Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.927.25

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Н. Б. Керимов, В. С. Мирзоев

Аннотация: Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в одном из граничных условий. Исследуется базисность в пространстве квадратично суммируемых функций системы собственных функций этого оператора.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, осцилляция, собственная функция, биортогональная система, базис.

Рассмотрим спектральную задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \tag{0.1}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{0.2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1), \tag{0.3}$$

где λ — спектральный параметр, $q(x)$ — действительнозначная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$ и $a_1, b_0, b_1, c_1, d_0, d_1$ — действительные постоянные.

Настоящая работа посвящена изучению базисных свойств в пространстве $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3).

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах (см., например, [1–12]). В работе [3] приведен список работ, в которых такие задачи рассматривались в связи с конкретными физическими задачами.

В [12] (см. также [9, 10]) детально исследована базисность в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad (a - \lambda)y'(1) - b\lambda y(1) = 0,$$

где a и b — положительные постоянные, $q(x)$ — непрерывная неотрицательная функция на промежутке $[0,1]$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $q(x)$ — действительнозначная непрерывная функция на промежутке $[0,1]$ и выполняется условие

$$|b_0| + |d_0| \neq 0, \quad \sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0. \tag{0.4}$$

Для изучения свойств базисности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3) в пространстве $L_2(0,1)$ необходимы осцилляционные свойства решений этой задачи.

Наряду с краевой задачей (0.1)–(0.3) рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{0.1$'$}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{0.2$'$}$$

$$y(1) = 0. \tag{0.3$'$}$$

Собственные значения краевой задачи (0.1$'$)–(0.3$'$), как и в [8], обозначим через λ_n^D $(n = 0, 1, \dots)$. В случае $c_1 \neq 0$ число N определим из неравенства

$$\lambda_{N-1}^D < -\frac{d_1}{c_1} \leq \lambda_N^D$$

(при этом предполагается, что $\lambda_{-1}^D = -\infty$).

Следующая теорема доказана в [8].

Теорема 0.1 [8, теорема 3.1 и следствие 5.2]. *Существует неограниченно возрастающая последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ краевой задачи* (0.1)–(0.3)*:*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots .$$

Кроме того,

(а) *если $c_1 \neq 0$, то собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, при $n \leq N$ имеет ровно n простых нулей, а при $n > N$ ровно $n-1$ простых нулей в интервале* $(0,1)$;

(в) *если $c_1 = 0$, то собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет ровно n простых нулей в интервале* $(0,1)$.

Известно [8, лемма 2.2], что если $n \geq 0$ и $\lambda \in \left(\lambda_{n-1}^D, \lambda_n^D\right]$, то каждое нетривиальное решение задачи (0.1$'$), (0.2$'$) имеет n простых нулей в интервале $(0,1)$. Отсюда и из теоремы 0.1 следует, что если $c_1 \neq 0$ и при некотором n имеет место $\lambda_n = -\frac{d_1}{c_1}$, то $\lambda_n = \lambda_{N+1} = \lambda_N^D = -\frac{d_1}{c_1}$.

1. О минимальности системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Теорема 1.1. *Пусть k_0 — произвольное фиксированное целое неотрицательное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots; n \neq k_0)$ является минимальной в пространстве $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Достаточно доказать существование системы $\{u_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots;\ n \neq k_0)$, являющейся биортогонально сопряженной к системе $\{y_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots; n \neq k_0)$ в $L_2(0,1)$.

Заметим, что при $0 \leq x \leq 1$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}\bigl(y_n(x)y_m'(x) - y_n'(x)y_m(x)\bigr) = (\lambda_n - \lambda_m)y_n(x)y_m(x).$$

Интегрируя это тождество по x в пределах от 0 до 1, получим

$$(\lambda_n - \lambda_m)(y_n, y_m) = \bigl(y_n(x)y_m'(x) - y_n'(x)y_m(x)\bigr)\Big|_0^1, \tag{1.1}$$

где (,) — скалярное произведение в пространстве $L_2(0,1)$.

