Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 517.548.2

ЛИНЕЙНОЕ СВОЙСТВО ПРОДОЛЖИМОСТИ БИЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

П. Алестало, Д. А. Троценко, Ю. Вяйсяля

Аннотация: Дается достаточное геометрическое условие на подмножество A пространства $\mathbb{R}^n$, имеющее для данного $C \geq 1$ следующее свойство: существует $\delta > 0$ такое, что для $0 \leq \varepsilon \leq \delta$ каждое $(1+\varepsilon)$-билипшицево отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ продолжается до $(1 + C\varepsilon)$-билипшицева отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: билипшицево отображение, квазиизометрия, аппроксимация, продолжение отображений, подмножества евклидова пространства.

1. Введение

Пусть A — подмножество евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ называется *билипшицевым*, если существует $L \geq 1$ такое, что

$$|x - y|/L \leq |fx - fy| \leq L|x - y|$$

для всех $x, y \in A$. Более точно, такое отображение называется *L-билипшицевым*. Отображение f *локально L-билипшицево*, если каждая точка $a \in A$ имеет окрестность U такую, что $f|A \cap U$ L-билипшицево.

Очевидно, что билипшицево отображение всегда вложение и билипшицево отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть гомеоморфизм на все $\mathbb{R}^n$. В общем случае L-билипшицево отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ не может быть продолжено даже до гомеоморфизма $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тем не менее такое продолжение часто возможно, если билипшицева константа L достаточно близка к 1. Будем говорить (как в [1]), что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет свойство *продолжимости билипшицевых отображений*, если нашлось число $\delta > 0$ такое, что для $0 \leq \varepsilon \leq \delta$ каждое $(1+\varepsilon)$-билипшицево отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ продолжается до $(1 + \varepsilon')$-билипшицева отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как L-билипшицево отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ всегда продолжается до L-билипшицева расширения на замыкание $\overline{A}$ множества A, то, не теряя общности, будем рассматривать только случай, когда A замкнуто.

Известно, что различные достаточно регулярные множества имеют это свойство, например линейные подпространства [2] и компактные многогранники [3]. Примеры множеств, не обладающих этим свойством, можно найти в [1, ч. 7].

В работе мы даем достаточное условие, при котором множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет это свойство, причем с линейной оценкой $\varepsilon' = C\varepsilon$. В этом случае будем

Работа второго из авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00255).

говорить, что A обладает *C-линейным свойством продолжимости билипшицевых отображений* или, более точно, *(C,δ)-линейным свойством продолжимости билипшицевых отображений.* Число δ обычно должно быть выбрано очень маленьким, и мы будем всегда считать, что $\delta \le 1$.

Например, прямая в $\mathbb{R}^2$ имеет свойство продолжимости билипшицевых отображений с $\varepsilon' = 100\sqrt{\varepsilon}$, но не имеет C-линейного свойства продолжимости билипшицевых отображений ни при каком C (см. [2, 5.12]).

Условию нашей основной теоремы 2.8 удовлетворяют, например, билипшицевы образы шаров, различные фрактальные множества, а также достаточно регулярные дискретные множества, в частности $\mathbb{Z}^n$.

Мы сформулируем основной результат в п. 2, и докажем его в п. 4 после получения некоторых вспомогательных результатов в п. 3. Метод продолжения мало отличается от метода, использованного в наших предыдущих работах, но мы существенно используем результаты [4] для получения лучших оценок билипшицевых констант.

2. Формулировка результатов

2.1. Обозначения. Через $|x|$ обозначим норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Открытый и замкнутый шары с центром x радиуса r записываем соответственно как $B(x,r)$ и $\overline{B}(x,r)$ и сокращенно обозначаем $B(r) = B(0,r)$, $\overline{B}(r) = \overline{B}(0,r)$. Диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $d(A)$, расстояние между непустыми множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — через $d(A,B)$. Если f и g — отображения в $\mathbb{R}^n$, определенные на множестве X, пишем $\|f-g\|_X = \sup\{|fx - gx| : x \in X\}$. Для упрощения записи мы часто пропускаем скобки, записывая $fx = f(x)$ и т. д. В частности, ab/cde означает $(ab)/(cde)$. Через $a \wedge b$ и $a \vee b$ обозначаем минимум и максимум чисел a, b соответственно. Символ $\#$ используем для обозначения мощности множества (количества элементов).

2.2. Соглашение. Во избежание тривиальностей будем всегда считать, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ состоит не менее, чем из двух точек.

2.3. Толщина. Для каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^n$ определим проекцию $\pi_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, полагая $\pi_e x = x \cdot e$. Пусть $A \neq \varnothing$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Следуя [4], мы определим *толщину* A как число

$$\theta(A) = \inf\{d(\pi_e A) : |e| = 1\}.$$

Другими словами, $\theta(A)$ есть инфимум среди всех $t > 0$ таких, что A лежит между двумя параллельными гиперплоскостями F, F' с $d(F,F') = t$. Ясно, что всегда $0 \le \theta(A) \le d(A)$.

Если $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, полагаем

$$A(a,r) = A \cap \overline{B}(a,r).$$

Для $c \ge 1$ будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно c-толстое*, если $\theta(A(a,r)) \ge 2r/c$ в случае $a \in A$ и $A \not\subset B(a,r)$. Фактически $c \ge 2$ всегда, кроме случая $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

Равномерно толстые множества в [5] были названы *n-толстыми*, и ограниченные равномерно толстые множества в [1] были названы *толстыми*.

2.4. Примеры. Шар — равномерно 2-толстое множество. Более того, если A выпуклое и $B(a_1,R_1) \subset A \subset \overline{B}(a_2,R_2)$, то A равномерно c-толстое с константой $c = 2R_2/R_1$. Для классического канторова множества C степень $C^n = C \times \cdots \times C$ равномерно $c(n)$-толста в $\mathbb{R}^n$, причем $c(1) = c(2) = 4$.

2.5. Жесткость. Равномерно толстое множество не может содержать изолированных точек. Далее мы обобщим понятие толщины, позволив множеству иметь изолированные точки. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Для $a \in A$ полагаем $s(a) = s_A(a) = d(a, A \setminus \{a\})$. Видно, что $s(a) > 0$ тогда и только тогда, когда a — изолированная точка A.

