}$ и ввиду (14) имеем $2\le a(l^{(\Phi)})$, откуда $a(l^{(\Phi)})=2$, так как $a(l^{(\Phi)})\le 2$ выполнено всегда. С другой стороны, если $\Phi\in\nabla_2(0)$, то $\frac{1}{2}<\alpha^0_\Phi$. Отметим, что $[\Phi^{-1}(u)/\Phi^{-1}(2u)]>\frac{1}{2}$ для $0<u\le\frac{1}{2}$, поэтому $\tilde{\alpha}_\Phi>\frac{1}{2}$, следовательно, $a(l^{(\Phi)})<2$ ввиду (13).

Аналогично если $\Phi\notin\nabla_2(0)$, то $\Psi\notin\triangle_2(0)$, поэтому $\beta^0_\Psi=1$. Тем самым $a(l^\Phi)=2$ по теореме 3. Если $\Phi\in\nabla_2(0)$, то Q_Φ в (10) — конечное число (см. [10]), откуда $a(l^\Phi)<2$ согласно (19). □

В общем случае непросто получить функцию Φ^{-1}, обратную к N-функции Φ. Следующее утверждение для индекс-функций N-функций в (1), найденное автором [9], решает эту проблему и будет полезно для нахождения или оценки углов Рисса.

(A) $F_\Phi(t)$ возрастающая (убывающая) на $(0,\Phi^{-1}(u_0)]$ тогда и только тогда, когда $G_\Phi(c,u)$ возрастающая (убывающая) на $(0,\frac{u_0}{c}]$ для каждого $c>1$.

(B) $F_\Phi(t)$ возрастающая (убывающая) на $(0,\psi(C)]$ тогда и только тогда, когда $F_\Psi(s)$ возрастающая (убывающая) на $(0,C]$.

(C) Обозначим $b^*_\Psi=\sup\{F_\Psi(s): s\in(0,1]\}$. Тогда для Q_Φ имеет место оценка

$$Q_\Phi\le b^*_\Psi. \tag{21}$$

Следовательно, мы приходим к следующему результату для нахождения углов Рисса.

Теорема 5. *Для N-функции $\Phi\in\triangle_2(0)$ выполнены следующие утверждения:*

(i) *если* $F_\Phi(t)=\frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$ *возрастающая на* $(0,\Phi^{-1}(1)]$, *то*

$$a(l^{(\Phi)})=2^{1/C^0_\Phi}, \tag{22}$$

где $C^0_\Phi = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$;

(ii) *если* $F_\Phi(t)$ *убывающая на* $(0, \Phi^{-1}(1)]$, *то*

$$a(l^{(\Phi)}) = \frac{\Phi^{-1}(1)}{\Phi^{-1}(1/2)}. \tag{23}$$

Доказательство. (i) Если $F_\Phi(t)$ возрастает на $(0, \Phi^{-1}(1)]$, то предел $C^0_\Phi = \lim\limits_{t\to 0} F_\Phi(t)$ существует и $G_\Phi(u) = \frac{\Phi^{-1}(u)}{\Phi^{-1}(2u)}$ возрастает на $(0, 1/2]$, так что согласно (5)

$$\alpha'_\Phi = \alpha^0_\Phi = \lim_{u\to 0} G_\Phi(u) = 2^{-1/C^0_\Phi},$$

и теперь (22) вытекает из (13).

(ii) Если $F_\Phi(t)$ убывает на $(0, \Phi^{-1}(1)]$, то $G_\Phi(u)$ также убывает на $(0, 1/2]$. Поэтому

$$\alpha^0_\Phi \geq \alpha'_\Phi = \tilde{\alpha}_\Phi = G_\Phi(1/2) = \frac{\Phi^{-1}(1/2)}{\Phi^{-1}(1)}.$$

Таким образом, (23) вытекает из предыдущего и (13). Доказательство закончено. $\square$

Теорема 6. *Пусть* Φ, Ψ *— две взаимно дополнительные* N*-функции и* $\Phi \in \triangle_2(0)$. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если* $F_\Phi(t) = \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)}$ *возрастающая на* $(0, \Phi^{-1}(b^*_\Psi - 1)]$, *то*

$$a(l^\Phi) = 2^{1/C^0_\Phi}. \tag{24}$$

(ii) *если* $F_\Phi(t)$ *убывающая на* $(0, \psi[\Psi^{-1}(1)]]$, *то*

$$\frac{2\Psi^{-1}(1/2)}{\Psi^{-1}(1)} \leq a(l^\Phi) \leq \frac{\psi[\Psi^{-1}(1)]}{\Phi^{-1}\{(1/2)\Phi(\psi[\Psi^{-1}(1)])\}}. \tag{25}$$

Доказательство. (i) В силу (21) $F_\Phi(t)$ также возрастает на $(0, \Phi^{-1}(Q_\Phi - 1)]$, тогда $G_\Phi(u)$ возрастает на $(0, \frac{1}{2}(Q_\Phi - 1)]$. Поэтому (24) имеет место по тем же причинам, что и (22).

