Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2003. Том 44, № 6

УДК 512.66

О КОМПАКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

В. И. Кузьминов, И. А. Шведов

Аннотация: Найдены достаточные условия компактной разрешимости дифференциалов эллиптического дифференциального комплекса на некомпактном римановом многообразии. В качестве основного примера рассмотрен комплекс де Рама дифференциальных форм на многообразии с цилиндрическими концами.

Ключевые слова: эллиптический дифференциальный комплекс, компактно разрешимый оператор, дифференциальная форма, оператор внешнего дифференцирования.

В этой работе оператором $T : A \to B$ будем называть произвольное линейное отображение, заданное на линейном подпространстве $\operatorname{Dom} T$ векторного пространства A и принимающее значения в векторном пространстве B. Для произвольного оператора $T : A \to B$ обозначим через $T^{-1} : B \to A/\operatorname{Ker} T$ оператор, определенный следующими условиями: $\operatorname{Dom} T^{-1} = \operatorname{Im} T$, оператор $T^{-1}T$ совпадает на $\operatorname{Dom} T$ с канонической проекцией $\pi : A \to A/\operatorname{Ker} T$.

Замкнутый оператор $T : A \to B$, действующий из банахова пространства A в банахово пространство B, называется *компактно разрешимым*, если оператор T^{-1} компактен. Для каждого компактно разрешимого оператора T подпространство $\operatorname{Im} T$ замкнуто в B. Другими словами, каждый компактно разрешимый оператор нормально разрешим.

Интерес к компактно разрешимым операторам вызван, в частности, тем, что дифференциалы положительных порядков эллиптического дифференциального комплекса на компактном многообразии без края являются компактно разрешимыми операторами. Кроме того, свойство компактной разрешимости оператора имеет прямое отношение к дискретности спектра этого оператора, а именно самосопряженный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве, имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда он компактно разрешим и $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

Если многообразие, на котором задан дифференциальный эллиптический комплекс, некомпактно, то дифференциалы этого комплекса, вообще говоря, не являются компактно разрешимыми операторами. Простейшим примером является оператор дифференцирования, действующий в пространстве L_2 на вещественной прямой. Компактная разрешимость дифференциалов эллиптического

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00795) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (грант № 00–15–96165).

комплекса на компактном многообразии с краем зависит от выбора граничных условий.

В этой работе мы находим условия, при выполнении которых дифференциалы эллиптического комплекса, действующие в весовых L_p-пространствах на римановом многообразии, компактно разрешимы. Детально разобран случай дифференциала d^0 комплекса де Рама на многообразии с цилиндрическими концами.

Пусть A, B — банаховы пространства, $T : A \to B$ — замкнутый оператор. Пространство $\operatorname{Dom} T$ будем считать снабженным нормой графика: $\|a\|_{\operatorname{Dom} T} = \left(\|a\|_A^2 + \|Ta\|_B^2\right)^{1/2}$.

Лемма 1 [1]. *Оператор $T : A \to B$ компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактен оператор $q : \operatorname{Dom} T \to A/\operatorname{Ker} T$, представляющий собой композицию оператора вложения $\operatorname{Dom} T \subset A$ и канонической проекции $A \to A/\operatorname{Ker} T$.*

Лемма 2. *Оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда для каждой ограниченной в $\operatorname{Dom} T$ последовательности a_n и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют два различных номера m и n и $z \in \operatorname{Ker} T$ такие, что $\|a_n - a_m - z\|_A \le \varepsilon$.*

Доказательство. Эта лемма вытекает из леммы 1 и следующего простого факта: множество M в полном метрическом пространстве относительно компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности a_n в M найдутся два таких различных номера m и n, что $\rho(a_n, a_m) \le \varepsilon$. Лемма доказана.

Пусть M — гладкое (класса C^∞) многообразие (без края), μ — мера на M, локально эквивалентная в картах многообразия M мере Лебега, E — гладкое эрмитово расслоение на M, $p > 0$ — вещественное число.

Пространство $L^p(E, \mu)$ состоит по определению из всех тех измеримых сечений u расслоения E, для которых $\|u\|_{L^p} = \big(\int\limits_M |u|^p d\mu\big)^{1/p} < \infty$. Пространство $L^p(E, \mu)$ снабжено нормой $\|\cdot\|_{L^p}$.