Пусть $c \geq 1$. Назовем множество $A \subset \mathbb{R}^n$ *c-жестким*, если

(1) $\theta(A(a,r)) \geq 2r/c$, если $a \in A$, $r \geq cs(a)$, $A \not\subset B(a,r)$,

(2) $\theta(A) \geq d(A)/c$.

Если A — неограниченное множество, условие (2) можно опустить так же, как условие $A \not\subset B(a,r)$ из (1).

2.6. Примеры. Равномерно c-толстое множество, очевидно, c-жесткое. Конечное множество будет c-жестким для некоторого c тогда и только тогда, когда оно не содержится в гиперплоскости. Множество $\mathbb{Z}^n$ $c(n)$-жесткое, $c(2) = 2$. Более общая ситуация: множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является *(α, β)-сетью*, если

(1) $|x - y| \geq \alpha$ для всех $x, y \in A$, $x \neq y$,

(2) $d(x, A) \leq \beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

2.7. Теорема. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ является (α, β)-сетью, то A c-жесткое, причем $c = 1 + 2\beta/\alpha$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$, $r \geq cs(a)$, $E = A(a,r)$ и $t > \theta(E)$. Достаточно показать, что $t \geq 2r/c$.

Найдется единичный вектор e такой, что $d(\pi_e E) \leq t$. Следовательно, $\pi_e E$ содержится в интервале J длины t. Поскольку $I = \pi_e \overline{B}(a,r)$ — интервал длины $2r$, найдется интервал $]\lambda - \varrho, \lambda + \varrho[\subset I \setminus J$, где $\varrho = r/2 - t/4$. Значит, $B(a + \lambda e, \varrho) \cap A = \varnothing$, что влечет $r/2 - t/4 \leq d(a + \lambda e, A) \leq \beta$, и мы получаем $t \geq 2r - 4\beta$. Так как $r \geq cs(a) \geq c\alpha$, имеем $2r - 2r/c \geq 2c\alpha - 2\alpha = 4\beta$, откуда следует $t \geq 2r/c$, что и утверждалось. □

Все готово,чтобы сформулировать наш основной результат.

2.8. Теорема. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ c-жесткое, то A обладает (C, δ)-линейным свойством продолжимости билипшицевых отображений с постоянными $C = C(c,n)$, $\delta = \delta(c,n)$. В частности, это справедливо для равномерно c-толстых множеств A.*

Доказательство дано в п. 4. Оценки для $C(c,n)$ и $\delta(c,n)$ явные, но, по-видимому, далекие от наилучших.

Множество на плоскости, состоящее из двух точек, обладает 1-линейным свойством продолжимости билипшицевых отображений, но не является жестким. Некоторые открытые вопросы поставлены в 4.4.

3. Предварительные результаты

В этом пункте мы даем различные вспомогательные результаты, необходимые при доказательстве основной теоремы.

3.1. Степень отображения. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область и $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Для $y \in \mathbb{R}^n \setminus f\partial D$ через $\mu(y, f, D)$ обозначим *топологическую степень*, определенную, например, в [6, IV.5] и в [7, II.2]. Если $x \in D$ — изолированная точка множества $f^{-1}\{fx\}$, можем определить *локальный индекс* $i(x,f) = \mu(fx, f, U)$, где U — произвольная связная окрестность x в D такая, что $U \cap f^{-1}\{fx\} = \{x\}$. Если f — невырожденное линейное отображение, то $i(x,f) = \operatorname{sgn} \det f$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Непрерывное отображение $f : G \to \mathbb{R}^n$ *сохраняет ориентацию*, если $\mu(y, f, D) > 0$ в случае, когда D есть ограниченная область с $\overline{D} \subset G$ и $y \in fD \setminus f\partial D$. Линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда $\det T > 0$.

3.2. Симплексы. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ — n-симплекс с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Будем писать $\Delta^0 = \{v_0, \dots, v_n\}$ и $\Delta = [v_0, \dots, v_n]$. Через $b(\Delta)$ обозначим наименьшую высоту Δ, число $\varrho(\Delta) = d(\Delta)/b(\Delta)$ назовем *мерой плоскостности* (*flatness*) Δ. Отображение $f : \Delta^0 \to \mathbb{R}^n$ считаем сохраняющим ориентацию, если его (единственное) аффинное продолжение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сохраняет ориентацию.

3.3. Терминология. Пусть $M \geq 1$ и Δ_1, Δ_2 — n-симплексы в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что Δ_1 *непосредственно M-связан с* Δ_2, если

(1) $\varrho(\Delta_j) \leq M$ для $j = 1, 2$,

(2) $d(\Delta_1)/M \leq d(\Delta_2) \leq M d(\Delta_1)$,

(3) $d(\Delta_1, \Delta_2) \leq M \max\{d(\Delta_1), d(\Delta_2)\}$.

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ и Δ — n-симплекс с $\Delta^0 \subset A$, будем говорить, что Δ есть *симплекс в* A. Пусть Δ и Δ' — симплексы в A, и пусть $M \geq 1$. Мы скажем, что Δ *M-связан с* Δ' в A, если найдется конечная последовательность $\Delta = \Delta_0, \dots, \Delta_N = \Delta'$ симплексов в A такая, что Δ_{j-1} непосредственно M-связан с Δ_j для всех $1 \leq j \leq N$. Видно, что M-связанность есть отношение эквивалентности.

3.4. Лемма. *Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество с $\theta(A) > 0$. Тогда найдется n-симплекс Δ в A с $b(\Delta) \geq \theta(A)/2$.*

Доказательство. Пусть $\Delta = [v_0, \dots, v_n]$ — симплекс в A максимального объема. Выберем v_n так, что $b(\Delta)$ есть длина высоты Δ, опущенной из v_n. Пусть E — гиперплоскость, содержащая вершины $v_0, \dots, v_{n-1}$. Тогда A лежит в $E + \overline{B}(b(\Delta))$, так как в противном случае легко найти симплекс в A большего объема, чем Δ. Следовательно, $\theta(A) \leq 2b(\Delta)$. $\square$

3.5. Специальные симплексы. Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$, $r > 0$ и $c \geq 1$. Назовем n-симплекс Δ *c-специальным для* (A, a, r) или, кратко, *c-специальным симплексом в* A, если

(1) $\Delta^0 \subset A(a, r)$,

(2) $b(\Delta) \geq r/c$.

