Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 514.17

ДВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВА НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В. К. Ионин

Аннотация: Строятся два примера пространств, гомеоморфных $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), в каждом из которых существует замкнутая геодезическая и не выполняется никакое изопериметрическое неравенство. Первое пространство — полное пространство с многогранной метрикой неположительной кривизны, а второе — неполное риманово пространство с неположительными секционными кривизнами.

Ключевые слова: метрика, симплекс, грань, кривизна, многообразие, геодезическая, пространство.

§ 1. Основные определения и формулировка результатов

1.1. Метрическое пространство *имеет внутреннюю метрику* в смысле А. Д. Александрова [1, с. 10], если расстояние между двумя его точками есть точная нижняя граница длин спрямляемых кривых, соединяющих эти точки. Если подмножество M' метрического пространства M таково, что любые две его точки можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в M', то M' можно оснастить внутренней метрикой следующим образом: за расстояние между любыми двумя точками множества M' принимается точная нижняя граница длин всех спрямляемых кривых, лежащих в M' и соединяющих данные точки. Эта метрика является внутренней и называется *метрикой пространства M', порожденной объемлющим пространством M*.

1.2. Выпуклая оболочка точек $X_0, \dots, X_k$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, где $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, называется *k-мерным симплексом с вершинами в $X_0, \dots, X_k$*, если эти точки не лежат на одной $(k-1)$-мерной плоскости, при этом (-1)-*мерной плоскостью* называется пустое множество $\varnothing$. Будем считать, что пустое множество является также и (-1)-мерным симплексом. Каждое подмножество вершин симплекса Δ является множеством вершин некоторого симплекса, называемого *гранью* симплекса Δ. Таким образом, пустое множество есть (-1)-мерная грань каждого симплекса. Любой симплекс есть метрическое пространство с внутренней метрикой, порожденной метрикой объемлющего евклидова пространства. Будем называть *k-мерным симплексом* также любое метрическое пространство, изометричное какому-нибудь k-мерному симплексу пространства $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00194).

1.3. Полное метрическое пространство M с внутренней метрикой называется *n-мерным* ($n \geq 2$) *пространством с многогранной метрикой*, если оно является n-мерным многообразием с краем (случай, когда край — пустое множество, не исключается), причем каждая точка $X \in M$ имеет окрестность, замыкание которой есть объединение конечного множества n-мерных симплексов, причем пересечение любых двух симплексов из этого множества является их общей k-мерной гранью. Каждое n-мерное пространство с многогранной метрикой можно разбить разными способами на конечное или счетное множество симплексов, объединение которых совпадает со всем M, а пересечение любых двух является их общей k-мерной ($-1 \leq k \leq n-1$) гранью. Каждый n-мерный симплекс и n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — простейшие примеры пространств с многогранной метрикой.

1.4. Пусть M — n-мерное ($n \geq 2$) пространство с многогранной метрикой. Положим, что кривизна точки $X \in M$ равняется нулю (в записи $\omega(X) = 0$), если X имеет открытую окрестность, изометричную некоторой области евклидова пространства. Определим кривизну $\omega(X)$ внутренней точки X многообразия M также в случае, когда M допускает такое разбиение на симплексы, при котором X — внутренняя точка некоторого ($n-2$)-мерного симплекса σ. К этому симплексу σ примыкает конечное множество n-мерных симплексов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Обозначим через θ_i величину угла симплекса Δ_i, примыкающего к симплексу σ. Положим, что $\omega(X) = 2\pi - \sum\limits_{i=1}^{m} \theta_i$. Будем говорить, что M — *пространство неположительной кривизны*, если из того, что в точке $X \in M$ определена кривизна, следует, что $\omega(X) \leq 0$. Это определение корректно, ибо, как легко видеть, оно не зависит от разбиения M на симплексы.