Наряду с $L^p(E, \mu)$ будем рассматривать и другие общеупотребительные функциональные пространства сечений расслоения E. А именно:

$\mathscr{D}(E)$ — пространство гладких сечений с компактными носителями;

$\mathscr{E}(E)$ — пространство гладких сечений;

$L^p_{\mathrm{loc}}(E)$ — пространство тех сечений, которые, будучи умноженными на любую гладкую функцию с компактным носителем, принадлежат пространству $L^p(E, \mu)$;

$H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(E)$ — пространство Соболева сечений расслоения E ($s \ge 0$ целое);

$\mathscr{D}'(E)$ — пространство E-значных распределений.

Для компакта $K \subset M$ обозначим через $H^{s,p}_K(E)$ подпространство пространства $H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(E)$, образованное сечениями из $H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(E)$ с носителями в K.

При выбранных эрмитовой структуре на E и мере μ на M пространство $\mathscr{D}'(E)$ отождествляется с пространством непрерывных линейных функционалов, заданных на пространстве $\mathscr{D}(E)$, в этом случае пространство $L^p_{\mathrm{loc}}(E, \mu)$ можно считать вложенным в $\mathscr{D}'(E)$. Функции $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(E, \mu)$ соответствует непрерывный функционал на $\mathscr{D}(E)$, заданный формулой $f(v) = \int\limits_M (v, f) d\mu$.

Отметим еще, что $H^{0,p}_{\mathrm{loc}}(E) = L^p_{\mathrm{loc}}(E)$, пространства $H^{s,p}_K(E)$ нормируемы, норма пространства $H^0_{p,K}(E)$ совпадает с нормой $\|\cdot\|_{L^p}$.

Пусть E, F — эрмитовы расслоения над M, $P \in do_m(E \to F)$ — дифференциальный оператор порядка m. Формальный дифференциальный оператор P можно рассматривать как оператор, действующий в различных пространствах сечений. Он переводит непрерывно $\mathscr{D}(E)$ в $\mathscr{D}(F)$, $\mathscr{D}'(E)$ в $\mathscr{D}'(F)$, $H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(E)$ в $H^{s-m,p}_{\mathrm{loc}}(F)$. Вложения $L^p(E,\mu)$ в $\mathscr{D}'(E)$ и $L^p(F,\mu)$ в $\mathscr{D}'(F)$ позволяют рассматривать P как оператор, действующий из $L^p(E,\mu)$ в $L^p(F,\mu)$, с $\mathrm{Dom}\, P = \{u \in L^p(E,\mu) : Pu \in L^p(F,\mu)\}$, причем значения Pu понимаются в смысле распределений.

Функциональное пространство сечений расслоения называется *полулокальным* (в смысле Хёрмандера), если оно инвариантно относительно операции умножения на гладкие функции с компактными носителями.

Лемма 3. *Если пространство $W_p = \mathrm{Dom}(P : L^p(E,\mu) \to L^p(F,\mu))$ полулокально, то оператор $\alpha : W_p \to W_p$ умножения на гладкую функцию α с компактным носителем непрерывен.*

Доказательство. Оператор $\alpha : W_p \to \mathscr{D}'(E)$ непрерывен и поэтому имеет замкнутый график. Но тогда замкнутый график имеет и оператор $\alpha : W_p \to W_p$. Так как пространство W_p банахово, то по теореме о замкнутом графике оператор $\alpha : W_p \to W_p$ непрерывен. Лемма доказана.

Для произвольного подпространства Γ пространства W_p обозначим через $P_\Gamma : L^p(E,\mu) \to L^p(F,\mu)$ оператор с областью задания $\mathrm{Dom}\, P_\Gamma = \Gamma$, совпадающий на Γ с оператором P. Операторы P_Γ естественно возникают в связи с краевыми задачами для оператора P. Подпространство пространства W_p, образованное сечениями, удовлетворяющими краевым условиям, как правило, замкнуто и содержит все сечения из W_p, носители которых компактны и содержатся в M. Будем говорить, что подпространство Γ пространства W_p *задано идеальными краевыми условиями*, если оно замкнуто и содержит все сечения из W_p с компактными носителями.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{E} = (E^j, P^j)$ — эллиптический дифференциальный комплекс на многообразии M, E^j — эрмитовы векторные расслоения, $P^j \in do_{m_j}(E^j \to E^{j+1})$, $m_j > 0$, k — фиксированное целое число, $W_p = \mathrm{Dom}(P^k : L^p(E^k,\mu) \to L^p(E^{k+1},\mu))$, Γ — подпространство в W_p, заданное идеальными краевыми условиями. Предположим, что пространство W_p полулокально. Тогда оператор P^k_Γ компактно разрешим в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие (α)*: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компакт $K \subset X$ и константа $C > 0$ такие, что для каждого $u \in \Gamma$ существует такое $v \in \Gamma$, что

$$P^k_\Gamma u = P^k_\Gamma v, \quad \|v\|_{L^p} \le C\|u\|_{W_p} \quad \text{и} \left(\int\limits_{M\setminus K} |v(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon \|u\|_{W_p}.$$