Так как $d(\Delta) \leq 2r$, имеем

$$\varrho(\Delta) \leq 2c \tag{3.1}$$

для каждого c-специального симплекса Δ в A.

Следующие простые результаты о специальных симплексах сформулированы для неограниченных множеств, поскольку нам они понадобятся именно в этом случае.

3.6. Лемма. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое, неограниченное и c-жесткое множество. Если $a \in A$ и $r \geq cs(a)$, то найдется c-специальный симплекс для (A, a, r).*

Доказательство. Так как $\theta(A(a, r)) \geq 2r/c$ по свойству c-жесткости, утверждение следует из 3.4. $\square$

3.7. Лемма. *Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое, неограниченное и c-жесткое. Пусть Δ, Δ' — c-специальные симплексы в A. Тогда Δ M-связан с Δ' в A, причем $M = 4c$.*

Доказательство. Пусть Δ и Δ' c-специальные для (A, a, r) и (A, a', r') соответственно. Вначале рассмотрим случай $a = a'$ и $r \le r' \le 2r$. По (3.1) имеем $\varrho(\Delta), \varrho(\Delta') \le 2c < M$. Далее,

$$d(\Delta) \le 2r \le 2r' \le 2cb(\Delta') \le Md(\Delta'), \quad d(\Delta') \le 2r' \le 4r \le 4cb(\Delta) \le Md(\Delta).$$

Окончательно, так как $d(\Delta) \vee d(\Delta') \ge b(\Delta) \ge r/c$ и $d(\Delta, \Delta') \le r + r' \le 3r$, условие (3) из 3.3 выполнено, следовательно, Δ непосредственно M-связан с Δ'.

Итерация доказанного выше результата показывает, что лемма справедлива в случае $a = a'$. Предположим, что $|a - a'| = t > 0$. Тогда $t \ge s(a) \vee s(a')$. По 3.7 находим c-специальные симплексы Δ_1 для (A, a, ct) и Δ_1' для (A, a', ct). Так как Δ и Δ' M-связаны с Δ_1 и Δ_1' соответственно по первой части доказательства, достаточно показать, что Δ_1 непосредственно M-связан с Δ_1'.

Имеем $b(\Delta_1), b(\Delta_1') \ge t$. Значит, $d(\Delta_1) \le 2ct \le 2cb(\Delta_1') \le Md(\Delta_1')$ и аналогично $d(\Delta_1') \le Md(\Delta_1)$. Более того,

$$d(\Delta_1, \Delta_1') \le (2c+1)t \le 3ct \le M \max\{b(\Delta_1), b(\Delta_1')\},$$

и лемма доказана. $\square$

Напомним, следуя [4], что отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ является ε-*околоизометрией* (*nearisometry*), если $|x - y| - \varepsilon \le |fx - fy| \le |x - y| + \varepsilon$ для всех $x, y \in A$. Если A ограничено и $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево, то f является $\varepsilon d(A)$-околоизометрией. Напомним также теорему об аппроксимации, доказанную в [4, 3.3].

3.8. Теорема. *Пусть $c \ge 1$ и $A \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество с $\theta(A) \ge d(A)/c$. Пусть $f : A \to \mathbb{R}^n$ — ε-околоизометрия. Тогда найдется изометрия $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\|S - f\|_A \le cc_n\varepsilon$, где c_n зависит только от n.*

В конце статьи мы положим c_n равной константе, полученной в 3.8.

3.9. Следствие. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево. Предположим,что $a \in A$ и $r > 0$ таковы, что $\theta(A(a, r)) \ge 2r/c$ для некоторой константы $c \ge 1$. Тогда можно указать изометрию $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такую, что $Sa = fa$ и $\|S - f\|_{A(a,r)} \le 4cc_n\varepsilon r$.*

В частности, S существует, если A c-жесткое и $r \ge cs(a)$, $A \not\subset B(a, r)$.

Доказательство. Так как $d(A(a, r)) \le 2r$, сужение $f|A(a, r)$ есть $2\varepsilon r$-околоизометрия. Из неравенства $\theta(A(a, r)) \ge 2r/c \ge d(A(a, r))/c$ и теоремы 3.8 следует существование изометрии $S_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\|S_1 - f\|_{A(a,r)} \le 2cc_n\varepsilon r$. Значит, $|S_1 a - fa| \le 2cc_n\varepsilon r$, поэтому $S = S_1 - S_1 a + fa$ есть требуемая изометрия. $\square$

3.10. Специальные изометрии. Будем говорить, что изометрия S, построенная в следствии 3.9, есть *специальная изометрия* для (f, a, r).

Наша следующая лемма является версией леммы [1, 5.4], но с явными оценками.

3.11. Лемма. *Предположим, что Δ_1 непосредственно M-связан с Δ_2 и $f : \Delta_1^0 \cup \Delta_2^0 \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево с $\varepsilon \le \delta$, где $1/\delta = (n+1)^2 M^3 (M+2)^2 c_n$ и c_n — постоянная из теоремы 3.8. Если $f|\Delta_1^0$ сохраняет ориентацию, то $f|\Delta_2^0$ также сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Можно считать, что $d(\Delta_1) \le d(\Delta_2)$. Положим $F = \Delta_1^0 \cup \Delta_2^0$. По [2, 3.3] достаточно найти изометрию $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такую, что

$$\|S - f\|_F \le b(\Delta_j)/2(n+1) \tag{3.2}$$

для $j = 1, 2$.