Из хорошо известных результатов [2, с. 19] следует утверждение: если пространство M гомеоморфно двумерной евклидовой плоскости и является пространством с многогранной метрикой неположительной кривизны или римановым пространством неположительной кривизны, то в нем справедливо евклидово изопериметрическое неравенство и не существует ни одной замкнутой геодезической. В статье [3] доказывается, что это утверждение не распространяется на пространства более высоких размерностей. Здесь будут усилены результаты этой статьи. В [3] приводятся примеры пространств, в которых не выполняются евклидовы изопериметрические неравенства, но выполняются другие, более слабые, неравенства; здесь же будут построены примеры пространств, в которых не выполняются никакие изопериметрические неравенства. Точнее говоря, будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого натурального $n \geq 3$ существует пространство M с многогранной метрикой неположительной кривизны, удовлетворяющее условиям:*

а) *M гомеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$;*

б) *в M существует замкнутая геодезическая;*

в) *для любых чисел $f > 0$ и $v > 0$ в M существует такое гомеоморфное замкнутому шару тело T, что его объем больше v, а площадь границы меньше f.*

Теорема 2. *Для любого натурального $n \geq 3$ существует такое неполное риманово пространство M, все секционные кривизны которого неположительны, что выполняются условия* а), б) *и* в) *теоремы* 1.

1.5. Если в пространстве с внутренней метрикой две точки X и Y соединяются единственной кратчайшей, то эту кратчайшую будем называть *отрезком* *с концами в точках* X, Y и обозначать через $[X, Y]$ или $[Y, X]$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

2.1. Склеивание пространств. Пусть M — топологическое пространство, а $\{M_i\}_{i \in J}$ — семейство топологических пространств, причем $M \cap M_i = \varnothing$, $M_i \cap M_j = \varnothing$ для всех $i, j \in J$, $i \neq j$. Пусть существуют подпространства $M_i' \subset M_i$ и $M_i'' \subset M$ ($M_i'' \cap M_j'' = \varnothing$ для всех $i, j \in J$, $i \neq j$) и гомеоморфизм $f_i : M_i' \to M_i''$ для каждого $i \in J$. Отождествляя по гомеоморфизму f_i для всех $i \in J$ соответствующие точки пространств M_i' и M_i'', получим из M и $\{M_i\}_{i \in J}$ некоторое топологическое пространство M^*. Для каждого $i \in J$ следующим образом задается каноническое отображение $g_i : M_i \to M^*$: если $X \in M_i \backslash M_i'$, то $g_i(X) = X$; если же $X \in M_i'$, то $g_i(X) = (X, f_i(X))$. Будем говорить, что пространство M^* получено *приклеиванием* к пространству M пространств семейства $\{M_i\}_{i \in J}$ по гомеоморфизмам f_i.

В дальнейшем, чтобы не усложнять обозначений, не будем отличать произвольное множество $M' \subset M_i$ от множества $g_i(M') \subset M^*$, в частности, будем считать каждое пространство семейства $\{M_i\}_{i \in J}$ подпространством пространства M^*.

Допустим, что множества M, M_i, M_i' и M_i'' для всех $i \in J$ оснащены внутренними метриками, согласованными с их топологиями, причем метрики пространств M_i' и M_i'' порождены соответствующими объемлющими пространствами; допустим также, что гомеоморфизм f_i является изометрическим отображением для всех $i \in J$. В этом случае пространство M^* естественно оснащается внутренней метрикой следующим образом. Кривую $\gamma \subset M^*$, гомеоморфную вещественному отрезку $[0, 1]$, назовем *элементарной*, если она целиком принадлежит пространству M или одному из пространств семейства $\{M_i\}_{i \in J}$ и спрямляема в этом пространстве. Кривую $\gamma \subset M^*$ назовем *допустимой*, если она состоит из конечного множества элементарных кривых, причем любые две элементарные кривые из этого множества имеют не более одной общей точки, являющейся их общим концом. Сумма длин элементарных кривых, составляющих допустимую кривую γ, называется ее *длиной* и обозначается через $l(\gamma)$. Очевидно, что любые две различные точки p, $q \in M^*$ можно соединить допустимой кривой; точная нижняя граница длин этих кривых называется *расстоянием* между p и q в M^*.

2.2. Пространство A. Два многообразия $A' = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} A_m'$ и $A'' = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} A_m''$, где

$$A_m' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid m \leq x_1 \leq m+1,\ -(m+1)(m - x_1) \leq x_2\},$$
$$A_m'' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid m \leq -x_1 \leq m+1,\ -(m+1)(m + x_1) \leq x_2\},$$

изометричны относительно многогранных метрик, порожденных объемлющим пространством $\mathbb{R}^2$. Положим, что пространство A получается приклеиванием к A' пространства A'' по изометрическому отображению f края A'' на край A'. Очевидно, что пространство A гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ и имеет многогранную метрику.