Функция $y_k(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ удовлетворяет условиям

$$b_0 y_k(0) = d_0 y_k'(0), \tag{1.2}$$

$$(a_1\lambda_k + b_1) y_k(1) = (c_1\lambda_k + d_1) y_k'(1). \tag{1.3}$$

Поскольку $|b_0| + |d_0| \neq 0$, из условия (1.2) следует, что при всех $n, m = 0, 1, \dots$ справедливо равенство

$$y_n(0) y_m'(0) - y_n'(0) y_m(0) = 0. \tag{1.4}$$

Случай $c_1 \neq 0$. Пусть $\lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1}$ и $\lambda_m \neq -\frac{d_1}{c_1}$. Тогда из условия (1.3) следует, что

$$y_n(1) y_m'(1) - y_n'(1) y_m(1) = -\frac{\sigma(\lambda_n - \lambda_m) y_n(1) y_m(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)(c_1\lambda_m + d_1)}. \tag{1.5}$$

Предположим, что $\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$. Тогда в силу (1.3) имеет место равенство $y_{N+1}(1) = 0$. Отсюда при $m \neq N+1$ $(m = 0, 1, \dots)$ получим

$$y_{N+1}(1) y_m'(1) - y_{N+1}'(1) y_m(1) = -y_{N+1}'(1) y_m(1). \tag{1.6}$$

Из сопоставления (1.1), (1.4)–(1.6) следует, что при $m \neq n$ имеет место соотношение

$$(y_n, y_m) = \begin{cases} -\frac{\sigma y_n(1) y_m(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)(c_1\lambda_m + d_1)}, & \text{если } \lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1},\ \lambda_m \neq -\frac{d_1}{c_1}, \\ \frac{c_1 y_{N+1}'(1) y_m(1)}{c_1\lambda_m + d_1}, & \text{если } n = N+1,\ \lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Пусть $\lambda_{N+1} \neq -\frac{d_1}{c_1}$. Очевидно, что в этом случае $\lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1}$ при всех $n = 0, 1, \dots$. Элементы системы $\{u_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots;\ n \neq k_0)$ определим представлением

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{(c_1\lambda_{k_0} + d_1) y_n(1)}{(c_1\lambda_n + d_1) y_{k_0}(1)} \cdot y_{k_0}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{\sigma y_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}}, \tag{1.8}$$

где $\|f\|^2 = (f, f)$. На основании равенства (1.7) легко можно проверить, что

$$(u_n, y_m) = \delta_{n,m}, \tag{1.9}$$

где $n, m = 0, 1 \dots;\ n, m \neq k_0$ и $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера.

Пусть $\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$ и $k_0 = N+1$. Элементы системы $\{u_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots;$ $n \neq N+1)$ зададим следующим образом:

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) + \frac{\sigma y_n(1)}{c_1(c_1\lambda_n + d_1) y_{N+1}'(1)} \cdot y_{N+1}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{\sigma y_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}}.$$

На основании равенства (1.7) и в этом случае легко можно убедиться в справедливости (1.9).

Пусть $\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$ и $k_0 \neq N+1$. В этом случае элементы системы $\{u_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots; n \neq k_0)$ определим следующим образом: если $n \neq N+1$, то $u_n(x)$ задается формулой (1.8); если $n = N+1$, то

$$u_n(x) = u_{N+1}(x) = \frac{y_{N+1}(x) + \frac{c_1(c_1\lambda_{k_0} + d_1) y_{N+1}'(1)}{\sigma y_{k_0}(1)} \cdot y_{k_0}(x)}{\|y_{N+1}\|^2 + \frac{c_1^2 y_{N+1}'^2(1)}{\sigma}}.$$

Случай $c_1 = 0$. Используя формулы (1.1), (1.3) и (1.4), получим, что при $m \neq n$ имеет место равенство

$$(y_n, y_m) = -\frac{a_1}{d_1} y_n(1) y_m(1). \tag{1.10}$$

Элементы системы $\{u_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots; n \neq k_0)$ определим представлением

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{y_n(1)}{y_{k_0}(1)} y_{k_0}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{a_1 y_n^2(1)}{d_1}}.$$

На основании равенства (1.10) опять же легко можно убедиться в справедливости равенства (1.9).

Теорема 1.1 доказана.