По [4, 5.3] имеем $b(\Delta_2) \le (n+1)\theta(\Delta_2)/2$. Так как $b(\Delta_2) = d(\Delta_2)/\varrho(\Delta_2) \ge d(\Delta_2)/M$, получаем

$$\theta(F) \ge \theta(\Delta_2) \ge 2d(\Delta_2)/(n+1)M.$$

С другой стороны,

$$d(F) \le d(\Delta_1) + d(\Delta_2) + d(\Delta_1, \Delta_2) \le 2d(\Delta_2) + Md(\Delta_2), \tag{3.3}$$

откуда следует, что $d(F)/\theta(F) \le (n+1)M(M+2)/2$. Так как f есть $\varepsilon d(F)$-околоизометрия, теорема 3.8 дает изометрию S, удовлетворяющую неравенству

$$\|S - f\|_F \le c_n \varepsilon d(F)(n+1)M(M+2)/2.$$

Так как $d(\Delta_2) \le Md(\Delta_j) \le M^2 b(\Delta_j)$ для $j = 1, 2$, отсюда и из (3.3) следует (3.2). $\square$

3.12. Лемма. *Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое, неограниченное и c-жесткое, и $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево. Пусть $a, b \in A$ и $r_1 \ge cs(a)$, $r_2 \ge cs(b)$. Если S и T — специальные изометрии для (f, a, r_1) и (f, b, r_2) соответственно, то они имеют одинаковую ориентацию, если $0 < \varepsilon \le \delta_1(c, n)$.*

Доказательство. По лемме 3.6 найдутся c-специальные симплексы Δ_a и Δ_b для (A, a, r_1) и (A, b, r_2) соответственно, и по лемме 3.7 эти симплексы $4c$-связаны в A. Пусть $\delta = \delta(c, n)$ — число, полученное в лемме 3.11 для $M = 4c$. По лемме 3.11 отображения $f|\Delta_a^0$ и $f|\Delta_b^0$ одинаково ориентированы, если $0 \le \varepsilon \le \delta$. Так как $b(\Delta_a) \ge r_1/c$, имеем

$$\|S - f\|_{\Delta_a^0} \le 4cc_n\varepsilon r_1 \le 4c^2 c_n \varepsilon b(\Delta_a) \le b(\Delta_a)/2(n+1)$$

для $\varepsilon \le \delta'$, где $\delta' = 1/8(n+1)c^2 c_n > \delta$. Предположим, что $\varepsilon \le \delta$. Тогда из [2, 3.3] следует, что S имеет ту же ориентацию, что и продолжение $f|\Delta_a^0$. Таким же образом замечаем, что T имеет ту же ориентацию, что и $f|\Delta_b^0$. Лемма доказана. $\square$

Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

3.13. Лемма. *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ — n-симплекс и $S, T : \Delta \to \mathbb{R}^n$ — изометрии такие, что $\|S - T\|_{\Delta^0} \le \eta$. Тогда*

$$|Sx - Tx| \le \eta(1 + M|x - z|/d(\Delta))$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \Delta^0$, где $M = 4 + 6n\varrho(\Delta)(1 + \varrho(\Delta))^{n-1}$.

Доказательство. Результат леммы — частный случай леммы [1, 2.11]. $\square$

3.14. Лемма. *Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, причем $F|A$ L-липшицево и $F|\mathbb{R}^n \setminus A$ локально L-липшицево. Тогда F будет L-липшицевым.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Положим $J = [a, b]$. Если $J \cap A = \varnothing$, то

$$|Fa - Fb| \le L|a - b|. \tag{3.4}$$

По непрерывности (3.4) верно, если $J \cap A \subset \{a, b\}$. Если же A содержит внутреннюю точку J, выберем точки $u, v \in J \cap A$ так, что $[a, u)$ и $[b, v)$ лежат в $\mathbb{R}^n \setminus A$, тогда (3.4) следует из неравенства треугольника. $\square$

3.15. Лемма. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область и $F : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, дискретное и сохраняющее ориентацию отображение. Тогда F открыто.*

Доказательство. См. [8, с. 333], где доказан даже более общий результат. $\square$

4. Доказательство теоремы 2.8

Вначале сведем доказательство к случаю неограниченного множества A.

4.1. Лемма. *Предположим, что каждое неограниченное c-жесткое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет (C, δ)-линейное свойство продолжимости билипшицевых отображений с $C = C(c, n)$, $\delta = \delta(c, n)$. Тогда каждое c-жесткое множество имеет (C', δ')-линейное свойство продолжимости билипшицевых отображений с константами*

$$C' = C'(c, n) = 2cc_n C(6c, n), \quad \delta' = \delta'(c, n) = \delta(6c, n)/2cc_n.$$

Доказательство. Предположим, что A ограничено и c-жесткое. Пусть $\varepsilon \leq \delta'(c, n)$ и $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево. Положим $R = d(A)$. Тогда $\theta(A) \geq R/c$ по определению жесткости. Так как f есть εR-околоизометрия, то по теореме 3.8 найдется изометрия $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая неравенству $\|S - f\| \leq cc_n \varepsilon R$.

Нормируем $S = \mathrm{id}$ и $0 \in A$, считая $A \subset \overline{B}(R)$. Пусть $A_1 = A \cup (\mathbb{R}^n \setminus B(2R))$.

Вначале покажем, что A_1 $6c$-жесткое. Для этого пусть $a \in A_1$, и предположим, что $r \geq 6cs(a)$. Надо показать, что $\theta(A_1(a, r)) \geq 2r/6c = r/3c$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $a \in A$, $r \leq 3R$. Так как $r/6 \leq R/2$, имеем $A \not\subset B(a, r/6)$, а также $r/6 \geq cs(a)$. Поскольку A c-жесткое, то

$$\theta(A_1(a, r)) \geq \theta(A(a, r/6)) \geq 2(r/6)/c = 2r/6c.$$

Случай 2. $a \in A$, $r \geq 3R$. Теперь $\overline{B}(a, r) \cap A_1$ содержит половину шара H радиуса $r - 2R \geq r/3$, из чего следует, что

$$\theta(A_1(a, r)) \geq \theta(H) \geq r/3 \geq 2r/6c.$$

Случай 3. $|a| \geq 2R$. В этом случае $\overline{B}(a, r) \cap A_1$ содержит половину шара H радиуса r, поэтому $\theta(A_1(a, r)) \geq \theta(H) \geq r$.

Таким образом, доказано, что A_1 $6c$-жесткое.