Обозначим через P_m и Q_m точки пространства A, получающиеся при отождествлении точек $(m, 0)$ и $(-m, 0)$ и соответственно точек $(m+1, m+1)$ и $(-m-1, m+1)$. Нетрудно видеть, что для каждой точки $X \in A$ с ненулевой кривизной найдется такое число $m \geq 0$, что $X = P_m$ или $X = Q_m$. Ясно также, что

$$\omega(P_m) = -\omega(Q_m) = 2\left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{m+1}\right).$$

Последние равенства можно считать еще одним определением точек P_m и Q_m.

Обозначим через Γ ломаную, в которую переходят края многообразий A' и A'' при канонических отображениях A' в A и A'' в A. Ломаная Γ, как легко видеть, состоит из луча (обозначим его через Λ), выходящего из точки P_0, и отрезков $[P_m, Q_m]$ и $[Q_m, P_{m+1}]$ для всех целых $m \geq 0$.

2.3. Пространство B зададим как прямое произведение $A \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ — множество всех неотрицательных чисел) с метрикой ρ_B, определенной равенством

$$\rho_B((X,s),(Y,t)) = \sqrt{\rho_A^2(X,Y) + (s-t)^2},$$

где $X, Y \in A$; $s, t \in \mathbb{R}_+$; ρ_A — метрика пространства A.

Очевидны следующие утверждения:

а) B — пространство с многогранной метрикой, гомеоморфное трехмерному евклидову полупространству

$$\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq 0\};$$

б) для каждого $s \in \mathbb{R}_+$ пространство $A \times \{s\}$ изометрично A;

в) в каждой точке $(X, s) \in B$ определена кривизна, не зависящая от s; если эта кривизна отличается от нуля, то $X = P_m$ или $X = Q_m$ для некоторого целого $m \geq 0$.

Замечание. В дальнейшем точку $(X, 0) \in B$ будем обозначать одним символом X.

2.4. Пространство C. На отрезке $[P_m, Q_m] \subset B$ для всех целых $m \geq 0$ зафиксируем точку P'_m так, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_B(P_m, Q_m) = (m+3)\rho_B(P_m, P'_m).$$

Обозначим через M пополнение (*пополнением метрического пространства* называется наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное) пространства $B \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \Pi_m$, где Π_m — объединение отрезков $[(P_m, s), (P'_m, s)]$ по всем $s > 0$. Ясно, что M не многообразие и имеет внутреннюю метрику. Точка пространства M, имеющая окрестность, гомеоморфную открытой области трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, называется *внутренней*. Множество граничных точек (т. е. точек, отличных от внутренних) распадается на счетное множество связных компонент; компоненту, содержащую точку P_m, обозначим через M''_m. Очевидно, что M''_m имеет многогранную метрику и гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ для всех $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Из евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ удалим множество, изометричное Π_m, а оставшееся пространство с внутренней метрикой, порожденной объемлющим пространством $\mathbb{R}^3$, пополним до некоторого полного пространства $\mathbb{R}^3_m$. Пусть $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — семейство метрических пространств такое, что C_m изометрично $\mathbb{R}^3_m$, $M \cap C_m = \varnothing$, $C_m \cap C_k = \varnothing$ для всех $m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$. Очевидно, что пространство C_m имеет многогранную метрику и гомеоморфно полупространству $\mathbb{R}^3_+$, причем существует изометрическое отображение f_m края C'_m многообразия C_m на M''_m. Обозначим через C пространство, полученное приклеиванием к пространству M пространств семейства $\{C_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ по изометрическим отображениям f_m. Имеют место следующие очевидные утверждения:

а) C — пространство с многогранной метрикой неположительной кривизны, гомеоморфное полупространству $\mathbb{R}^3_+$;

б) край многообразия C изометричен A;

в) для всех $m \in \mathbb{N}$ из точек P_m, P'_m и Q_m можно единственным образом провести соответственно три луча p_m, p'_m и q_m так, что кривизна пространства C в каждой внутренней точке любого из этих трех лучей отрицательна;

г) если $X \in p_m$, $X' \in p'_m$, ρ_C — метрика пространства C, $\rho_C(X, P_m) = \rho_C(X', P'_m) > 0$, то точки X и X' можно соединить двумя кратчайшими, объединение которых является замкнутой геодезической, состоящей из внутренних точек пространства C.