Доказательство. Пусть условие (α) выполнено, u_i — последовательность в Γ, $\|u_i\|_{W_p} \le 1$, $\varepsilon > 0$. Выберем компакт K и константу C такими, как в условии (α). Для каждого i выберем $v_i \in \Gamma$ так, что

$$P^k_\Gamma u_i = P^k_\Gamma v_i, \quad \|v_i\|_{L^p} \le C, \quad \left(\int\limits_{M\setminus K} |v_i|^p d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon.$$

Пусть $a : M \to [0,1]$ — гладкая функция, равная 1 на K и 0 вне некоторого компакта $K_1 \subset M$. Так как по лемме 3 оператор $a : W_p \to W_p$ ограничен и $av_i \in \Gamma$ для каждого i, то av_i — ограниченная последовательность в Γ.

По теореме о параметриксе для эллиптических комплексов [2] существуют собственные (классические) псевдодифференциальные операторы $R^j : \mathscr{D}'(E^j) \to \mathscr{D}'(E^j)$ и $V^j : \mathscr{D}'(E^j) \to \mathscr{D}'(E^{j-1})$ такие, что $R^j \in pdo_{-\infty}(E^j \to E^j)$, $V^j \in pdo_{-m_{j-1}}(E^j \to E^{j-1})$, причем

$$P^{k-1}V^k u + V^{k+1}P^k u = u - R^k u$$

для любого $u \in \mathscr{D}'(E^k)$. Произвольный псевдодифференциальный оператор из $pdo_{-m}(E \to F)$ действует непрерывно из $H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(E)$ в $H^{s+m,p}_{\mathrm{loc}}(F)$ [3, п. 2.3.2.5]. А так как операторы R^j и V^j собственные, существует такой компакт $K_2 \subset M$, для которого операторы $R^k : H^{0,p}_{K_1}(E^k) \to H^{m_k,p}_{K_2}(E^k)$ и $V^{k+1} : H^{0,p}_{K_1}(E^{k+1}) \to H^{m_k,p}_{K_2}(E^k)$ определены и непрерывны. По теореме вложения Соболева [4, п. 4.6.2] вложение $H^{m_k,p}_{K_2}(E^k) \to H^{0,p}_{K_2}(E^k)$ компактно. Нормы в пространствах $H^{0,p}_{K_2}(E^j)$ эквивалентны норме $\|\cdot\|_{L^p}$. Следовательно, оператор $V^{k+1}P^k + R^k$ переводит каждую ограниченную в W_p последовательность сечений, носители которых содержатся в K_1, в последовательность, из которой можно извлечь сходящуюся в $L^p(E^k,\mu)$ подпоследовательность. В частности, из последовательности $V^{k+1}P^k(av_i) + R^k(av_i)$ можно извлечь сходящуюся в $L^p(E^k)$ подпоследовательность. Поэтому найдутся два таких различных номера i и j, что

$$\|V^{k+1}P^k(av_j) + R^k(av_j) - V^{k+1}P^k(av_i) - R^k(av_i)\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Пусть $w_i = (1-a)v_i + R^k(av_i) + V^{k+1}P^k(av_i)$. Тогда $P^k w_i = P^k v_i = P^k u_i$ и $w_i \in \Gamma$, поскольку вне компакта K_2 сечения w_i и v_i совпадают. Для каждого i

$$\|(1-a)v_i\|_{L^p} \le \Bigg(\int\limits_{X\setminus K} ((1-a)|v_i|)^p d\mu\Bigg)^{1/p} < \varepsilon.$$

Поэтому $\|w_i - w_j\|_{L^p} \le 3\varepsilon$. По лемме 2 оператор P^k_Γ нормально разрешим.

Допустим теперь, что условие (α) нарушено. В этом случае существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $C > 0$ и компакта $K \subset M$ найдется такое $u \in \Gamma$, что $\|u\|_{W_p} \le 1$ и для любого $v \in \Gamma$, удовлетворяющего условию $P^k v = P^k u$, либо $\|v\|_{L^p} \ge C$, либо $\big(\int\limits_{X\setminus K} |v|^p\, d\mu\big)^{1/p} > \varepsilon$.