(ii) В силу утверждения (B), предшествующего теореме 5,

$$F_\Psi(s) = \frac{s\psi(s)}{\Psi(s)}$$

возрастает на $(0, \Psi^{-1}(1)]$. Из (A) вытекает, что

$$G_\Psi(v) = \frac{\Psi^{-1}(v)}{\Psi^{-1}(2v)}$$

возрастает на $(0, 1/2]$ и $G_\Phi(u)$ убывает на $(0, \frac{1}{2}\Phi(\psi[\Psi^{-1}(1)])]$, откуда

$$\begin{aligned} b^*_\Psi = [F_\Psi(s)]_{s=\Psi^{-1}(1)} &= \Psi^{-1}(1)\psi[\Psi^{-1}(1)] \\ &= \Phi\{\psi[\Psi^{-1}(1)]\} + \Psi[\Psi^{-1}(1)] = \Phi\{\psi[\Psi^{-1}(1)]\} + 1, \end{aligned}$$

т. е.

$$b^*_\Psi - 1 = \Phi\{\psi[\Psi^{-1}(1)]\}.$$

Следовательно,

$$(0, (1/2)(Q_\Phi - 1)] \subset (0, (1/2)(b^*_\Psi - 1)] = (0, (1/2)\Phi(\psi[\Psi^{-1}(1)])].$$

Поскольку $G_\Phi(u)$ убывает, имеем

$$\alpha^*_\Phi = \frac{\Phi^{-1}\{\frac{1}{2}(Q_\Phi - 1)\}}{\Phi^{-1}(Q_\Phi - 1)} \geq \frac{\Phi^{-1}\{\frac{1}{2}\Phi(\psi[\Psi^{-1}(1)])\}}{\psi[\Psi^{-1}(1)]}.$$

По теореме 4

$$a(l^\Phi) \leq \frac{1}{\alpha^*_\Phi} \leq \frac{\psi[\Psi^{-1}(1)]}{\Phi^{-1}\{\frac{1}{2}\Phi(\psi[\Psi^{-1}(1)])\}}. \tag{26}$$

С другой стороны, так как $G_\Psi(v)$ возрастает на $(0, 1/2]$, то

$$a(l^\Phi) \geq \max(2\beta^0_\Psi, 2\beta'_\Psi) = 2\beta'_\Psi = \frac{2\Psi^{-1}(1/2)}{\Psi^{-1}(1)}. \tag{27}$$

Наконец, (25) вытекает из (26) и (27). $\square$

Замечание. Благодаря теоремам 5 и 6 вычисление углов Рисса пространств последовательностей Орлича становится реальным и несложным. Простой пример дает пространство l^p $(p > 0)$, порожденное N-функцией $\Phi(u) = |u|^p$. Поскольку $F_\Phi(t) \equiv p$, имеем

$$a(l^p) = 2^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < \infty). \tag{28}$$

Другим примером может служить пара N-функций

$$M(u) = e^{|u|} - |u| - 1, \quad N(v) = (1 + |v|)\ln(1 + |v|) - |v|.$$

Легко проверить, что индекс-функция F_M возрастает на $(0, +\infty)$, когда F_N убывает на $(0, +\infty)$. Тогда мы приходим к углам Рисса пространств последовательностей Орлича, ими порожденными:

$$a(l^{(M)}) = \sqrt{2}, \quad a(l^{(N)}) = \frac{N^{-1}(1)}{N^{-1}(1/2)} \approx 1.487; \tag{29}$$

$$a(l^M) = \sqrt{2}, \quad 1.496 \leq a(l^N) \leq 1.498. \tag{30}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borwein J. M., Sims B.* Non-expansive mappings on Banach lattices and related topics // Houston J. Math. 1984. V. 10. P. 339–356.
2. *Benavides T. D., Rodriguez R. J.* Some geometric coefficients in Orlicz sequence spaces // Nonlinear Anal. 1993. V. 20. P. 349–358.
3. *Chen S. T.* Geometry of Orlicz Spaces. Dissertationes Mathematicae. Warszawa, 1996.
4. *Cui Y. A., Hudzik H.* On the García-Falset Coefficient in Orlicz Sequence spaces Equipped with the Orlicz Norm // Function Spaces and Applications. New Delhi, India: Narosa Publ. House, 2000. P. 60-68.
5. *Симоненко И. Б.* Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Мат. сб. 1964. Т. 63. С. 536–553.
6. *Семенов Е. М.* Новая интерполяционная теорема // Функцион. анализ и прил. 1968. Т. 2, № 2. С. 68–80.
7. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces (I), (II). Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl, 1977, 1979.
8. *Rao M. M., Ren Z. D.* Packing in Orlicz sequence spaces // Studia Math. 1997. V. 126. P. 235–251.
9. *Yan Y. Q.* Some results on packing in Orlicz sequence spaces // Studia Math. 2001. V. 147. P. 73–88.

10. *Yan Y. Q.* On a pair of geometric parameters of Orlicz norm // Comment. Math. Pol. 2001. V. 41. P. 257–263.

Статья поступила 12 апреля 2001 г.,
окончательный вариант — 11 сентября 2002 г.

Ян Якъян (Yan Yaqiang)
Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou 215006, P. R. China
yanyq@pub.sz.jsinfo.net