Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2003. Том 44, № 5

УДК 517.953+517.983

О МУЛЬТИ–КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В $\mathbb{R}_n$

Г. А. Шмырев

Аннотация: Доказана разрешимость мульти-квазиэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами в пространствах соболевского типа, в которых норма задается некоторым конечным набором производных.

Ключевые слова: мульти-квазиэллиптические уравнения, разрешимость, оценки.

Рассмотрим во всем пространстве $\mathbb{R}_n$ уравнение

$$P(D_x)u = f(x), \tag{1}$$

где

$$P(D_x) = \sum_{\gamma \in M_P} a_\gamma D_x^\gamma$$

— мульти-квазиэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, M_P — конечное множество мультииндексов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $D_x^\gamma = D_1^{\gamma_1} \dots D_n^{\gamma_n}$, $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Определение [1]. Оператор $P(D_x)$ (многочлен $P(\xi)$) называется *мульти-квазиэллиптическим*, если

(i) $P(D_x)$ — гипоэллиптический оператор;

(ii) для любого $\xi \in \mathbb{R}_n$ с некоторой постоянной $c > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{\gamma \in M_P} |\xi^\gamma| \leq c(1 + |P(\xi)|), \quad |\xi^\gamma| = |\xi_1|^{\gamma_1} \dots |\xi_n|^{\gamma_n}. \tag{2}$$

Выпуклую оболочку множества M_P будем называть *многогранником Ньютона* полинома $P(\xi)$ и обозначать через $N(P)$, $N(P) = \operatorname{conv} M_P$, а множество вершин многогранника $N(P)$ будем обозначать через V_P.

Если предположить дополнительно, что $P(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}_n$, то в силу теоремы 3.2 из [2] имеет место двухсторонняя оценка

$$c_1 \sum_{\alpha \in V_P} |\xi^\alpha| \leq P(\xi) \leq c_2 \sum_{\alpha \in V_P} |\xi^\alpha|, \quad \xi \in \mathbb{R}_n. \tag{3}$$

Многочлены (дифференциальные операторы), для которых справедлива оценка (3), изучались в работах [1–9]. В [10] дано подробное исследование многочленов, удовлетворяющих оценке (3), а также многочленов более общего вида,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00609).

определяемых с помощью многогранников Ньютона. В [4, 10, 11] изучались локальные свойства решений уравнения (1), а также краевые задачи для них.

Следуя работе [10], $(n-1)$-мерные грани (замкнутые) многогранника $N(P)$, имеющие положительные нормали $\nu > 0$ ($\nu_i > 0$, $i = 1, \dots n$), будем называть *главными*. Полином

$$\pi P(\xi) = \sum_{\gamma \in \pi M_P} a_\gamma \xi^\gamma$$

назовем *главной частью* полинома $P(\xi)$. Здесь πM_P — множество тех $\gamma \in M_P$, которые лежат на главных гранях.

Относительно дифференциального оператора $P(D_x)$ (многочлена $P(\xi)$) будем предполагать выполнение следующих условий:

I) $P(D_x)$ мульти-квазиэллиптический;

II) $P(\xi)$ — вещественный многочлен, т. е. все коэффициенты a_γ являются вещественными числами;

III) многочлен $P(\xi)$ совпадает со своей главной частью, т. е. $P(\xi) = \pi P(\xi)$.

Из условий I, II следует, что все вершины $e_1, \dots, e_{\mu_0} \in V_P$ имеют четные координаты, а соответствующие им коэффициенты a_{e_j}, $j = 1, \dots, \mu_0$, суть положительные числа [1, теорема 3.2, 2, лемма 2.1]. Из условия III следует, что на каждой координатной оси имеется единственная вершина многогранника $N(P)$. Таким образом, граница многогранника Ньютона $N(P)$ разбивается на две части: ближнюю F_* и дальнюю F^* по отношению к началу координат. При этом граница F_* состоит из единственной грани, проходящей через вершины $e_i = (0, \dots, l_i, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, n$, лежащие на координатных осях. Дальняя граница F^* является объединением всех $(n-1)$-мерных главных граней.