Построим по индукции последовательность u_i в Γ, обладающую следующими свойствами: $\|u_i\|_{W_p} \le 1$ для каждого i, $\|u_i - u_j - z\|_{L^p} \ge \varepsilon/2$ для любых $i \ne j$ и $z \in \operatorname{Ker} P^k_\Gamma$. Пусть u_i при $1 \le i \le N$, удовлетворяющие указанным условиям, построены. Поскольку $\|u_i\|_{L^p} < \infty$, найдется такой компакт $K \subset M$, что

$$\Bigg(\int\limits_{X\setminus K} |u_i|^p d\mu\Bigg)^{1/p} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $i = \overline{1,N}$. Пусть $C = 1 + \varepsilon$. Так как условие (α) нарушено, существует такое $u_{N+1} \in \Gamma$, что $\|u_{N+1}\|_{W_p} \le 1$ и для любого $z \in \operatorname{Ker} P^k_\Gamma$ либо $\|u_{N+1} + z\|_{L^p} \ge C$, либо $\big(\int\limits_{X\setminus K} |u_{N+1} + z|^p\, d\mu\big)^{1/p} \ge \varepsilon$. В первом случае

$$\|u_{N+1} - u_i + z\|_{L^p} \ge \|u_{N+1} + z\|_{L^p} - \|u_i\|_{L^p} \ge \varepsilon$$

для $i = \overline{1, N}$. Во втором случае

$$\|u_{N+1} - u_i + z\|_{L^p} \geq \Bigl(\int\limits_{X \setminus K} |u_{N+1} + z - u_i|^p d\mu \Bigr)^{1/p}$$

$$\geq \Bigl(\int\limits_{X \setminus K} |u_{N+1} + z|^p d\mu \Bigr)^{1/p} - \Bigl(\int\limits_{X \setminus K} |u_i|^p d\mu \Bigr)^{1/p} \geq \varepsilon/2.$$

Последовательность u_i построена. По лемме 2 оператор P_Γ^k не компактно разрешим. Теорема доказана.

Замечание. Пространство W_p полулокально в каждом из следующих двух случаев: (a) P — оператор первого порядка; (b) символ оператора P^k инъективен. Действительно, в случае (a) оператор P^k в локальных картах многообразия M имеет вид

$$P^k u = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B(x).$$

Для гладкой функции α с компактным носителем, лежащим в одной карте,

$$P^k(\alpha u) = \alpha P^k u + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u.$$

Поэтому если $u \in W_p$, то $\alpha u \in W_p$. В случае (a) пространство W_p полулокально.

В случае (b) из известных априорных L^p-оценок [5, § 15] следует включение $W_p \subset H^{m_k,p}_{\mathrm{loc}}(E^k)$. Поскольку пространство $H^{m_k,p}_{\mathrm{loc}}(E^k)$ полулокально и каждое сечение из $H^{m_k,p}_{\mathrm{loc}}(E^k)$ с компактным носителем принадлежит W_p, то и пространство W_p полулокально.

Следовательно, в случаях (a) и (b) условие полулокальности пространства W_p в формулировке теоремы 1 может быть опущено. Отметим, что в этих же случаях в формулировке теоремы требование «Γ — подпространство в W_p, заданное идеальными краевыми условиями» может быть ослаблено. Его можно заменить требованием «Γ — замкнутое подпространство в W_p, содержащее $\mathscr{D}(E^k)$». В случае (a) это утверждение следует из леммы Фридрихса [6, лемма 17.1.5]. В случае (b) его можно доказать, используя стандартный оператор усреднения, действующий в пространстве $H^{m_k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_n)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{E} = (E^j, P^j)$ — эллиптический дифференциальный комплекс на многообразии M, E^j — эрмитовы векторные расслоения, $P^j \in do_{m_j}(E^j \to E^{j+1})$, $m_j > 0$, $W_p = \mathrm{Dom}(P^k : L^p(E^k, \mu) \to L^p(E^{k+1}, \mu))$, Γ — подпространство в W_p, заданное идеальными краевыми условиями. Предположим, что пространство W_p полулокально. Тогда оператор P_Γ^k компактно разрешим, если выполнено следующее условие (β): для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K в M такой, что для любого сечения $u \in \Gamma$, носитель которого лежит в $M \setminus K$, найдется такое $v \in \Gamma$, что $P_\Gamma^k u = P_\Gamma^k v$ и $\|v\|_{L^p} \leq \varepsilon \|P_\Gamma^k u\|_{L^p}$. Условие (β) необходимо для компактной разрешимости оператора P_Γ^k, если $\mathrm{Ker}\, P_\Gamma^k = \mathrm{Ker}\, P_{W_p}^k$.*