Теперь продолжим f до отображения $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}^n$, полагая $f_1 x = x$ для $|x| \geq 2R$.

Мы утверждаем, что f_1 является $(1+2cc_n\varepsilon)$-билипшицевым отображением, если $\varepsilon \leq 1/2cc_n$. Для доказательства считаем, что $x \in A$ и $|y| \geq 2R$, остальные случаи тривиальны. Тогда

$$\frac{|f_1 x - f_1 y|}{|x - y|} = \frac{|fx - y|}{|x - y|} \leq \frac{|fx - x| + |x - y|}{|x - y|} \leq 1 + \frac{cc_n \varepsilon R}{R} = 1 + cc_n \varepsilon. \tag{4.1}$$

С другой стороны,

$$\frac{|f_1 x - f_1 y|}{|x - y|} \geq \frac{|x - y| - |fx - x|}{|x - y|} \geq 1 - \frac{cc_n \varepsilon R}{R} = 1 - cc_n \varepsilon \geq \frac{1}{1 + 2cc_n \varepsilon}, \tag{4.2}$$

ибо $cc_n \varepsilon \leq cc_n \delta' \leq \delta/2 \leq 1/2$.

Так как $2cc_n \varepsilon \leq \delta(6c, n)$, отображение f_1 продолжается до $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, билипшицева с константой $1 + 2C(6c, n)cc_n \varepsilon = 1 + C'(c, n)\varepsilon$. Следовательно, F есть требуемое продолжение f. $\square$

С этого момента будем считать, что A неограниченное, замкнутое и c-жесткое. Тогда $\theta(A(a, r)) \geq 2r/c$, если $a \in A$ и $r \geq cs(a)$.

Для доказательства теоремы 2.8 предположим, что $f : A \to \mathbb{R}^n$ $(1+\varepsilon)$-билипшицево. Определим продолжение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ отображения f и докажем, что F является $(1+C\varepsilon)$-билипшицевым для малых ε с константой $C = C(c, n)$.

В доказательстве через $C_0, C_1, \dots$ будем обозначать константы $C_i \geq 0$, зависящие только от c и n.

Пусть K — разбиение $G = \mathbb{R}^n \setminus A$ на кубы Уитни Q такое, что

(1) $1 \leq d(Q, A)/d(Q) < 3$,

(2) $1/2 \leq d(Q)/d(Q') \leq 2$, если $Q, Q' \in K$ и $Q \cap Q' \neq \varnothing$,

см. [9, с. 17] или [10, с. 168]. Вначале определим продолжение F на множество K^0 вершин кубов $Q \in K$.

Пусть $v \in K^0$. Выберем $a_v \in A$ такие, что $r_v = |v - a_v| = d(v, A)$. Положим

$$t_v = s(a_v) \vee 8r_v.$$

По следствию 3.9 найдем специальные изометрии S_v для (f, a_v, ct_v), удовлетворяющие условиям

$$S_v a_v = f a_v, \quad \|S_v - f\|_{A(a_v, ct_v)} \leq C_0 \varepsilon t_v, \tag{4.3}$$

где $C_0 = 4c^2 c_n$. Эти изометрии можно выбрать так, что

$$S_u = S_v, \tag{4.4}$$

если $a_u = a_v = a$ и $u, v \in \overline{B}(a, s(a)/8)$.

Полагаем $Fv = S_v v$.

По лемме 3.12 все специальные изометрии в A одинаково ориентированы, так как $\varepsilon \leq \delta_1(c, n)$. С этого момента предполагаем, что $\varepsilon \leq \delta_1$ и все S_v сохраняют ориентацию.

Для продолжения отображения $F : K^0 \to \mathbb{R}^n$ на G используем метод из [11]. (Можно использовать и другой, менее экономичный способ, основанный на триангуляции разбиения Уитни, построенной в [1, 5.1].) Таким образом, каждый $Q \in K$ разбивается на конгруэнтные n-симплексы Δ с параметрами

$$d(\Delta) = \lambda\sqrt{n}, \quad b(\Delta) = \lambda/\sqrt{2}, \quad \varrho(\Delta) = \sqrt{2n}, \tag{4.5}$$

где 2λ — длина ребра Q. Пусть W — множество всех таких симплексов, т. е. $W = \{\Delta \subset Q : Q \in K\}$. Продолжение F определим на множестве W следующим образом. Если $u \in K^0$, то Fu было определено выше. Если $u \in W^0 \setminus K^0$, то $u = \frac{1}{2}(u' + u'')$ для некоторой пары вершин $u', u'' \in K^0 \cap Q$, однозначно определяемой по u, и мы полагаем $Fu = \frac{1}{2}(Fu' + Fu'')$. Так как W состоит из n-симплексов, мы можем продолжить F аффинно на каждый $\Delta \in W$, получая отображение $F : G \to \mathbb{R}^n$.

Наконец, полагаем $F|A = f$ и получаем отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Мы утверждаем, что F есть требуемое билипшицево продолжение f.

Доказательство проведем, формулируя и доказывая восемь фактов, которые используем вместе на последнем шаге 4.2.

Факт 1. *Пусть $Q \in K$ и $u, v \in Q \cap K^0$. Тогда*

(1) $|a_u - a_v| \leq 3(r_u \vee r_v)$,

(2) $r_v \leq 2r_u$,

(3) $\|S_u - S_v\|_Q \leq C_1(r_u \vee r_v)\varepsilon$.

Доказательство. Так как $|u - v| \leq d(Q) \leq d(Q, A) \leq r_u \wedge r_v$, неравенства (1) и (2) получаем следующим образом:

$$|a_u - a_v| \leq r_u + |u - v| + r_v \leq 3(r_u \vee r_v), \quad r_v \leq |a_u - v| \leq r_u + |u - v| \leq 2r_u.$$

Для доказательства (3) можно предположить, что $r_u \le r_v$. Вначале допустим, что $t_v = s(a_v) \ge 8r_v$. В этом случае a_v — изолированная точка в A. Если $a_u \ne a_v$, то (1) и (2) дают

$$s(a_v) \le |a_u - a_v| \le 3r_v \le 3s(a_v)/8;$$

противоречие. Поэтому $a_u = a_v$. Так как $r_u \le r_v \le s(a_v)/8$, имеем $S_u = S_v$ по (4.4), и (3) выполнено с $C_1 = 0$.