Введем обозначения:

$$G_0(\xi, v) = \exp(-(vP(\xi))^k), \quad G_1(\xi, v) = k \exp(-(vP(\xi))^k)(vP(\xi))^{k-1},$$

где $k > 0$ — некоторое достаточно большое фиксированное число; $\widehat{\varphi} = F\varphi$ — преобразование Фурье функции φ; $f * \varphi$ — свертка f с функцией φ;

$$A_v u(x) = (2\pi)^{-n} \widehat{G_0(\cdot, v)} * u = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \widehat{G_0(\cdot, v)}(t-x) u(t)\, dt. \tag{4}$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [12], можно доказать, что для любой функции $u(x) \in L_p(\mathbb{R}_n)$ имеет место тождество

$$A_h u(x) - A_{h^{-1}} u(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi} G_1(\xi, v)\, d\xi P(D_y) u(y)\, dy dv, \tag{5}$$

при этом

$$\lim_{h \to 0} \|A_h u - u,\, L_p(\mathbb{R}_n)\| = 0, \quad \lim_{h \to 0} \|A_{h^{-1}} u,\, L_p(\mathbb{R}_n)\| = 0.$$

При исследовании уравнения (1) мы будем следовать работе [13].

Обозначим

$$u_h(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi} G_1(\xi, v)\, d\xi f(y)\, dy dv, \tag{6}$$

где $f(y)$ — правая часть уравнения (1).

Определение. Функция $u(h,x)$, принадлежащая при фиксированном h пространству Шварца S, называется *приближенным решением уравнения* (1), если

$$P(D_x)u(h,x) = f_h(x),$$

где справа стоит усреднение (4) функции $f(x)$ при данном h.

Определение. Обозначим через $W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)$ пространство, полученное пополнением S по норме

$$\|u, W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)\| = \|u, L_p(\mathbb{R}_n)\| + \sum_{\alpha\in V_P} \|D^\alpha u, L_p(\mathbb{R}_n)\|. \tag{7}$$

Аналогичные пространства изучались ранее в [14, § 13].

Определение. Функция $u(x) \in L_p(\mathbb{R}_n)$ называется *обобщенным решением уравнения* (1), если она является пределом при $h \to 0$ по норме пространства $W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)$ приближенных решений $u(h,x)$.

Замечание. В работе [13] показано, что для любого фиксированного h функция $u_h(x)$ является решением уравнения

$$P(D_x)u_h = f_h(x).$$

Поскольку функция $G_1(\xi, v)$ при фиксированном v принадлежит пространству S, то при финитной $f_R(x)$ (срезка $f(x)$) для любого фиксированного значения h функция $u_h(x)$ принадлежит S. Таким образом, для любого фиксированного h функция $u_h(x)$ является приближенным решением.

Далее будем доказывать, что последовательность $\{u_h(x)\}$ фундаментальна в пространстве $W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)$, откуда получим существование обобщенного решения уравнения (1).

Лемма 1. *Пусть $f(x) \in L_p(\mathbb{R}_n) \cap L_1(\mathbb{R}_n)$. Тогда для любого $\alpha \in V_P$ имеет место оценка*

$$\|D_x^\alpha u_h(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c\|f(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \tag{8}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$ и h, при этом

$$\big\|D_x^\alpha u_{h_1}(x) - D_x^\alpha u_{h_2}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \to 0, \quad h_1, h_2 \to 0. \tag{9}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [13], нужно лишь показать, что в силу оценки (3) функция

$$\frac{\xi^\alpha}{P(\xi)}, \quad \alpha \in V_P,$$

является (p,p)-мультипликатором.

Обозначим $\theta = (1/l_1, \dots, 1/l_n)$, где l_j — координата вершины многогранника $N(P)$, лежащей на j-й координатной оси.

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in L_p(\mathbb{R}_n) \cap L_1(\mathbb{R}_n)$, $p \ge 2$, $p' < |\theta| < \frac{2p'}{2-p'}$, где p' такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда имеет место оценка*

$$\|u_h(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c \max\{\|f(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\|,\, \|f(x),\, L_1(\mathbb{R}_n)\|\} \tag{10}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$ и h, при этом

$$\|u_{h_1}(x) - u_{h_2}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le \delta(h_1,h_2) \max\{\|f(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\|,\, \|f(x),\, L_1(\mathbb{R}_n)\|\}, \tag{11}$$

где $\delta(h_1, h_2) \to 0$ *при* $h_1,\, h_2 \to 0$.