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для этого ε выберем компакт $K \subset M$ в соответствии с условием (β). Пусть u_i — последовательность в Γ такая, что $\|u_i\|_{W_p} \leq 1$ для каждого i. Выберем гладкую функцию $a : M \to [0, 1]$, равную 1 на некоторой компактной окрестности K_1 компакта K и 0 вне некоторого компакта $K_2 \subset M$.

Для эллиптического комплекса $\mathscr{E}$ существуют такие собственные псевдодифференциальные операторы $R^j \in pdo_{-\infty}(E^j \to E^j)$ и $V^j \in pdo_{-m_{j-1}}(E^j \to E^{j-1})$, что $u = R^j u + V^{j+1} P^j u + P^{j-1} V^j u$ для любого $u \in \mathscr{D}'(E^j)$ [2, теорема 6.12]. Поскольку операторы R^k и V^{k+1} собственные, они переводят сечения с носителями в K_2 в сечения с носителями в некоторой компактной окрестности K_3 компакта K_2.

Операторы $R^k : H^{0,p}_{K_2}(E^k) \to H^{m_k,p}_{K_3}(E^k)$ и $V^{k+1} : H^{0,p}_{K_2}(E^{k+1}) \to H^{m_k,p}_{K_3}(E^k)$ непрерывны [3, п. 2.3.2.5]. В силу полулокальности пространства W_p оператор $R^k a + V^{k+1} P^k a : W_p \to H^{m_k,p}_{K_3}(E^k)$ непрерывен. Следовательно, последовательность $v_i := R^k a u_i + V^{k+1} P^k a u_i$ ограничена в $H^{m_k,p}_{K_3}(E^k)$.

Пусть $\tilde{u}_i := u_i - V^{k+1} P^k a u_i$. Тогда $P^k \tilde{u}_i = P^k u_i$, $\tilde{u}_i = v_i$ на K_1. Выберем какую-нибудь гладкую функцию $b : M \to [0,1]$, равную 0 на некоторой окрестности компакта K и 1 на $M \setminus K_1$. Дифференциальный оператор $P^k b - b P^k$ имеет порядок m_{k-1}. Поэтому оператор

$$P^k b - b P^k : H^{m_k,p}_{K_3}(E^k) \to H^{0,p}_{K_3}(E^{k+1}) \subset L^p(E^{k+1}, \mu)$$

компактен [4, п. 4.6.2]. Компактен и оператор вложения $H^{m_k,p}_{K_3} \subset L^p(E^k, \mu)$. Поэтому в силу ограниченности последовательности v_i в $H^{m_k,p}_{K_3}(E^k)$ найдутся два таких различных номера i и j, что

$$\|v_i - v_j\| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \|(P^k b - b P^k) v_i - (P^k b - b P^k) v_j\|_{L^p} \leq 1. \tag{1}$$

Так как сечение $b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)$ совпадает с $u_i - u_j$ вне компакта K_3, то $b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) \in \Gamma$. Носитель сечения $b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)$ содержится в $M \setminus K$. По условию (β) найдется такое $z \in \operatorname{Ker} P^k_\Gamma$, что

$$\|b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) - z\|_{L^p} \leq \varepsilon \|P^k b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\|_{L^p}.$$

Следовательно,

$$\|b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) - z\|_{L^p} \leq \varepsilon(\|b P^k(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)\|_{L^p} + \|(P^k b - b P^k)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\|_{L^p}. \tag{2}$$

Так как $b \equiv 1$ на $M \setminus K_1$ и $\tilde{u}_i = \tilde{v}_i$ на K_1 для каждого i, то

$$(P^k b - b P^k)(\tilde{u}_i - \tilde{v}_i) = (P^k b - b P^k)(v_i - v_j).$$

Кроме того,

$$\|b P^k \tilde{u}_i\|_{L^p} = \|b P^k u_i\|_{L^p} \leq \|u_i\|_{W_p} \leq 1.$$

Поэтому в силу (1) и (2)

$$\|b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) - z\|_{L^p} \leq 3\varepsilon. \tag{3}$$

Используя (1), получаем

$$\|(1-b)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)\|_{L^p} = \|(1-b)(v_i - v_j)\| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

В силу (3) и (4)

$$\|\tilde{u}_i - \tilde{u}_j - z\|_{L^p} \leq \|(1-b)(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j)\|_{L^p} + \|b(\tilde{u}_i - \tilde{u}_j) - z\|_{L^p} \leq 4\varepsilon.$$

По лемме 2 оператор P^k_Γ нормально разрешим.