Далее предполагаем, что $t_v = 8r_v \ge s(a_v)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $r_u \ge cs(a_u)$. В этом случае $t_u = 8r_u$ и $r_v \ge r_u \ge cs(a_u)$. По лемме 3.6 найдется c-специальный симплекс Δ_u для (A, a_u, r_v), удовлетворяющий условиям

$$\Delta_u^0 \subset A(a_u, r_v), \quad b(\Delta_u) \ge r_v/c, \quad \varrho(\Delta_u) \le 2c.$$

Поскольку $r_v \le 2r_u < t_u$, по (2) получаем, используя (4.4), неравенство

$$\|S_u - f\|_{\Delta_u^0} \le C_0\varepsilon t_u \le C_0\varepsilon t_v.$$

По (1) также имеем $\overline{B}(a_u, r_v) \subset \overline{B}(a_v, 4r_v)$, и, следовательно, (4.3) влечет $\|S_v - f\|_{\Delta_u^0} \le C_0\varepsilon t_v$. Поэтому

$$\|S_u - S_v\|_{\Delta_u^0} \le 2C_0\varepsilon t_v.$$

Пусть $x \in Q$. Выберем вершину $z \in \Delta_u^0$ и применим лемму 3.13, чтобы получить

$$|S_u x - S_v x| \le 2C_0\varepsilon t_v(1 + M|x - z|/d(\Delta_u)),$$

где

$$M = 4 + 6n\varrho(\Delta_u)(1 + \varrho(\Delta_u))^{n-1} \le 4 + 12cn(1 + 2c)^{n-1} = M_1(c, n),$$
$$|x - z| \le |x - u| + |u - a_u| + |a_u - z| \le d(Q) + r_u + r_v \le 3r_v,$$
$$d(\Delta_u) \ge b(\Delta_u) \ge r_v/c.$$

Так как $t_v = 8r_v$, эти предположения влекут (3) с постоянной $C_1 = 16C_0(1 + 3cM_1)$.

Случай 2. $r_u \le cs(a_u)$. По лемме 3.6 можем выбрать c-специальный симплекс Δ_u для $(A, a_u, cs(a_u))$. Так как $s(a_u) \le t_u$, по (4.3) имеем оценку $\|S_u - f\|_{\Delta_u^0} \le C_0\varepsilon t_u$. Покажем, что

$$s(a_u) \le 8r_v, \quad \Delta_u^0 \subset A(a_v, 8cr_v). \tag{4.6}$$

Пусть $z \in \Delta_u^0$. Если $a_u \ne a_v$, то $s(a_u) \le |a_u - a_v| \le 3r_v$ по (3) и

$$|z - a_v| \le cs(a_u) + |a_u - a_v| \le 3cr_v + 3r_v \le 6cr_v.$$

Если $a_u = a_v$, то $s(a_u) = s(a_v) \le 8r_v$ и

$$|z - a_v| = |z - a_u| \le cs(a_u) = cs(a_v) \le 8cr_v,$$

и (4.6) доказано.

Так как $t_v = 8r_v$, из (4.6) следует, что $t_u \le t_v$ и $\|S_v - f\|_{\Delta_u^0} \le 8C_0\varepsilon r_v$. Следовательно, $\|S_u - S_v\|_{\Delta_u^0} \le 16C_0\varepsilon r_v$.

Как в случае 1, выберем вершину z симплекса Δ_u и применим лемму 3.13. Для каждого $x \in Q$ имеем

$$|x - z| \le d(Q) + r_u + cs(a_u) \le 3cs(a_u)$$

и $d(\Delta_u) \ge b(\Delta_u) \ge s(a_u)$. Снова получаем (3) с $C_1 = 16C_0(1 + 3cM_1)$. $\square$

Факт 2. *Найдется число $\delta_2(c,n) > 0$ такое, что если $\varepsilon \le \delta_2$ и $\Delta \in W$, то $F|\Delta$ сохраняет ориентацию и $(1 + C_2\varepsilon)$-билипшицево.*

Доказательство. Пусть $Q \in K$ — куб, содержащий Δ, и v — точка в $Q \cap K^0$ такая, что $r_v = |v - a_v| = d(v, A)$ максимален. Из факта 1(3) по построению F следует, что $\|S_v - F\|_\Delta \le C_1 r_v \varepsilon$. По (4.5) получаем

$$r_v \le d(Q, A) + d(Q) \le 4d(Q) = 8\lambda\sqrt{n} \le 8b(\Delta)\sqrt{2n}.$$

Тем самым $\|S_v - F\|_\Delta \le \alpha b(\Delta)/(n + 1)$, где $\alpha = 8C_1\sqrt{2n}(n + 1)\varepsilon \le 1/2$ при условии, что

$$\varepsilon \le \delta_2(c, n) = (16\sqrt{2n}(n + 1)C_1)^{-1}.$$

Для $\varepsilon \le \delta_2$ из [2, 3.3] вытекает, что $F|\Delta$ сохраняет ориентацию и $(1 + C_2\varepsilon)$-билипшицево с $C_2 = 2\alpha/\varepsilon = 16C_1\sqrt{2n}(n + 1)$. $\square$

С этого момента считаем, что $\varepsilon \le \delta_1 \wedge \delta_2$. Покажем, что теорема 2.8 выполнена с постоянной $C = C_2$, но для этого потребуется дополнительное ограничение на ε.

Факт 3. *Для каждых $a \in A$ и $r > 0$ найдется сохраняющая ориентацию изометрия T пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что $Ta = fa$ и $\|T - F\|_{\overline{B}(a,r)} \le C_3\varepsilon r$.*

Доказательство. Если $s(a) > 0$, из (4.4) следует, что отображение $F|K^0$ совпадает с изометрией T в $\overline{B}(a, s(a)/8)$. Значит, $F = T$ в $\overline{B}(s(a)/16)$. Поэтому можно считать, что

$$s(a) \le 16r. \tag{4.7}$$

По следствию 3.9 найдется специальная изометрия T для $(f, a, 20cr)$. Отображение T сохраняет ориентацию, и $Ta = fa$. Пусть $x \in \overline{B}(a, r)$. Надо получить оценку $|Tx - Fx| \le C_3\varepsilon r$. Поскольку

$$\|T - f\|_{A(a,20cr)} \le 20C_0\varepsilon r \tag{4.8}$$

с $C_0 = 4c^2c_n$, как выше, мы можем предположить, что $x \in G$.