Доказательство. В силу обобщенного неравенства Минковского из (6) имеем

$$\|u_h(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \leq \int\limits_h^1 \bigl\|\widehat{G_1(\xi,v)} * f, L_p\bigl(R_n^x\bigr)\bigr\|\, dv + \int\limits_1^{h^{-1}} \bigl\|\widehat{G_1(\xi,v)} * f, L_p\bigl(R_n^x\bigr)\bigr\|\, dv = I_{1,h} + I_{2,h}. \tag{12}$$

Оценим $I_{1,h}$. Обозначим через F (F^{-1}) преобразование Фурье (обратное преобразование Фурье). Применяя неравенство Хаусдорфа — Юнга [15] и затем неравенство Гёльдера с параметром $q = \frac{2}{p'}$, получим

$$\begin{aligned} I_{1,h} &= \int\limits_h^1 \bigl\|F(F^{-1}(\widehat{G_1(\xi,v)} * f)), L_p\bigl(R_n^x\bigr)\bigr\|\, dv \\ &\leq \int\limits_h^1 \bigl\|F^{-1}(\widehat{G_1(\xi,v)} * f), L_{p'}\bigl(\mathbb{R}_n^x\bigr)\bigr\|\, dv = \int\limits_h^1 \bigl\|G_1(\xi,v)F^{-1}f, L_{p'}\bigl(\mathbb{R}_n^x\bigr)\bigr\|\, dv \\ &= \int\limits_h^1 \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |G_1(\xi,v)|^{p'} |F^{-1}f|^{p'}\, d\xi\Biggr)^{1/p'} dv \\ &\leq \int\limits_h^1 \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |G_1(\xi,v)|^{p'q'}\, d\xi\Biggr)^{\frac{1}{p'q'}} \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |F^{-1}f|^{p'q}\, d\xi\Biggr)^{\frac{1}{p'q}} dv \\ &= \int\limits_h^1 \|G_1(\xi,v), L_{p'q'}(\mathbb{R}_n)\|\, \|F^{-1}f,\, L_2(\mathbb{R}_n)\|\, dv. \end{aligned} \tag{13}$$

Оценим первое слагаемое. Используя очевидное неравенство

$$ze^{-z} \leq ce^{-z/2}, \quad z \geq 0,$$

с некоторой постоянной c и левое неравенство в (3), оставив в сумме только слагаемые, соответствующие вершинам $e_i = (0, \dots, l_i, \dots)$, $i = 1, \dots, n$, лежащим на координатных осях, после замены $s_i = \xi_i v^{1/l_i}$ получаем

$$\begin{aligned} \|G_1(\xi,v),\, L_{p'q'}(\mathbb{R}_n)\|^{p'q'} &= \int\limits_{\mathbb{R}_n} \bigl(e^{-(vP(\xi))^k} (k(vP(\xi))^{k-1}\bigr)^{p'q'}\, d\xi \\ &\leq c \int\limits_{\mathbb{R}_n} \bigl(e^{-\frac{(vP(\xi))^k}{2}}\bigr)^{p'q'}\, d\xi \leq c \int\limits_{\mathbb{R}_n} \exp\Biggl(-\frac{1}{2}\Biggl(\sum_{j=1}^n s_j^{l_j}\Biggr)^{kp'q'}\Biggr)\, ds v^{-|\theta|}. \end{aligned} \tag{14}$$

Второй сомножитель в силу равенства Парсеваля равен

$$\|F^{-1}f, L_2(\mathbb{R}_n)\| = \|f, L_2(\mathbb{R}_n)\|. \tag{15}$$

Из (13)–(15) следует оценка

$$I_{1,h} \le c \int\limits_h^1 v^{-\frac{|\theta|}{p'q'}}\, dv \|f,\, L_2(\mathbb{R}_n)\|.$$

Так как

$$q' = \frac{q}{q-1} = \frac{2/p'}{2/p'-1} = \frac{2}{2-p'},$$

в силу условий леммы относительно $|\theta|$ получаем

$$1 - \frac{|\theta|}{p'q'} = 1 - |\theta|\frac{2-p'}{2p'} > 0.$$

Следовательно, интеграл по v сходится. Поскольку пространство $L_2(\mathbb{R}_n)$ является промежуточным для банаховой пары $L_1(\mathbb{R}_n)$ и $L_p(\mathbb{R}_n)$ $(p \ge 2)$, то [16, гл. 1, § 3]

$$\|f, L_2(\mathbb{R}_n)\| \le \max(\|f, L_1(\mathbb{R}_n)\|, \|f, L_p(\mathbb{R}_n)\|).$$