2. Базисность в $L_2(0,1)$ системы собственных функций краевой задачи (0.1)–(0.3)

Теорема 2.1. *Пусть k_0 — произвольное фиксированное целое неотрицательное число. Тогда система $\{y_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots; n \neq k_0)$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(0,1)$.*

Доказательство. В [8, следствия 3.6 и 5.4] доказано, что

$$\lambda_n = (\pi(n + \nu))^2 + O(1),$$

где

$$\nu = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } c_1 \neq 0,\ d_0 = 0; \\ -1, & \text{если } c_1 \neq 0,\ d_0 \neq 0; \\ 0, & \text{если } c_1 = 0,\ d_0 = 0; \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } c_1 = 0,\ d_0 \neq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Отсюда при достаточно больших n легко следует формула

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n + \nu) + O(1/n). \tag{2.2}$$

Собственную функцию $y_n(x)$ при достаточно больших n будем искать в виде

$$y_n(x) = P_n \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n}) & \varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n}) \\ U\left(\varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n})\right) & U(\varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n})) \end{vmatrix},$$

где $P_n = \frac{\sqrt{2}}{2ib_0}$ при $d_0 = 0$, $P_n = \frac{\sqrt{2}}{2i\sqrt{\lambda_n} d_0}$ при $d_0 \neq 0$, $\varphi_j(x, \mu) = \exp(\mu\omega_j x)(1 + O(1/\mu))$ $(j = 1, 2)$, $\omega_1 = -\omega_2 = i$ (см. [13, с. 59]) и $U(y(x)) = b_0 y(0) - d_0 y'(0)$. Отсюда с помощью (2.2) и (2.1) при достаточно больших n получим

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin\big(n - \frac{1}{2}\big)\pi x + O\big(\frac{1}{n}\big), & \text{если } c_1 \neq 0,\ d_0 = 0; \\ \sqrt{2}\cos(n-1)\pi x + O\big(\frac{1}{n}\big), & \text{если } c_1 \neq 0,\ d_0 \neq 0; \\ \sqrt{2}\sin n\pi x + O\big(\frac{1}{n}\big), & \text{если } c_1 = 0,\ d_0 = 0; \\ \sqrt{2}\cos\big(n - \frac{1}{2}\big)\pi x + O\big(\frac{1}{n}\big), & \text{если } c_1 = 0,\ d_0 \neq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $c_1 \neq 0$ и $d_0 = 0$. Сравним систему $\{y_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \dots;\ n \neq k_0)$ с известной системой $\{\sqrt{2}\sin(n - 1/2)\pi x\}$ $(n = 1, 2, \dots)$, которая является ортонормированным базисом пространства $L_2(0,1)$. В силу (2.3) для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|y_n(x) - \sqrt{2}\sin(n - 1/2)\pi x\| \le \mathrm{const} \cdot n^{-1},$$

откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{k_0} \|y_{n-1}(x) - \sqrt{2}\sin(n-1/2)\pi x\|^2 + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \|y_n(x) - \sqrt{2}\sin(n-1/2)\pi x\|^2$$

(при $k_0 = 0$ первая сумма отсутствует). Таким образом, система $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \ldots; n \neq k_0$) квадратично близка к системе $\{\sqrt{2}\sin(n-1/2)\pi x\}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Так как система $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \ldots; n \neq k_0$) минимальна в пространстве $L_2(0,1)$, отсюда в рассматриваемом случае вытекает утверждение теоремы.

Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Теорема 2.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walter J.* Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // Math. Z. 1973. Bd 133, № 4. S. 301–312.
2. *Schneider A.* A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition // Math. Z. 1974. Bd 136, № 2. S. 163–167.
3. *Fulton C. T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1977. V. 77. P. 293–388.
4. *Hinton D. B.* An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1979. V. 30, N 2. P. 33–42.
5. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинаров им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
6. *Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И.* Об одной краевой задаче. I // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 54–60.
7. *Керимов Н. Б., Аллахвердиев Т. И.* Об одной краевой задаче. II // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 952–960.
8. *Binding P. A., Browne P. J., Seddighi K.* Sturm–Lioville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). 1993. V. 37, N 1. P. 57–72.
9. *Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И.* О спектральной задаче из теории параболо-гиперболического уравнения теплопроводности // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 4. С. 451–454.
10. *Капустин Н. Ю., Моисеев Е. И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 115–119.
11. *Керимов Н. Б., Мамедов Х. Р.* Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 325–335.
12. *Капустин Н. Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1024–1027.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 1 октября 2001 г.

Керимов Назим Бахыш оглы
Бакинский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. З. Халилова, 23, Баку AZ 1148, Азербайджан
`world152000@yahoo.com`, `nazimkerimov@yahoo.com`

Мирзоев Видади Султанага оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджанской Республики,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан