Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 512.552.4+512.554.32+512.664.2

АССОЦИАТИВНЫХ PI–АЛГЕБР, СОВПАДАЮЩИХ СО СВОИМ КОММУТАНТОМ, НЕ СУЩЕСТВУЕТ

А. Я. Белов

Аннотация: Показано, что ассоциативная PI-алгебра (не обязательно конечно порожденная) не совпадает со своим коммутантом. Тем самым решена проблема И. В. Львова, поставленная им в Днестровской тетради.

Указанный результат вытекает из того факта (который также устанавливается в данной работе), что в любом T-первичном многообразии выполняется слабое тождество и существует центральный полином (существование центрального полинома ранее было установлено А. Р. Кемером). Кроме того, показывается устойчивость T-первичных многообразий (для случая нулевой характеристики это сделано ранее С. В. Охитиным, который опирался на классификацию T-первичных многообразий, полученную А. Р. Кемером).

Ключевые слова: PI-алгебра, многообразие алгебр, тождество, устойчивое многообразие, слабое тождество, тождество со следом, формы, тождество Капелли, T-первичное многообразие, уравнение Гамильтона — Кэли, центральный многочлен.

Памяти Игоря Владимировича Львова посвящается

§ 1. Введение

Важнейшим примером ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики, совпадающей со своим коммутантом, служит алгебра дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Однако в этой алгебре нет нетривиальных полиномиальных тождеств. В случае же положительной характеристики $p > 0$ основного поля нетривиальные тождества появляются (алгебра дифференциальных операторов от n переменных порождает то же многообразие, что и алгебра матриц порядка p^n с бесконечным центром), однако свойство совпадения со своим коммутантом теряется.

Тем не менее в положительной характеристике $p > 0$ удается сконструировать ассоциативную алгебру, совпадающую со своим коммутантом. Такая алгебра легко строится индуктивно с помощью следующего соображения. Коммутант алгебры матриц — это в точности матрицы с нулевым следом, а след любой матрицы, состоящей из p одинаковых блоков, идущих вдоль главной диагонали, равен нулю. Поэтому любая конечномерная алгебра A для любого $x \in A$ допускает конечномерное расширение элементами z, t такими, что $[z, t] = x$. Однако в построенной таким образом алгебре никаких нетривиальных тождеств не выполняется.

В этой связи И. В. Львов поставил в Днестровской тетради [1] следующий

Вопрос. *Существует ли PI-алгебра A, совпадающая со своим коммутантом $[A, A]$?*

Основная теорема данной работы дает на него ответ.

Теорема 1. *Не существует ассоциативной PI-алгебры, совпадающей со своим коммутантом.*

Напомним, что алгебра A называется *PI-алгеброй*, если в ней выполняется некоторое нетривиальное тождество. Это значит, что многочлен вида

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)}$$

(коэффициенты $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$ не все нули) обращается в нуль при подстановке любых элементов алгебры A вместо переменных x_i.

Множество многочленов, тождественно обращающихся в нуль на алгебре, замкнуто относительно операции подстановки многочлена вместо переменных и, кроме того, образует идеал в кольце (некоммутативных) многочленов. Такой идеал называется *T-идеалом.* Известно, что множество всех T-идеалов — это множество идеалов, устойчивых относительно всех эндоморфизмов. Класс алгебр, в котором выполняется некоторый набор тождеств, называется *многообразием*, а свободный объект в этом многообразии — *относительно свободной алгеброй.* В относительно свободной алгебре T-идеалы также являются идеалами, устойчивыми относительно всех эндоморфизмов.

А. Р. Кемер ввел понятие *T-первичного* идеала [2, 3]. Это T-идеал I, в факторе по которому нет двух ненулевых T-идеалов с нулевым произведением (равносильное определение: включение $I_1 I_2 \subset I$, где I_1, I_2 — T-идеалы), влечет одно из включений $I_1 \subset I$ либо $I_2 \subset I$. *T-первичным* называется многообразие алгебр, отвечающее T-первичному идеалу тождеств. Это понятие, впервые введенное А. Р. Кемером, есть аналог классического понятия первичности.

Пусть $\mathrm{Var}(A)$ — многообразие, порожденное алгеброй A, т. е. многообразие, отвечающее множеству тождеств, выполняющихся в A. Первый шаг доказательства основной теоремы 1 заключается в сведении ситуации к случаю, когда $\mathrm{Var}(A)$ есть T-первичное многообразие. Для этого нам потребуется распространение некоторых классических «идеальных» конструкций на T-идеалы.

Предложение 2. *Каждый T-идеал, задающий ненильпотентное многообразие ассоциативных алгебр, содержится в максимальном T-идеале, обладающем этим свойством.*

Доказательство. Условие ненильпотентности многообразия равносильно тому, что соответствующий T-идеал содержит полилинейное слово. Ясно, что объединение возрастающей цепочки T-идеалов, не содержащих полилинейных слов, снова обладает этим свойством. Поэтому в силу леммы Цорна любой T-идеал Γ с ненильпотентным фактором содержится в максимальном T-идеале J, обладающем этим свойством. T-первичность J следует из того обстоятельства, что нильпотентность A/J_1 и A/J_2 влечет нильпотентность $A/J_1 J_2$, и если J_1, J_2 строго содержат J, то их произведение не может содержаться в J.

Замечание. Пусть A — «квазипервичная» алгебра в следующем инвариантном смысле. Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор элементов A такой, что любая перестановка $X \to X$ продолжается до эндоморфизма алгебры A. Тогда если множество X не порождает нильпотентного идеала, то существует фактор $\overline{A} = A/I$, порождающий T-первичное многообразие, причем проекция множества X порождает ненильпотентный идеал. В качестве I можно взять произвольный идеал, максимальный среди инвариантных относительно перестановок элементов из X идеалов, не содержащих полилинейных слов от элементов x_i.