Пусть $Q \in K$ — куб, содержащий x, и пусть $v \in Q \cap K^0$. Видно, что достаточно показать, что

$$|Tv - Fv| \le C_3\varepsilon r. \tag{4.9}$$

Напомним, что $Fv = S_v v$ по (4.4) с

$$\|S_v - f\|_{A(a_v, ct_v)} \le C_0\varepsilon t_v, \tag{4.10}$$

где $t_v = s(a_v) \vee 8r_v$. Так как $ct_v \ge cs(a_v)$, найдется c-специальный симплекс Δ_v для (A, a_v, ct_v). Из того, что $d(Q) \le d(Q, A) \le r$, имеем

$$r_v \le |v - a| \le |v - x| + |x - a| \le 2r.$$

Если $a_v \ne a$, то $s(a_v) \le |a_v - a| \le 4r$. Если $a_v = a$, то $s(a_v) = s(a) \le 16r$ по (4.7). Отсюда $t_v \le 16r \vee 8r_v = 16r$. Значит, $\Delta_v^0 \subset A(a, 20cr)$. Из (4.8) и (4.10) вытекает, что

$$\|S_v - T\|_{\Delta_v^0} \le 20C_0\varepsilon r + C_0\varepsilon t_v \le 36C_0\varepsilon r.$$

Фиксируем точку $z \in \Delta_v^0$. По (3.12) приходим к оценке

$$|Fv - Tv| \le 36C_0\varepsilon r(1 + M_1|v - z|/d(\Delta_v)),$$

где $M_1 = M_1(c, n)$, как в доказательстве факта 1, и $|v - z| \le r_v + ct_v$, $d(\Delta_v) \ge b(\Delta_v) \ge t_v$. Так как $r_v \le t_v/8$, получаем (4.9) с $C_3 = 36C_0(1 + 2cM_1)$. $\square$

Положим $\delta_3 = 1/3C_3$ и $\delta = \delta(c, n) = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$. С этого момента считаем, что $\varepsilon \le \delta$.

Факт 4. $FA \cap FG = \varnothing$.

Доказательство. Полагаем $a \in A$, $x \in G$ и пишем $r = |a - x|$. Пусть T — изометрия, построенная по факту 3 для этих a и r. Тогда

$$|Fa - Fx| \geq |Ta - Tx| - 2C_3\varepsilon r \geq r - C_3\delta_3 r = 2r/3 > 0. \quad \square$$

Факт 5. *Продолжение F является $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицевым.*

Доказательство. По факту 2 сужение $F|G$ локально $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицево, и $F|A = f$ является $(1+\varepsilon)$-липшицевым. По лемме 3.14 достаточно показать, что F непрерывно в произвольной точке $a \in A$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$и T — изометрия, построенная по факту 3 для a и $r = |x - a|$. Тогда

$$|Fx - Fa| \leq |Fx - Tx| + |Tx - Ta| \leq r/3 + r.$$

Значит, F непрерывно в a. $\square$

Факт 6. *Сужение $F|G$ сохраняет ориентацию, является дискретным и открытым.*

Доказательство. Если $y \in FG$, то $F^{-1}y \subset G$ — дискретное множество, так как $F|\Delta$ инъективно для каждого $\Delta \in W$. Поэтому F дискретно.

По лемме 3.15 остается доказать, что $F|G$ сохраняет ориентацию. Пусть D — область с компактным $\overline{D} \subset G$. Пусть $y \in FD \setminus F\partial D$, и пусть V — y-компонента $\mathbb{R}^n \setminus F\partial D$. Тогда $z \mapsto \mu(z, F, D)$ постоянно в V. Полагаем $B = \cup\{\partial\Delta : \Delta \in W\}$. Так как $\operatorname{int} FB = \varnothing$, найдется точка $z \in V \cap FD \setminus FB$. Тогда $D \cap F^{-1}\{z\}$ — непустое конечное множество, элементами которого являются внутренние точки различных симплексов $\Delta \in W$. Для каждого Δ сужение $F|\Delta$ аффинно и сохраняет ориентацию по факту 2. Отсюда следует, что

$$\mu(y, F, D) = \mu(z, F, D) = \sum\{i(x, F) : x \in D \cap F^{-1}\{z\}\} = \#(D \cap F^{-1}\{z\}) > 0.$$

Доказательство факта 6 завершено. $\square$

Для дальнейших рассуждений используем нормализацию $0 \in A$ и $f(0) = 0$.

Факт 7. *Имеем $\mu(y, F, B(r)) = 1$ для каждых $r > 0$ и $y \in B(r/2)$.*

Доказательство. Пусть T — изометрия, данная по факту 3 для $a = 0$. Если $|x| \leq r$, то $|Tx - Fx| \leq C_3\varepsilon r \leq r/3$, поэтому $z \mapsto \mu(z, F, B(r))$ постоянно для $z \in B(r/2)$. Более того, сегментная гомотопия $h_t : T \sim F$, $h_t(x) = tTx + (1-t)Fx$, обладает свойством $h_t(0) = 0 \notin h_t S(r)$. По основному свойству степени отсюда следует, что $\mu(0, F, B(r)) = \mu(0, T, B(r)) = 1$, так как T аффинно и сохраняет ориентацию. $\square$

Факт 8. *Продолжение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Из факта 7 следует, что $B(r/2) \subset F\mathbb{R}^n$ для всех $r > 0$, поэтому $F\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Чтобы показать, что F инъективно, положим $y \in \mathbb{R}^n$. Докажем, что $\#F^{-1}y = 1$, рассмотрев три случая. Напомним, что $B = \cup\{\partial\Delta : \Delta \in W\}$.

Случай 1. $y \in FA = fA$. Утверждение очевидно по факту 4.