2.5. Пространство D. Пусть $\widetilde{C}$ — пространство, изометричное C, и $C \cap \widetilde{C} = \varnothing$. Положим по определению, что D получено приклеиванием к пространству C пространства $\widetilde{C}$ по изометрии их краев. Очевидно, что D — пространство с многогранной метрикой неположительной кривизны, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$ и содержащее замкнутую геодезическую. В этом пункте будет доказана теорема 1 при условии, что $n = 3$. Для этого достаточно доказать утверждение в) этой теоремы.

Доказательство. Построим сначала в пространстве B тело B_m для всех целых $m \geq 1$. Луч $p_m = \{P_m\} \times \mathbb{R}_+$ пространства B при построении пространств M и C естественным образом переходит в луч пространства M и C с тем же обозначением p_m. Это не приводит к недоразумению, так как всякий раз из контекста ясно, о каком луче идет речь. Аналогичное замечание можно сделать и относительно лучей p'_m и q_m. Положим, что

$$B_m = \{(X, t) \in B \mid \rho_B(X, P_m) \leq m^{\frac{2}{5}},\ 1 \leq t \leq 1 + m^{\frac{2}{5}}\}.$$

Так как $\rho_B(P_m, Q_m) > \rho_B(P_m, Q_{m-1}) = m$, то каждая внутренняя точка пространства B, не принадлежащая лучу p_m и удаленная от него не менее чем на m, имеет окрестность, изометричную открытой области евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Легко вычислить, что

$$v(B_m) = m^{\frac{6}{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{m+1}, \quad f(B_m) = 4m^{\frac{4}{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{m+1},$$

где $v(B_m)$ и $f(B_m)$ — объем и площадь поверхности тела B_m соответственно. Из последних равенств имеем

$$v(B_m) = m^{\frac{1}{5}} + o(m^{\frac{1}{5}}), \quad f(B_m) = 4m^{-\frac{1}{5}} + o(m^{-\frac{1}{5}}). \tag{1}$$

Теперь построим в пространстве D тело D_m для всех целых $m \geq 1$. Существует вложение множества всех внутренних точек пространства M в B. Это вложение единственным образом распространяется до некоторого непрерывного сюръективного отображения M на B. Прообраз тела B_m при этом отображении обозначим тем же символом B_m. Существуют канонические отображения M в C и M в D. Образ тела B_m при этих отображениях будем обозначать тем же символом B_m. Очевидно, что тело B_m в пространстве B гомеоморфно шару, а в пространствах M, C и D тело с тем же обозначением гомеоморфно заполненному тору. Легко видеть, что равенства (1) верны независимо от того, в каком из четырех пространств B, M, C или D находится тело B_m. Положим, что

$$D_m = (B_m \cup F) \backslash E,$$

где

$$E = \left\{X \in D \mid \rho_D(X, [X_1, P_m]) \leq \frac{1}{m+2}\right\},$$

$$F = \left\{ X \in D \mid \rho_D(X, [X_2, P_m]) \le \frac{1}{m+1} \right\},$$

$$X_1, X_2 \in p_m, \quad \rho_D(X_1, P_m) = 1 + m^{\frac{2}{5}}, \quad \rho_D(X_2, P_m) = 1.$$

Простые вычисления показывают, что

$$v(D_m) = m^{\frac{1}{5}} + o(m^{\frac{1}{5}}), \quad f(D_m) = 4m^{-\frac{1}{5}} + o(m^{-\frac{1}{5}}), \tag{2}$$

где $v(D_m)$ и $f(D_m)$ — объем и площадь поверхности тела D_m соответственно. Из (2) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} v(D_m) = \infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} f(D_m) = 0$, следовательно, в качестве тела T можно взять тело D_m для достаточно большого m. Теорема 1 доказана для $n = 3$.