Таким образом, имеем

$$I_{1,h} \le c \max(\|f, L_1(\mathbb{R}_n)\|, \|f, L_p(\mathbb{R}_n)\|). \tag{16}$$

Оценим $I_{2,h}$. Применяя неравенство Юнга с параметрами p, p, 1 [15] и затем неравенство Хаусдорфа — Юнга, получаем

$$I_{2,h} = \int\limits_1^\infty \|\widehat{G_1(\xi,v)} * f, L_p(\mathbb{R}_n)\|\, dv \le \int\limits_1^\infty \|\widehat{G_1(\xi,v)}, L_p(\mathbb{R}_n)\|\|f, L_1(\mathbb{R}_n)\|\, dv$$

$$\le (2\pi)^{-n/2} \int\limits_1^\infty \|G_1(\xi,v), L_{p'}(\mathbb{R}_n)\|\, dv \|f, L_1(\mathbb{R}_n)\|.$$

Рассуждая, как при оценке $I_{1,h}$, имеем

$$\|G_1(\xi,v), L_{p'}(\mathbb{R}_n)\| \le c v^{-\frac{|\theta|}{p'}}.$$

Так как по условию леммы $|\theta| > p'$, интеграл

$$\int\limits_1^\infty v^{-\frac{|\theta|}{p'}}\, dv$$

сходится. Таким образом,

$$I_{2,h} \le c\|f, L_1(\mathbb{R}_n)\|. \tag{17}$$

Из (12), (16) и (17) следует неравенство (10). Оценка (11) доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть характеристический многочлен $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет условиям I–III и выполнено неравенство*

$$p' < |\theta| < \frac{2p'}{2-p'}.$$

Тогда для любой функции $f(x) \in L_p(\mathbb{R}_n) \cap L_1(\mathbb{R}_n)$ уравнение (1) имеет обобщенное решение $u(x) \in W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)$, при этом выполнено неравенство

$$\left\| u(x), W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n) \right\| \le c \max(\|f, L_p(\mathbb{R}_n))\|, \|f, L_1(\mathbb{R}_n))\|), \tag{18}$$

где $c > 0$ не зависит от $f(x)$.

Доказательство. Для всякого фиксированного h при финитной $f_R(x)$ функция $u_h(x)$ принадлежит пространству S. В силу лемм 1 и 2 последовательность $\{u_h(x)\}$ фундаментальна по h в пространстве $W_p^{\{V_P\}}(\mathbb{R}_n)$ и ввиду полноты данного пространства имеет предел, который по определению является слабым решением уравнения (1), что и требовалось доказать. Оценка (18) получается предельным переходом из оценок (8) и (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Friberg J.* Multi-quasielliptic polynomials // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1967. V. 21, N 2. P. 239–260.
2. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 91. С. 59–80.
3. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Об одном классе гипоэллиптических операторов // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 400–416.
4. *Никольский С. М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С. 767–769.
5. *Горчаков В. Н.* Об асимптотике спектральной функции одного класса гипоэллиптических операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 3. С. 519–522.
6. *Barozzi G. C.* Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici // Boll. Un. Mat. Ital. 1965. V. 20. P. 169–176.
7. *Cattabriga L.* Su una classe di polinomi ipoellittici // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1966. V. 36. P. 285–309.
8. *Pini B.* Sulla classe di Gevrey delle soluzioni di certe equazioni ipoellittiche // Boll. Un. Mat. Ital. 1963. V. 18, N 3. P. 260–269.
9. *Boggiatto P., Schrohe E.* Characterization, spectral invariance and the Fredholm property of multiquasielliptic operators // Rend. del Sem. Math. d'Univ. del Politecnico di Torino. 2001. V. 59, N 4. P. 229–242.
10. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранников Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
11. *Михайлов В. П.* Первая краевая задача для квазиэллиптических и квазипараболических уравнений // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 91. С. 81–99.
12. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
13. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями I // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 52–67.
14. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
15. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.
16. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 10 июля 2003 г.

Шмырев Геннадий Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090