Случай 2. $y \in FG \setminus FB$. Пусть $r > 2|y|$. По факту 7 имеем $\mu(y, F, B(r)) = 1$. Поэтому множество $B(r) \cap F^{-1}y$ непустое, а так как $F|G$ дискретно по факту 6, это множество конечно. В окрестности каждой точки этого множества отображение F аффинно и сохраняет ориентацию по факту 2. Значит,

$$1 = \mu(y, F, B(r)) = \sum\{i(x, f) : x \in B(r) \cap F^{-1}y\} = \#(B(r) \cap F^{-1}y).$$

Поскольку $r > 2|y|$ было произвольным, утверждение доказано.

Случай 3. $y \in FB$. Предположим, что $x_1, x_2 \in F^{-1}y$ и $x_1 \neq x_2$. Выберем непересекающиеся окрестности U_1, U_2 точек x_1, x_2 в G. По факту 8 множества FU_1 и FU_2 открыты. Так как FB не имеет внутренних точек, найдется точка $z \in FU_1 \cap FU_2 \setminus FB$, и из предыдущих случаев следует, что $\#F^{-1}z = 1$. Получили противоречие: $F^{-1}z$ пересекается как с U_1, так и с U_2.

Доказательство инъективности F завершено, и факт 8 доказан. $\square$

4.2. Завершающий шаг. Используя факты 5 и 8, видим, что продолжение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является $(1+C_2\varepsilon)$-липшицевым гомеоморфизмом при условии, что $\varepsilon \leq \delta(c, n)$. Осталось доказать, что F^{-1} также $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицево.

Предположим, что $[y, z] \subset FG$. Тогда $[y, z]$ может быть разбит на конечное число подотрезков J таких, что каждый J содержится в $F\Delta$ для некоторого $\Delta \in W$. По факту 2 сужение $F^{-1}|J$ будет $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицевым. Значит, $F^{-1}|FG$ локально $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицево, поэтому по лемме 3.14 обратное отображение F^{-1} будет $(1 + C_2\varepsilon)$-липшицевым.

Мы доказали, что F является $(1 + C_2\varepsilon)$-билипшицевым. Теорема 2.8 доказана с константами $C = C_2$ и $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3$. $\square$

4.3. Количественные оценки. Используя количественные оценки из [4, 3.8], можно показать, что теорема 2.8 верна с константами $C(c, 2) = 3 \cdot 10^{14}c^6$, $C(c, 3) = 8 \cdot 10^{24}c^7$ и $\delta(c, 2) = 1/C(c, 2)$, $\delta(c, 3) = 1/C(c, 3)$.

4.4. Открытые вопросы. Мы завершаем статью, формулируя несколько открытых проблем, связанных с нашими результатами.

(i) Жесткость есть достаточное условие для c-линейного свойства продолжимости билипшицевых отображений; является ли оно также необходимым (при некоторых дополнительных условиях)? Например, верно ли, что если множество A c-относительно связно в смысле [12], то A обладает c_1-линейным свойством продолжимости билипшицевых отображений тогда и только тогда, когда оно c_2-жесткое?

(ii) В общем случае билипшицево отображение $f : A \to \mathbb{R}^n$ не может быть продолжено на $\mathbb{R}^n$. В некоторых специальных случаях это возможно, поэтому мы задаем следующие вопросы. Пусть $L \geq 1$ и $f : A \to \mathbb{R}^n$ L-билипшицево. Имеет ли f L_1-билипшицево продолжение на $\mathbb{R}^n$ с константой $L_1 = L_1(L, n)$, если

(a) $A = \mathbb{Z}^n$

или в более общей ситуации

(b) $A \subset \mathbb{R}^n$ является (α, β)-сетью?

Если последний вопрос имеет положительный ответ, то константа L_1 должна также зависеть от α, β. Заметим, что (a) и (b) не так тесно связаны, как это может показаться, так как для каждого $n \geq 2$ найдется сеть $A \subset \mathbb{R}^n$, билипшицево не эквивалентная $\mathbb{Z}^n$ (см. [13, теорема 1.1 и замечание 1], а также [14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Väisälä J.* Bilipschitz and quasisymmetric extension properties // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser AI Math. 1986. V. 11. P. 239–274.

2. *Tukia P., Väisälä J.* Extension of embeddings close to isometries or similarities // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser AI Math. 1984. V. 9. P. 153–175.

3. *Partanen J., Väisälä J.* Extension of bilipschitz maps of compact polyhedra // Math. Scand. 1993. V. 72. P. 235–264.

4. *Alestalo P., Trotsenko D. A., Väisälä J.* Isometric approximation // Israel J. Math. 2001. V. 125. P. 61–82.

5. *Väisälä J., Vuorinen M., Wallin H.* Thick sets and quasisymmetric maps // Nagoya Math. J. 1994. V. 135. P. 121–148.
6. *Dold A.* Lectures on algebraic topology. Berlin: Springer, 1972.
7. *Rado T., Reichelderfer P. V.* Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer, 1955.
8. *Titus C. J., Young G. S.* The extension of interiority, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 329–340.
9. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1979.
10. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
11. *Троценко Д. А.* Продолжение пространственных квазиконформных отображений, близких к конформным // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 6. С. 126–133.
12. *Trotsenko D. A., Väisälä J.* Upper sets and quasisymmetric maps // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser AI Math. 1999. V. 42. P. 465–488.
13. *Burago D., Kleiner B.* Separated nets in Euclidean space and Jacobians of bi-Lipschitz maps // Geom. Funct. Anal. 1998. V. 8. P. 273–282.
14. *McMullen C.* Lipschitz maps and nets in Euclidean space // Geom. Funct. Anal. 1998. V. 8. P. 304–314.

Статья поступила 27 июня 2003 г.

P. Alestalo
Matematiikan laitos Teknillinen korkeakoulu
PL 1100 02015 TKK, Finland
pekka.alestalo@hut.fi

Троценко Дмитрий Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
trotsenk@math.nsc.ru

J. Väisälä
Matematiikan laitos Helsingin yliopisto
PL 4, Yliopistonkatu 5, 00014 Helsinki, Finland
jvaisala@cc.helsinki.fi