2.6. Пусть $n \ge 4$. Проводя такие же построения, как и в п. 2.5, и заменяя только $m^{\frac{2}{5}}$ на $m^{\frac{2}{2n-1}}$, получим вместо тел B_m и D_m соответственно некоторые тела B'_m и D'_m, а вместо равенств (1) и (2) соответственно следующие равенства:

$$v(B'_m) = m^{\frac{7-2n}{2n-1}} + o(m^{\frac{7-2n}{2n-1}}), \quad f(B'_m) = m^{\frac{5-2n}{2n-1}} + o(m^{\frac{5-2n}{2n-1}}), \tag{3}$$

$$v(D'_m) = m^{\frac{7-2n}{2n-1}} + o(m^{\frac{7-2n}{2n-1}}), \quad f(D'_m) = m^{\frac{5-2n}{2n-1}} + o(m^{\frac{5-2n}{2n-1}}). \tag{4}$$

Обозначим через $[0, m^{\frac{2}{2n-1}}]^{n-3}$ $(n-3)$-кратное произведение отрезка $[0, m^{\frac{2}{2n-1}}]$ $(m \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ и рассмотрим тело $D''_m = D'_m \times [0, m^{\frac{2}{2n-1}}]^{n-3}$, находящееся в n-мерном пространстве $D \times \mathbb{R}^{n-3}$, имеющем, как легко видеть, многогранную метрику неположительной кривизны. Очевидно, что

$$v(D''_m) = v(D'_m) \cdot m^{\frac{2n-6}{2n-1}} = m^{\frac{1}{2n-1}} + o(m^{\frac{1}{2n-1}}), \tag{5}$$

где $v(D''_m)$ — объем тела D''_m. Найдем аналогичное равенство для величины $f(D''_m)$, равной площади поверхности тела D''_m. Введем обозначения: v_k и f_k — объем и площадь поверхности тела $D'_m \times [0,h]^k$ соответственно, где $h = m^{\frac{2}{2n-1}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-3\}$. Так как

$$v_0 = v(D'_m), \quad f_0 = f(D'_m), \quad v_{n-3} = v(D''_m), \quad f_{n-3} = f(D''_m),$$

$$v_{k+1} = hv_k, \quad f_{k+1} = 2v_k + hf_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-4\},$$

то, учитывая равенства (4), получим

$$f(D''_m) = (2n-5)m^{-\frac{1}{2n-1}} + o(m^{-\frac{1}{2n-1}}). \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} v(D''_m) = \infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} f(D''_m) = 0$, следовательно, в качестве тела T можно взять тело D''_m для достаточно большого m. Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Обозначим через L множество всех лучей $p \in D$, для каждого из которых справедливы утверждения:

а) существует такое целое число $m \ge 0$, что $P \in \{P_m, P'_m, Q_m\}$, где P — начало луча p;

б) если $P' \in p$ и $P' \ne P$, то $\omega(P') < 0$.

Для произвольного луча $p \in L$ зафиксируем точку $P' \in p$ и число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $P' \ne P$ и ε-окрестность луча p', начинающегося в P' и принадлежащего p, состояла из точек, удаленных от любого луча множества $L\backslash\{p\}$ больше чем на ε. Двумерный круг σ радиуса ε с центром в P', перпендикулярный лучу p, разбивает ε-окрестность луча p' на две области, одна из которых (обозначим ее через U_p) неограниченная. Положим, что $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4$, где $H_1 = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} [P_m, P'_m]$, $H_2 = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \{Q_m\}$, $H_3 = \bigcup\limits_{p\in L} [P, P']$, $H_4 = \bigcup\limits_{p\in L} \sigma$. Обозначим через Z_m и W_m компоненты связности множества H, содержащие соответственно отрезок $[P_m, P'_m]$ и точку Q_m. Очевидно, что $H = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} (Z_m \cup W_m)$.

3.2. Пространство E. Удалив из D открытые множества U_p для всех $p \in L$ и объявив одной точкой каждую компоненту связности множества H, получим некоторое пространство E с внутренней метрикой ρ_E, граница которого состоит из счетного множества многообразий, гомеоморфных евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Каждая внутренняя точка пространства E, как легко видеть, имеет окрестность, изометричную открытой области трехмерного евклидова пространства.

3.3. Пусть $p \in L$ и U_p — область, определенная в п. 3.1.