Пусть $A = [A, A]$ есть PI-алгебра, совпадающая со своим коммутантом. Тогда среди всех таких алгебр есть универсальная алгебра B, порождающая многообразие $\mathrm{Var}(A)$, удовлетворяющая условиям предыдущего замечания. Тем самым мы имеем

Предложение 3. *Если существует PI-алгебра, совпадающая со своим коммутантом, то существует PI-алгебра, совпадающая со своим коммутантом, порождающая T-первичное многообразие.* $\square$

Замечание. При построении некоммутативной алгебраической геометрии путем непосредственного переноса классических конструкций надо ограничить рассмотрение «осмысленными» идеалами. Таковыми прежде всего являются идеалы, устойчивые относительно действия некоторой группы или полугруппы эндоморфизмов. Самый инвариантный идеал есть T-идеал, проблема Шпехта дает аналог теоремы Гильберта о базисе, а теорема Амицура — о нильпотентности радикала — теоремы Гильберта о нулях (другим аналогом теоремы о нулях могла бы служить «T-идеальная теорема Размыслова — Кемера — Брауна о нильпотентности радикала», установленная А. Р. Кемером для нулевой характеристики). Проведенная выше редукция к T-первичному случаю лежит в рамках этого некоммутативно-алгебро-геометрического подхода. В том же русле лежит и «супер-трюк» А. Р. Кемера, а также появление аналогов грассмановой алгебры в характеристике 2 при изучении проблемы конечной базируемости.

Определение 4. Полилинейный полином f называется *слабым тождеством*, если он не является тождеством, но становится таковым после подстановки коммутатора $[z, t]$ вместо некоторой переменной.

Если установить, что в T-первичном многообразии есть слабые тождества (теорема 5), то алгебра, порождающая такое многообразие, не может совпасть со своим коммутантом и теорема 1 оказывается доказанной. Итак, наша цель — в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 5. *В T-первичном многообразии ассоциативных алгебр есть слабые тождества.* $\square$

Попутно с этим мы получим такие результаты.

Теорема 6 А. Р. Кемер [4]. *В произвольном T-первичном многообразии существует центральный многочлен.*

Полином называется *центральным*, если он не является тождеством и все его значения лежат в центре алгебры.

Теорема 7. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр унитарно замкнуто* (*в положительной характеристике на полилинейном уровне*). $\square$

Ранее эта теорема была установлена А. Р. Кемером [4].

Определение 8. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *устойчивым*, если для любого тождества $f = \sum u_i x v_i$, линейного по переменной x, выполнимость f равносильна выполнимости тождества $f^* = \sum v_i x u_i$.

Понятие устойчивости было введено В. Н. Латышевым [5–7].

Теорема 9. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ устойчиво.*

Имеются в виду многообразия, отличные от всего многообразия ассоциативных алгебр. (Впрочем, многообразие всех ассоциативных алгебр также унитарно замкнуто и устойчиво, так что для теорем 7 и 9 эта оговорка не обязательна.)

В случае нулевой характеристики имеется классификация T-первичных многообразий. Это многообразия, порожденные соответственно бесконечно порожденной алгеброй Грассмана $\mathbb{G}$, алгеброй $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G}$, алгеброй общих матриц $\mathbb{M}_n$, а также алгеброй $\mathbb{M}^0_{n,k} \otimes \mathbb{G}^0 + \mathbb{M}^1_{n,k} \otimes \mathbb{G}^1$ — грассмановой оболочкой простой супералгебры $\mathbb{M}_{n,k}$. Все эти алгебры содержат единицу, и для них утверждения всех вышеперечисленных теорем хорошо известны [8]. Теорема 6 была установлена А. Р. Кемером [4], ранее для матричного случая — независимо Ю. П. Размысловым [9] и Э. Форманеком [10], кроме того, Ю. П. Размыслов установил эту теорему для нулевой характеристики. В нулевой характеристике теорема 7 очевидным образом следует из имеющейся в этом случае классификации T-первичных многообразий, а теорема 9 была доказана С. В. Охитиным [11].

Замечание. Первоначально понятие *устойчивости* определялось в нулевой характеристике, поэтому в монографии [8] содержится ссылка, что «в работе [11] доказана устойчивость T-первичных многообразий». На самом деле в указанной работе это сделано только в случае нулевой характеристики.

Все указанные выше теоремы для случая нулевой характеристики хорошо известны. Поэтому мы всегда считаем, что характеристика p основного поля $\mathbb{F}$ положительна. В случае положительной характеристики в PI-алгебре всегда выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка (см. [12]). Поэтому мы всегда это подразумеваем. В частности, вместо теоремы 7 будем доказывать следующее

Предложение 10. *T-первичное многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр, в котором выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка, унитарно замкнуто.* $\square$

Многочлен Капелли C_n порядка n представляет собой многочлен вида

$$C_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

При этом y_i называются *прокладками.* В неассоциативном случае (в том числе для алгебры произвольной сигнатуры Ω) под *системой полиномов Капелли C_n порядка n* понимается набор многочленов, полилинейных и кососимметричных относительно некоторого набора из n переменных $\{x_i\}$. Если в алгебре B каждый полином Капелли порядка n обращается в нуль, то говорим, что в B выполняется *система тождеств Капелли.* Система C_n выполняется во всех алгебрах размерности меньше n. Например, в алгебре матриц порядка n выполняется тождество C_{n^2+1} (но не выполняется C_{n^2}).

Отметим, что ряд результатов, относящихся к данной тематике, содержится в работах [4, 13–21].

Благодарности. Автор благодарен Л. А. Бокутю, который привлек его к исследованию проблемы И. В. Львова.

§ 2. Следы, формы и многочлены Капелли

Данный параграф посвящен технике работы с многочленами, развитой Ю. П. Размысловым, К. Прочези, А. Р. Кемером, К. А. Зубрилиным (который является учеником Ю. П. Размыслова), см. соответствующие источники в списке литературы.

Символ $D(A)$ означает операторную алгебру для алгебры A. Она порождена левыми и правыми умножениями на элементы из A, так что $D(A) \simeq A \otimes A^{op}$, где A^{op} — алгебра, антиизоморфная алгебре A. Пусть $a \in D(A)$ — элемент операторной алгебры для алгебры A. Для любого $x \in A$ определен элемент $a(x) \in A$.

Для алгебры матриц Ю. П. Размыслов установил следующие равенства:

$$\Phi^k(a)C_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_0, \dots, x_{n^2}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)|_{x_{i_1} = ax_{i_1}, \dots, x_{i_k} = ax_{i_k}}. \tag{1}$$

Здесь $\Phi^k(a)$ есть сумма главных (т. е. симметричных относительно главной диагонали) миноров порядка k матрицы a, рассматриваемой как линейный оператор в n^2-мерном пространстве; $\Phi_1 = \mathrm{Tr}$, $\Phi_{n^2} = \det$.

В частности,

$$n \,\mathrm{Tr}(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Zx_i}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \det(Z) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) &= C(Zx_1, \dots, Zx_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ &= C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Zx_i \forall i}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(Z_1) \,\mathrm{Tr}(Z_2) C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2}) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \dots, x_{n^2}; y_1, \dots, y_{n^2})|_{x_i = Z_1 x_i Z_2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тождество Гамильтона — Кэли ξ_n имеет вид

$$\xi_n(X) = X^n - \Phi_1(X) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \Phi_n(X),$$

где величины $\Phi_k(X)$ суть *элементарные формы*, $\Phi_k(X)$ — сумма главных (т. е. симметричных относительно диагонали) миноров матрицы X порядка k.

Известно, что все инварианты алгебры общих матриц являются многочленами от форм $\Phi_k(a_{i_1} \dots a_{i_k})$ (первая фундаментальная теорема), а соотношения между ними означают равенство нулю Φ_s, $s > n$, и вытекают из тождества Гамильтона — Кэли (вторая фундаментальная теорема). Для нулевой характеристики это было установлено Ю. П. Размысловым [18] и К. Прочези [22], для положительной характеристики — С. Донкиным [23–25] и А. Н. Зубковым [14].

Развитая для матричной алгебры теория позволяет работать с тождествами Капелли в достаточно общей ситуации.

Пусть многочлен $F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, $a \in A$. Определим операторы внутренних форм δ_a^k равенством

$$\delta_a^k(F) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)|_{x_{i_1} = ax_{i_1}, \dots, x_{i_k} = ax_{i_k}}; \quad \delta_a^0(F) = F. \tag{5}$$

Многочлен $\delta_a^k(F)$ есть однородная степени k по a компонента результата подстановки $F|_{(a(x_i)+x_i) \to x_i; i=1,\dots,n}$.

Нетрудно проверить, что

$$\delta_a^k(C_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 \dots x_{\sigma(i_1)} a y_{i_1} \dots x_{\sigma(i_k)} a y_{i_k} \dots y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

Поэтому многочлен $\delta_a^k(F)$ по-прежнему кососимметричен относительно набора переменных $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Положим $\mathrm{Tr}(a) = \delta_a^1$. Ясно, что $\mathrm{Tr}(a+b) = \mathrm{Tr}(a) + \mathrm{Tr}(b)$.

Операторы δ_a^k определены только на записях элементов, и результат их применения, вообще говоря, может зависеть от представления элемента алгебры A в виде многочлена F и выбора системы $\{x_i\}$. Если полином F полилинеен и кососимметричен по нескольким наборам, то, говоря об операторе δ_k, мы будем указывать, относительно какого набора он берется.

Пусть $n+1$ — минимальный порядок тождества Капелли, выполняющегося в алгебре A. Пусть $k \le n$. Для пары k-мерных векторов $(\vec{a}, \vec{b})$ определим оператор «смешанного объема» $\delta_k(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\delta_k(\vec{a}, \vec{b})[C_n(\vec{x}, \vec{y})] = \sum_{i_1 < \dots < i_k} C_n(\vec{x}, \vec{y})|_{x_{i_\alpha} = a_\alpha x_{i_\alpha} b_\alpha}. \tag{6}$$

Положим $\mathrm{Tr}(a, b) = \delta_1(a, b)$.

Из леммы 13 следует, что в T-первичном многообразии операторы внутренних форм коммутируют и, кроме того, определены корректно независимо от записи.

Операторы $\delta_k(\vec{a}, \vec{b})$ — линеаризации операторов внутренних форм, являющихся коэффициентами многочлена Гамильтона — Кэли. Точнее, $\delta_k(\vec{a}, \vec{b})$ есть полная линеаризация формы $\delta_k(a)$ $(a \in D(A))$.

Сформулируем основную лемму работы [26], которая служит аналогом теоремы Гамильтона — Кэли для операторов, определенных внутренним образом.

Лемма 11. *Пусть многочлен $F(y, \vec{z}, x_1, \dots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, а $a \in D(A)$ — элемент операторной алгебры (например, оператор умножения на $\bar{a}$). Тогда по модулю C_{n+1} выполняется равенство (теорема Гамильтона — Кэли)*

$$F(a^n(y), \vec{z}, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \delta_a^k(F(a^{n-k}(y), \vec{z}, x_1, \dots, x_n)). \tag{7}$$

Нам понадобится еще два утверждения из работы [26].

Предложение 12 (о переброске). (а) *Пусть в алгебре A выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, и пусть многочлен F полилинеен и кососимметричен по переменным $\{x_i\}_{i=1}^n$; $\{z_i\}_{i=1}^n$. Тогда значение $\delta_a^k(F)$ не зависит от того, какие группы переменных $\{x_i\}$ или $\{z_i\}$ используются, и операторы δ_a^k и δ_b^s коммутируют;*

(б) *более того, в этом случае* $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$.

Лемма 13. *Пусть $f(x_1, \dots, x_{2n})$ — многочлен, полилинейный и кососимметричный по наборам $x_1, \dots, x_n$ и $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$ и зависящий, быть может, от других переменных. Тогда*

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) - f(x_{n+1}, \dots, x_{2n}, x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \mod I,$$

где I есть сумма T-идеалов, порожденных полиномами, соответствующими диаграммам D со столбцом длины $n-k$ и другим столбцом длины $n+k$, $k = 1, \dots, n$.

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие, в котором выполняется тождество Капелли порядка $n+1$. Пусть многочлен $F(\vec{z}, x_1, \dots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен по переменным x_i, а $a, b \in D(A)$ — элементы операторной алгебры. Тогда операторы δ_a^k и δ_b^s коммутируют.* $\square$

Операторы $\delta_k(x)$ — это формы, определенные внутренним образом.

Нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 15 (о поглощении переменной). *Пусть в алгебре выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$. Многочлен F полилинеен и кососимметричен относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ и, кроме того, линеен по переменной z. Тогда выполняется равенство*

$$F(z, x_1, \dots, x_n, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} F(z, x_1, \dots, x_n, \vec{y})|_{z=x_i; x_i=z}. \tag{8}$$

Доказательство. Разность между правой и левой частями равенства есть многочлен из $\mathrm{T}(C_{n+1})$, полилинейный и кососимметричный по набору из $n+1$ переменных $\{z, x_1, \dots, x_n\}$.

И еще одно вспомогательное утверждение. Из свойств центроида Мартиндейла и центрального замыкания (см. [21]) получается

Предложение 16. *Пусть $A \in \mathfrak{M}$ — первичная алгебра, в которой выполняется система тождеств Капелли $(n+1)$-го порядка, но не выполняется система тождеств Капелли n-го порядка. Тогда A вкладывается в алгебру B, конечномерную над ассоциативно–коммутативным кольцом $\mathbb{K}$, таким образом, что для любого $a \in D(A)$ существует такое $\lambda(a) \in \mathbb{K}$, что для любого многочлена $F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)$, полилинейного и кососимметричного относительно $x_1, \dots, x_n$, выполняются равенства*

$$\sum_{i=1}^{n} F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)|_{a(x_i)\to x_i} = \lambda(a) \cdot F(\vec{y}, x_1, \dots, x_n).$$

При этом кольцо $\mathbb{K}$ порождено такими $\lambda(a)$ и является нётеровым.

Доказательство. В силу свойств центрального замыкания Мартиндейла достаточно убедиться, что если многочлен $F_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{z})$ полилинеен и кососимметричен относительно наборов переменных $x_1, \dots, x_n$ и $z_1, \dots, z_n$, то операция

$$F_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{z}) \to \sum_{i=1}^{n} F_{\vec{y}}(\vec{z}, x_1, \dots, x_n)|_{a(x_i)\to x_i}$$

задает морфизм $D(A)$-модулей ($D(A)$ — операторная алгебра), порожденных значениями F на T-идеале A, порожденном системой C_n. Последнее вытекает из леммы 13.

§ 3. Связь между следами и формами

Операторы форм в положительной характеристике, вообще говоря, не выражаются через следы. И для доказательства локальной конечной базируемости в положительной характеристике необходима теория тождеств с формами (см. [27, 28]). (Это связано с тем, что через многочлены вида $\sum x_i^k$ выражаются остальные симметрические многочлены только в случае нулевой характеристики.) Тем не менее на полилинейном уровне такое представление имеет место (см. предложение 17).

При изучении T-идеалов используется представление симметрической группы $\sigma \to \varphi(\sigma)$, которое связано с инвариантами. Оно введено Ю. П. Размысловым [8] и К. Прочези [22]. При этом соответствии разложению перестановки σ на циклы

$$\sigma = (i_{11}, \dots, i_{1k_1}), \dots, (i_{s1}, \dots, i_{sk_s})$$

отвечает моном со следом

$$\varphi(\sigma) = \mathrm{Tr}(x_{i_{11}} \dots x_{i_{1k_1}}) \dots \mathrm{Tr}(x_{i_{s1}} \dots x_{i_{sk_s}}).$$

Соответствие φ удобно тем, что умножение на элементы S_n согласовано с подстановками и тождество, отвечающее таблице D, для любой меньшей таблицы $D' \subset D$ есть следствие некоторого тождества, отвечающего D'. (Его неудобством является то, что следы не всегда определены. Их приходится имитировать путем нахождения «киллеров следов» или многочленов, умножение которых на след не выводит за пределы исходной алгебры (без следов).)

Следующее предложение есть основной результат данного параграфа.

Предложение 17. *Пусть $\delta_k(\vec{a})$ — полная линеаризация формы Φ_k, выражающей k-й коэффициент многочлена Гамильтона — Кэли. Тогда*

$$\delta_k(\vec{a}) = \psi\Big(\sum_\tau (-1)^\tau \tau\Big)\Big|_{a_i \to x_i}. \qquad (9)$$

Аналогичное утверждение верно и для линеаризаций форм σ_k, определенных внутренним образом.

Здесь ψ — оператор из групповой алгебры S_k в пространство, порожденное полилинейными словами от $\{x_1, \dots, x_k\}$, который определен в данном параграфе.

Доказательство. Сопоставим выражению $h = \delta_k(u_1, \dots, u_k)$ произведение следов $f(h) = \mathrm{Tr}(u_1) \dots \mathrm{Tr}(u_k)$. Если h полилинейно относительно переменных $x_1, \dots, x_n$ и не зависит от других переменных, то сопоставим h элемент $\varphi(h) \in S_n$, положив $\varphi(h) = \psi(f(h))$.

Пусть $\sigma, \tau \in S_n$, $f = \psi^{(-1)}(\sigma)$, $h = \varphi^{(-1)}(\tau)$. Рассмотрим действие соответствующих внутренних форм. Тогда члены, отвечающие h, появляются среди членов, отвечающих f с коэффициентами 0 или 1. При этом все эти коэффициенты равны 1, если подстановка σ получается из τ с помощью следующей операции: *каждый цикл τ режется на несколько частей и каждая часть замыкается в свой цикл.* Иначе все эти коэффициенты — нули.

Цикл длины n можно разрезать на k частей ровно $\binom{n-1}{k-1}$ способами, а набор циклов, длины которых равны $n_1, \dots, n_s$ соответственно, можно одновременно разрезать на $k_1, \dots, k_s$ частей $\prod_{i=1}^{s} \binom{n_i - 1}{k_i - 1}$ способами.

Заметим также, что четность перестановки из S_n равна числу циклов с учетом знака. Отсюда следует, что в разложении, отвечающем правой части равенства (9), проявляются следующие обстоятельства.

(α) Члены, отвечающие разложению левой части, встретятся с коэффициентом $+1$.

(β) Пусть $\tau \in S_n$ — перестановка, $n_1, \dots, n_s$ — ее циклы. Тогда члены, отвечающие разложению $\varphi^{-1}(\tau)$, встретятся с коэффициентом λ, равным

$$\sum_{k_1,\dots,k_s} (-1)^{n+\sum k_i} \prod_{i=1}^{s} \binom{n_i - 1}{k_i - 1}.$$

Остается заметить, что

$$\sum_{k_1,\dots,k_s} (-1)^{n+\sum k_i} \prod_{i=1}^{s} \binom{n_i - 1}{k_i - 1} = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} \sum_{k_i=1}^{n_i} \binom{n_i - 1}{k_i - 1}$$
$$= (-1)^{n+\sum n_i} \prod_{i=1}^{s} (1-1)^{n_i - 1}. \quad (10)$$

Это выражение обращается в нуль, если хотя бы одно из n_i больше 1 (полагаем $(1-1)^0 = 1$).

§ 4. Доказательства основных теорем

Известно, что функция следа в T-первичном многообразии может оказаться нулевой (примером может служить многообразие $\mathbb{M}_n(\mathbb{G})$, порожденное матрицами над бесконечной алгеброй Грассмана). Однако мы покажем наличие ненулевой формы.

Лемма 18. *Пусть многочлен $f(\vec{y}, x_1, \dots, x_n)$ полилинеен и кососимметричен относительно переменных x_i. Пусть $u_i \sqsupseteq z_i$ — слово, содержащее ровно одно вхождение переменной z_i и не содержащее вхождений z_j при $j \neq i$, $u_i = u_{i1} z_i u_{i2}$.*
Тогда многочлен

$$\tilde{f} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} f(\vec{y}, u_1, \dots, u_n)|_{z_i \to \sigma(z_i)}$$

есть линейная комбинация многочленов вида $\delta_i(\vec{a}, \vec{b})(g)$.

Доказательство. Легко видеть, что знак зависит только от расположения переменных из набора $\{z_i\}$ внутри монома, отвечающего моному многочлена f, и, кроме того, для каждого такого расположения переменных z_i все типы окружений $u_{\tau(i)1} * u_{\tau(i)2}$ для каждой перестановки τ встречаются по разу.

Таким образом, если некоторый многочлен f, удовлетворяющий условиям данной леммы, ненулевой, то имеется ненулевой оператор внутренней формы.

Напомним равенство (8) из леммы 15:

$$F(z, x_1, \dots, x_n, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} F(z, x_1, \dots, x_n, \vec{y})|_{z = x_i; x_i = z}.$$

Построим ненулевой многочлен вида $\tilde{f}$. Пусть f есть произвольный многочлен, полилинейный и кососимметричный относительно набора $\{x_1, \dots, x_n\}$. Зафиксируем переменную x_j и представим f в виде

$$f = \sum_i b_i x_j d_i.$$

Пусть многочлены R_1 и R_2 полилинейны и кососимметричны относительно наборов переменных $\{z_1,\dots,z_n\}$ и $\{y_1,\dots,y_n\}$ соответственно. Воспользовавшись равенством (8), получим

$$fR_1R_2 = \sum_i b_i x_j d_i R_1 R_2 = \sum_{i,k} b_i x_j y_k R_1 R_2|_{d_i\to y_k}$$
$$= \sum_k \sum_i b_i x_j y_k R_1 e_k d_i g_k = \sum_k f|_{x_j y_k R_1 e_k \to x_j} \cdot g_k.$$

Итак, мы добились того, что вместо любой выбранной переменной x_j оказалось подставлено образование, кососимметричное относительно некоторой группы переменных. Установлено следующее

Предложение 19. *Пусть $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие, в котором выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, но не порядка n. Пусть $g_i = C_n(\vec{y}_i,\vec{x}_i)$, $f = C_n(\vec{t},\vec{z})$, $h = f|_{g_i\to z_i}$. Тогда $h \not\equiv 0$ в $\mathfrak{M}$.* $\square$

Замечание. В доказательстве данного предложения существенно используется ассоциативность. Все другие рассуждения из данного параграфа легко переносятся на неассоциативную ситуацию. Более того, если для любого T-первичного подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$ справедливо предыдущее предложение и операция присоединения единицы не выводит из $\mathfrak{M}$, то отсюда будут следовать унитарная замкнутость T-первичных подмногообразий $\mathfrak{M}$ и существование центральных полиномов.

Пример. Пусть $\mathfrak{M}$ порождено простой алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_n$ с присоединенной единицей (полученная алгебра не является алгеброй Ли). Предыдущее предложение для многообразия $\mathfrak{M}$ не выполняется, хотя и выполняется для $\mathfrak{sl}_n$. И в многообразии $\mathfrak{M}$ центральных полиномов нет.

Из предыдущего предложения и леммы 15 вытекает такое

Следствие 20. *Пусть $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие, в котором выполняется система тождеств Капелли порядка $n+1$, но не n; g — полилинейный полином, не обращающийся в нуль на $\mathfrak{M}$; h получается из g путем подстановки в g вместо i-й переменной многочлена $C_n(\vec{x}_i,\vec{y}_i)$, причем множества переменных, участвующие в этих многочленах, не пересекаются. Тогда h также не обращается в нуль на $\mathfrak{M}$.* $\square$

Если к свободной счетно порожденной алгебре из T-первичного многообразия присоединить единицу, то получится также T-первичное многообразие. Пусть A' получается из A путем присоединения единицы. Тогда $A'[A',A']A' \subseteq A$. В частности, все значения многочлена C_n при $n>1$ в алгебре A' лежат в A. Поэтому в силу предложения 19 в многообразии $\mathfrak{M}'$ выполняется система тождеств Капелли того же порядка. Воспользуемся следствием 20. Таким образом, установлена унитарная замкнутость T-первичного многообразия, в котором выполняется система тождеств Капелли некоторого порядка (т. е. доказано предложение 10), а значит, и унитарная замкнутость произвольного T-первичного многообразия (теорема 7).

Пусть F полилинеен и кососимметричен относительно двух наборов переменных $\Lambda_1 = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $\Lambda_2 = \{z_i\}_{i=1}^n$.

Лемма 15 позволяет осуществлять поглощение не только переменной, но и **позиции**. А именно, зафиксируем позицию для переменных из Λ_1. Представим

F в виде суммы $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$, где F_i отвечает членам, у которых на данной позиции стоит переменная x_i. Пусть $\overline{H} = \Psi(F, G, \vec{y})$, где $G = C_n(\vec{t}, \vec{z})$ и Ψ линеен по первым двум аргументам, $H = \sum_i \Psi(F_i, G, \vec{y})$. Применим к каждому F_i равенство (8) из леммы 15 и проведем перегруппировку так, чтобы в каждой группе оказались члены с переменной z_j, $j = 1, \dots, n$, на зафиксированной позиции.

Пусть теперь H — многочлен, построенный в предложении 19. Разнеся $n-1$ позицию для переменных, относительно которых кососимметричен g_1, по многочленам $g_2, \dots, g_n$ (и оставив одну внутри g_1), мы получим линейную комбинацию многочленов вида

$$\tilde{f} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma f(\vec{y}, u_1, \dots, u_n)|_{z_i \to \sigma(z_i)},$$

удовлетворяющих условиям леммы 18. В силу предложения 19 все эти члены не могут обратится в нуль. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 21. *Пусть $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие. Тогда если основное поле имеет положительную характеристику либо $\mathfrak{M}$ регулярно, то в $\mathfrak{M}$ операторы* (*двусторонних*) *внутренних форм не все нулевые.* $\square$

(В случае нулевой характеристики данная теорема вытекает из классификации T-первичных многообразий.)

Перейдем к доказательству существования центрального полинома (т. е. теоремы 6). Расширим свободную алгебру из T-первичного многообразия $\mathfrak{M}$ операторами форм и единицей. Идеал, порожденный многочленом Капелли $C_n = \sum (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} t_1 \dots t_{n-1} x_{\sigma(n)}$, у расширенной и исходной алгебры совпадает. (Такой идеал называется «киллером форм».) Поэтому в силу T-первичности в алгебре с расширенной сигнатурой также выполняется система C_{n+1} (некоторые альтернируемые переменные могут находиться под операторами форм).

Пусть Ψ — ненулевая форма (т. е. многочлен от элементарных форм). Подставим вместо переменных, входящих в Ψ, значения полиномов Капелли $C_n(\{y_{ij}\}, \{x_{ij}\})$ (i — номер набора, а j — номер переменной в наборе) от попарно не пересекающихся наборов переменных. В силу предложения 19 получится ненулевое значение формы, которое обозначим через Ψ'. Ввиду унитарной замкнутости имеем $\Psi' \cdot 1 = \sum_j \Psi_j \cdot x_{1j}$. Полином с формами $\sum_j \Psi_j \cdot x_{1j}$ лежит в центре расширенной алгебры. Остается подставить вместо переменных x_{1j} значения полинома C_n на непересекающихся наборах переменных (между собой и с остальными переменными, участвующими в образовании формы Ψ). В силу предложения 19 получится ненулевой полином. При этом он лежит в исходной алгебре и централен.

Существование центрального полинома в T-первичном многообразии доказано.

Сформулируем еще одну теорему, которая вытекает из рассуждений данного параграфа.

Теорема 22. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$* (*вообще говоря, неассоциативных алгебр*) *T-первично и унитарно замкнуто, а операторная алгебра PI и операторы внутренних форм не обращаются в нуль тождественно. Тогда в многообразии $\mathfrak{M}$ есть центральный полином.* $\square$

Из данной теоремы и предложения 16, утверждающего возможность определить внутренние следы для операторных алгебр, получаем

Следствие 23. *Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ (вообще говоря, неассоциативных алгебр) порождено первичной конечномерной алгеброй с нетривиальным центром. Тогда в многообразии $\mathfrak{M}$ есть центральный полином.* $\square$

Замечания. 1. Заметим, что ассоциативная алгебра, порожденная операторами ad в простой конечномерной алгебре Ли, является простой и имеет нетривиальный центр. Рассматривая трехосновную алгебру $(L, \mathrm{ad}(L), U(L))$ и работая с внутренними следами операторов из $\mathrm{ad}(L)$, которые применяются к элементам алгебры Ли L, точно так же можно установить существование центрального полинома в многообразии пар $(L, U(L))$, где L — свободная алгебра Ли из многообразия, порожденного конечномерной простой алгеброй Ли, а $U(L)$ — ее универсальная обертывающая.

2. Если многочлен F полилинеен и кососимметричен относительно переменных из двух групп $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, то $F|_{ax_ib\to x_i \forall i} = F|_{ay_i\to y_i;\, x_ib\to x_i\, \forall i}$ по модулю $\mathrm{T}(C_{n+1})$. Поэтому можно «перебрасывать» «левые» и «правые» подстановки из одной группы n антикоммутирующих переменных на другую. (В алгебре матриц этим подстановкам отвечает оператор $\det(a)^n \det(b)^n$.) Однако подход, связанный с линеаризацией «внутреннего определителя» — подстановки $ax_ib \to x_i\ \forall i$, встречает трудности, поскольку левые и правые подстановки, возникающие при таких линеаризациях ($x_i \to x_ib_j$, $x_i \to a_jx_i$), ведут себя независимо и выражения устроены симметрично.

3. Итак, любое полилинейное T-первичное многообразие можно расширить операторами форм с сохранением набора тождеств. Если многочлен F имеет вид gz, где $g = \sum \alpha_k \Psi_k \in \mathrm{T}(C_n)$ есть многочлен от операторов форм, и в расширенной алгебре выполняется система тождеств C_{n+1}, то равенство (8) означает возможность оставить вне операторов форм только переменные из фиксированного конечного набора (входящего в g). Это обстоятельство можно рассматривать как своего рода «слабую представимость». При локализации относительно g она переходит в обычную представимость и все тождества совпадают с тождествами алгебры матриц.

Из унитарной замкнутости следует, что если T-первичное многообразие задано полилинейными тождествами, то в нем при любом n не выполняется тождество вида $x^n = 0$. Поскольку любое ненильпотентное многообразие имеет T-первичный фактор, из рассуждений в начале данного параграфа вытекает

Предложение 24. *Пусть $\mathfrak{M}$ — ненильпотентное многообразие, заданное своими полилинейными тождествами. Тогда в нем не выполняется тождество $x^n = 0$ при всех n.* $\square$

Тем самым ненильпотентные локально нильпотентные многообразия только полилинейными тождествами порождаться не могут, и мы имеем еще одно доказательство теоремы Нагаты — Хигмана для бесконечно порожденных алгебр над полем нулевой характеристики. В этом случае любое многообразие задается полилинейными тождествами и в ненильпотентном многообразии тождество $x^n \equiv 0$ выполняться не может.

Комбинируя результат данного предложения и леммы 11, имеем, что если $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие, в котором выполняется тождество Капелли порядка n и которое задано своими полилинейными тождествами, то для некоторого $k \le n$ оператор вида $\delta_k(a)$ ненулевой. Если $\mathfrak{M}$ нерегулярно, то $\delta_1(x) \equiv 0$. В любом случае (это будет показано ниже) полная линеаризация операторов δ_k выражается через следы — оператор δ_1. Поэтому в нерегулярном случае полная линеаризация операторов δ_k нулевая и, значит, $\delta_k(x) \equiv 0$ при $k < p = \operatorname{char}(\mathbb{F})$.

Продолжим изучение T-первичных многообразий.

Поскольку формы δ_k не все нулевые, из предложения 17 следует, что оператор $\delta(a,b) = \delta_1(a,b)$ ненулевой.

Предложение 25. *Имеет место равенство*

$$\delta([a_1,a_2],b) = \delta(a,[b_1,b_2]) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Из определения внутреннего следа непосредственно получаем равенство

$$[\delta(a,b),\delta(c,d)] = \delta([ac],bd) + \delta(ca,[bd]).$$

При этом $[\delta(a,b),\delta(c,d)] = 0$.

Пусть $w = w_1w_2 = u_1u_2$. Тогда из предыдущего тождества следует, что $\delta(ca,[w_1,w_2]) = \delta(ca,[u_1,u_2])$ и в силу унитарной замкнутости T-первичных многообразий имеет место тождество

$$\delta(a,[u_1,u_2] - [w_1,w_2]) \equiv 0.$$

Остается заметить, что $[x, y \cdot 1] = [x,y] - [xy,1]$.

Равенство $\delta([a_1,a_2],b) = 0$ доказывается аналогично.

Итак, определен ненулевой оператор $\operatorname{Tr}_b(a) = \delta(a,b)$, обладающий некоторым полезными свойствами оператора Tr, в частности $\operatorname{Tr}_b(a_1a_2) = \operatorname{Tr}_b(a_2a_1)$. Кроме того, из леммы 15, предложения 19 и следствия 20 вытекает

Предложение 26. *Пусть $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие над полем положительной характеристики, A — относительно свободная бесконечно порожденная алгебра из $\mathfrak{M}$. Тогда $h \neq 0$ в A тогда и только тогда, когда $\operatorname{Tr}_y(ax) \neq 0$ для некоторых x, y.* $\square$

Поскольку $\operatorname{Tr}_b([c,d]) \equiv 0$ и $\operatorname{Tr}_b(c) \not\equiv 0$, многочлен

$$g = \operatorname{Tr}_b(a)C_n = \sum_i C_n(\vec{x},\vec{y})|_{x_i \to ax_ib}$$

является слабым тождеством в T-первичном многообразии ранга n (т. е. в котором выполняется C_{n+1}, но не C_n).

Итак, существование слабых тождеств установлено, и теорема 5 доказана.

Замечание. Анализ рассуждений данного параграфа показывает, что для доказательства существования слабых тождеств достаточно, чтобы выполнялась система C_{n+1}, но n-я степень идеала, порожденного C_n, была ненулевой. Для существования центрального полинома достаточно, чтобы ненулевой была степень указанного идеала порядка n^2.

Поэтому для T-первичных многообразий в положительной характеристике работает техника двойственности. Докажем свойство устойчивости (т. е. теорему 9).

Доказательство. Напоминаем, что нам достаточно иметь дело только с положительной характеристикой и работать в случае, когда выполняется система тождеств Капелли.

Пусть $g = \sum_i c_ixd_i = 0$ в $\mathfrak{M}$, g линейно по переменной x. В силу предыдущего предложения это равносильно тому, что $\operatorname{Tr}_z(\sum_i c_ixd_iy) = 0$ для всех z.

Достаточно проверить равенство $\sum\limits_i d_i z c_i = 0$ для всех z. Тогда, специализировав z в x и воспользовавшись предыдущим предложением, получим $\sum\limits_i d_i x c_i = 0$, и условие устойчивости проверено.

Но $\operatorname{Tr}_z(\sum\limits_i c_i x \cdot d_i y) = \operatorname{Tr}_z(\sum\limits_i d_i y \cdot c_i x)$, откуда и получается требуемое.

Из предыдущей теоремы и неравенства нулю формы δ_1 для T-первичных многообразий над полем положительной характеристики вытекает

Следствие 27. *Если $\mathfrak{M}$ — T-первичное многообразие, то многообразие $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ регулярно.*

Доказательство. Для случая положительной характеристики это вытекает из устойчивости и наличия ненулевого следа в алгебре умножений $L[A] \otimes R[A]$ для относительно свободной алгебры A. При этом $L[A] \simeq A$, $R[A] \simeq A^{op}$ и в силу устойчивости $A^{op} \simeq A$.

Для случая нулевой характеристики это следует из классификации T-первичных многообразий, ибо $\mathbb{G} \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{1,1}$, $\mathbb{M}_{p,q} \otimes \mathbb{M}_{r,s} = \mathbb{M}_{pr+qs,ps+qr}$, $\mathbb{M}_{pq} \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{p+q} \otimes \mathbb{G}$ и $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G} \otimes \mathbb{M}_m \otimes \mathbb{G} = \mathbb{M}_{nm,nm}$.

Замечание. Чтобы определить след вне зависимости от параметра b, достаточно установить тождество $\delta(a,b)\delta(c,d) = \delta(c,b)\delta(a,d)$. Однако в случае грассмановой алгебры перестановка образующих ведет к умножению на -1 и данное тождество места не имеет. По той же причине в грассмановой алгебре $\delta(a,b) \not\equiv \delta(b,a)$.

Вместе с тем, поскольку $\operatorname{Tr}(L(a) \otimes R(b)) = \operatorname{Tr}(\delta_1(L(a) \otimes 1 \cdot 1 \otimes R(b)) = \operatorname{Tr}(\delta_1(L(a)\otimes 1)\operatorname{Tr}(1\otimes R(b)) - \delta_2(1\otimes R(b)), L(a)\otimes 1)$, в операторах форм переменные a, b в слабом смысле разделяются. В сильном смысле они не могут разделиться, ибо тогда будут ненулевыми и операторы внутреннего следа, что невозможно в нерегулярном случае.

В нерегулярном случае $\operatorname{Tr}_b(Z) = 0$ для любого центрального элемента Z. Иначе можно определить односторонние следы.

Примеры. 1. Пусть $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathbb{G} = \mathbb{G}^0 + \mathbb{G}^1$ — бесконечно порожденная алгебра Грассмана с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда в $\mathbb{G}$ выполняется тождество Капелли порядка $p+1$, но не порядка p. Если подставлять в C_p специализации переменных из $\mathbb{G}^0$ и $\mathbb{G}^1$, то ненулевой результат получается, если одна из переменных имеет четную специализацию, а $p-1$ нечетную. Легко видеть, что если $a \in \mathbb{G}^0$ или $b \in \mathbb{G}^0$, то $\operatorname{Tr}_b(a) = 0$. Если же $a, b \in \mathbb{G}^1$, то $\operatorname{Tr}_b(a)$ есть оператор умножения на $2ab$. (Если $a, b \in \mathbb{G}^1$, то в $p-1$ случае $a x_i b = -a b x_i$ и в одном случае $a x_i b = -a b x_i$ для переменной x_i с четной специализацией $ab \in \mathbb{G}^0 \subset Z(\mathbb{G})$.) Легко видеть, что $\operatorname{Tr}_b(a)$ — оператор умножения на коммутатор $[a,b]$.

2. Пусть $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$, $\mathbb{G}$ — грассманова алгебра в характеристике 2, т. е. бесконечно порожденная алгебра с единицей, образующими x_i и соотношениями $[x_i, x_j] = \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j$; $\varepsilon_i^2 = 0$, ε_i — центральные переменные. Непосредственно проверяется, что тогда в алгебре $\mathbb{G}$ выполняется тождество C_5, но не выполняется C_4. Кроме того, $\operatorname{Tr}_{x_i}(x_j) = \varepsilon_i \varepsilon_j R(x_i x_j)$, где $R(u)$ — оператор правого умножения на u. Таким образом, и в этом случае $\operatorname{Tr}_b(a)$ есть оператор умножения на коммутатор $[a,b]$.

3. Пусть $\operatorname{char}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathfrak{M} = \operatorname{Var}(\mathbb{M}_{nk})$. Тогда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество Капелли порядка $n^2 + k^2 + 2nk(p-1) + 1$, но не порядка $n^2 + k^2 + 2nk(p-1) \equiv (n-k)^2 (\mod p)$. В этом случае $\operatorname{Tr}(1) = \delta_1(1) = (n-k)^2$, если его определять

внутренним образом через подстановки. Если же его нормировать, разделив на максимальный порядок многочлена Капелли, не выполняющегося в алгебре (см. равенства (2)), то получится, что $\mathrm{Tr}(1) = n - k$ — ожидаемый результат.

4. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) > 2$, $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{G})$. Тогда в $\mathfrak{M}$ выполняется тождество Капелли порядка $n^2p + 1$, но не порядка n^2p. В этом случае

$$\mathrm{Tr}_x(y) = \sum_i [x_{ii}, y_{ii}]$$

и $\mathrm{Tr}_y(1) = \mathrm{Tr}_1(y) = 0$.

Известно, что в устойчивом многообразии наличие центральных полиномов равносильно наличию слабых тождеств [8]. Это позволяет указать явно центральные полиномы.

Пусть $Z = \sum\limits_i c_i x d_i \neq 0$ — центральный полином, т. е. $[Z, t] \equiv 0$ или

$$0 \equiv \mathrm{Tr}_b\Big(\sum_i c_i x d_i t y - \sum_i t c_i x d_i y\Big) = \mathrm{Tr}_b\Big(\sum_i d_i [y, t] c_i x\Big),$$

что равносильно условию $\sum\limits_i d_i [y, t] c_i \equiv 0$, но в силу предложения 26

$$\mathrm{Tr}_b(Zy) \not\equiv 0, \quad 0 \neq \mathrm{Tr}_b(Z) = \mathrm{Tr}_b\Big(\sum_i d_i y c_i x\Big) \not\equiv 0,$$

последнее неравенство вновь в силу предложения 26 равносильно условию

$$\sum_i d_i y c_i \neq 0.$$

Мы построили слабое тождество $h = \sum\limits_i d_i y c_i$.

Можно действовать и в обратном направлении. Если $h = \sum\limits_i d_i y c_i \neq 0$, но $\sum\limits_i d_i [y, t] c_i \equiv 0$, то $\tilde{h} = \sum\limits_i c_i x d_i$ — центральный полином. Пусть

$$h = \mathrm{Tr}_b(y) \cdot C_n(\vec{t}, \vec{z}),$$

тогда соответствующий центральный полином $\tilde{h}$ можно указать явно:

$$\tilde{h} = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\sigma(i) = k} (-1)^\sigma (-1)^k b t_k z_{\sigma(k+1)} \dots z_{\sigma(n)} t_n x t_0 z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(k-1)} t_{k-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Днестровская тетрадь*: оперативно-информационный сб. 4-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1993.
2. *Кемер А. Р.* Нематричные многообразия, многообразия со степенным ростом и конечно порожденные PI-матрицы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1981.
3. *Кемер А. Р.* Идеалы тождеств ассоциативных алгебр: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Барнаул, 1988. Перевод на англ.: Ideals of identities of associative algebras. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Transl. Math. Monogr.; 87).
4. *Kemer A. R.* On the multilinear components of the regular prime varieties // Methods in ring theory. New York: M. Dekker, 1998. P. 171–183. (Lecture Notes Pure Appl. Math.; V. 138).
5. *Латышев В. Н.* Нематричные многообразия ассоциативных алгебр: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1977.

6. *Латышев В. Н.* О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 5. С. 1010–1037.

7. *Латышев В. Н.* Устойчивые идеалы тождеств // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 5. С. 563–570, 600.

8. *Размыслов Ю. П.* Тождества алгебр и их представлений. М.: Наука, 1989.

9. *Размыслов Ю. П.* Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 3. С. 483–501.

10. *Formanek E.* Central polynomials for matrix rings // J. Algebra. 1972. V. 23, N . P. 129–133.

11. *Охитин С. В.* Об устойчивых T-идеалах и центральных полиномах // Вестн. МГУ. Сер. математика механика. 1986. № 3. С. 85–89.

12. *Kemer A. R.* Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5, N 2. P. 189–197.

13. *Белов А. Я.* О нешпехтовых многообразиях // Фунд. и прикл. математика. 1999. Т. 5, № 1. С. 47–66.

14. *Зубков А. Н.* Об одном обобщении теоремы Размыслова — Прочези // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 433–457.

15. *Зубрилин К. А.* Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 3. С. 53–64.

16. *Размыслов Ю. П.* Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 143–166.

17. *Размыслов Ю. П.* О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 337–360.

18. *Размыслов Ю. П.* Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1974. Т. 38, № 4. С. 723–756.

19. *Braun A.* The radical in a finitely generated PI-algebra // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7, N 2. P. 385–386.

20. *Procesi C.* Rings with polynomial identities. New York: Acad. Press, 1973.

21. *Rowen L. H.* Polynomial identities in ring theory. New York: Acad. Press, 1980.

22. *Procesi C.* The invariant theory of $n \times n$ matrices // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 306–381.

23. *Donkin S.* On tilting modules for algebraic groups // Math. Z. 1993. Bd. 212, N 1. S. 39–60.

24. *Donkin S.* Invariant functions on matrices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1993. V. 113, N 1. P. 23–43.

25. *Donkin S.* Invariants of several matrices // Invent Math. 1992. V. 110, N 2. P. 389–401.

26. *Зубрилин К. А.* О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли // Фунд. и прикл. математика. 1995. Т. 1, № 2. С. 409–430.

27. *Кемер А. Р.* Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 726–753.

28. *Белов А. Я.* Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2002

Статья поступила 12 мая 2003 г.

Белов Алексей Яковлевич
International University of Bremen, Germany, Bremen, Campus Ring 1;
Московский институт открытого образования, Авиационный пер., 6, Москва 119002

kanel@mccme.ru