Введем в $\mathbb{R}^3\backslash\tau$, где τ — полуплоскость, определяемая соотношениями $x_1 \geq 0$, $x_2 = 0$, цилиндрическую систему координат (ρ, θ, x_3) так, чтобы соблюдались следующие равенства и неравенства:

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta, \quad 0 < \rho,\ 0 < \theta < 2\pi,\ -\infty < x_3 < +\infty.$$

Зададим в $\mathbb{R}^2\backslash\tau$ риманову метрику линейным элементом

$$ds^2 = d\rho^2 + \alpha^2 d\theta^2 + dx_3^2,$$

где

$$\alpha = \rho - \frac{\varepsilon\omega\beta(\rho)}{2\pi\beta(\varepsilon)}, \quad \beta(\rho) = \int\limits_0^{\rho} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \exp\left(-\frac{1}{\psi(\varepsilon-\psi)}\right) d\psi,$$

ε — число, определенное в п. 3.1; ω — кривизна пространства D в каждой внутренней точке луча p. Зададим на $\mathbb{R}^3$ внутреннюю метрику так, чтобы она порождала на множестве $\mathbb{R}^3\backslash\tau$ только что определенную риманову метрику. Сделать это можно единственным образом, при этом $\mathbb{R}^3$ превращается в риманово пространство класса C^∞ (обозначим его через $\widetilde{\mathbb{R}}^3$), в котором ось аппликат есть ось симметрии. Вычисления, проведенные, например, по формулам (15.8) и (25.9) из книги [4], показывают, что в $\widetilde{\mathbb{R}}^3$ все секционные кривизны неположительны, а в любой точке оси аппликат и в любой точке, удаленной от этой оси на расстояние ε, все секционные кривизны равны нулю.

3.4. Пространство F. Двумерный круг $\tilde{\sigma} \subset \widetilde{\mathbb{R}}^3$ радиуса ε с центром в точке $(0,0,0)$, перпендикулярный оси аппликат, разбивает ε-окрестность этой оси на две изометричные области. В замыкании одной из этих областей и в замыкании области U_p объявим соответственно одной точкой круги $\tilde{\sigma}$ и σ, а полученные пространства обозначим соответственно через $\widetilde{U}_p$ и U_p^*. Существует изометрическое отображение f_p края $\widetilde{U}_p$ на край U_p^*. Положим, что F получается приклеиванием к пространству E пространств семейства $\{\widetilde{U}_p\}_{p\in L}$ по изометрическим отображениям f_p. Ясно, что F — пространство с внутренней метрикой, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$.

Компактные множества Z_m и W_m пространства D естественным образом порождают соответственно точки z_m и w_m в пространстве F для всех целых

$m \geq 0$. Счетное множество $K = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{z_m, w_m\}$ замкнуто в F и состоит из изолированных точек. Каждая точка множества K является особой в том смысле, что любое открытое множество, пересекающееся с K, отличается от риманова пространства. Других особых точек в пространстве F нет, так как любая точка пространства $F' = F \setminus K$ имеет открытую окрестность, являющуюся римановым пространством, более того, каждая секционная кривизна этого пространства неположительна.

Каждому телу $D_m \subset D$ можно сопоставить тело $\widetilde{D}_m \subset F$ так, что при этом объем и площадь поверхности мало изменяется, говоря точнее, равенства (2) сохранятся после замены D_m на $\widetilde{D}_m$. Из этого легко выводится, что в пространстве F не выполняется никакое изопериметрическое неравенство. Наличие в F замкнутой геодезической очевидно.

3.5. Пространство G. Из каждой точки $X \in K$ проведем луч q, являющийся осью симметрии одного из множеств семейства $\{U_p^*\}_{p \in L}$, и обозначим через Q объединение всех этих лучей. Положим, что $G = F \setminus Q$.

Нетрудно видеть справедливость следующих утверждений:

а) G — риманово пространство, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$;

б) любая секционная кривизна пространства G неположительна;

в) G содержит замкнутую геодезическую;

г) в пространстве G не выполняется никакое изопериметрическое неравенство.

Из этих утверждений вытекает теорема 2 при $n = 3$. Перенос этой теоремы на случай $n > 3$ осуществляется так же, как и в теореме 1. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
2. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. М.: Наука, 1980.
3. *Ионин В. К.* Изопериметрические неравенства в односвязных римановых пространствах неположительной кривизны // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 2. С. 282–284.
4. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 30 января 2003 г.

Ионин Владимир Кузьмич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Vladimir_ionin@mtu-net.ru