Предположим теперь, что условие (β) не выполнено и $\operatorname{Ker} P^k_\Gamma = \operatorname{Ker} P^k_{W_p}$.

Выберем в M возрастающую последовательность K_j компактных множеств такую, что $M \subset \bigcup\limits_j \operatorname{Int} K_j$. Для каждого j рассмотрим подпространство Z_j в

$L^p(E^k, \mu)$, состоящее из тех сечений $u \in L^p(E^k, \mu)$, для которых $P^k u = 0$ на $\operatorname{Int} K_j$. Тогда

$$\bigcap_j Z_j = \operatorname{Ker} P^k_{W_p} = \operatorname{Ker} P^k_\Gamma.$$

Для произвольных $u \in L^p(E^k, \mu)$ и $S \subset L^p(E^k, \mu)$ обозначим через $\rho(u, S)$ расстояние от u до S в $L^p(E^k, \mu)$. Докажем, что

$$\rho(u, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma) = \lim_{j\to\infty} \rho(u, Z_j)$$

для любого $u \in L^p(E^k, \mu)$.

Пусть $u \in L^p(E^k, \mu)$. Найдутся такие $u_j \in Z_j$, что

$$\lim_{j\to\infty} \|u - u_j\|_{L^p} = \lim \rho(u, Z_j).$$

Последовательность u_j ограничена в $L^p(E^k, \mu)$. Поскольку $L^p(E^k, \mu)$ рефлексивно и его сопряженное пространство сепарабельно, то всякое ограниченное в $L^p(E^k, \mu)$ множество секвенциально слабо компактно. Поэтому существует слабо сходящаяся к некоторому $v \in L^p(E^k, \mu)$ подпоследовательность u_{j_ν} последовательности u_j. В силу того, что замкнутые линейные подпространства слабо замкнуты, имеем $v \in \bigcap\limits_j Z_j = \operatorname{Ker} P^k_\Gamma$. Следовательно,

$$\rho\Big(u, \bigcap_j Z_j\Big) \le \|u - v\|_{L^p} \le \lim_{\nu\to\infty} \|u - u_{j_\nu}\|_{L^p} = \lim_{j\to\infty} \rho(u, Z_j).$$

А так как $\rho\big(u, \bigcap\limits_j Z_j\big) \ge \rho(u, Z_j)$ для каждого j, то

$$\rho\Big(u, \bigcap_j Z_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \rho(u, Z_j).$$

Поскольку условие (β) не выполнено, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого компакта $K \subset X$ найдется такое $u \in \Gamma$, что $\|P^k u\|_{L^p} = 1$, носитель $\operatorname{supp} u$ сечения u содержится в $X \setminus K$ и $\rho\big(u, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma\big) \ge \varepsilon$.

Построим по индукции последовательность u_i в Γ, удовлетворяющую следующим условиям: $u_i \equiv 0$ на K_i, $\|P^k u_i\|_{L^p} = 1$, $\rho\big(u_i, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma\big) > \varepsilon$, $\rho\big(u_i - u_j, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma\big) > \varepsilon$ при $i \ne j$. Допустим, что сечения u_i при $1 \le i \le N$, удовлетворяющие указанным условиям, построены. Поскольку $\rho\big(u_i, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma\big) = \lim\limits_{j\to\infty} \rho(u_i, Z_j)$, найдется такое j, что $\rho(u_i, Z_j) > \varepsilon$ для всех $i = \overline{1, N}$. Поскольку нарушено условие (β), то для выбранного ε существует такое $u_{N+1} \in \Gamma$, что

$$\|P^k u_{N+1}\| = 1, \quad \operatorname{supp} u_{N+1} \subset M \setminus K_j, \quad \rho(u_{N+1}, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma) > \varepsilon.$$

Так как $u_{N+1} \in Z_j$, имеем

$$\rho(u_{N+1} - u_i, \operatorname{Ker} P^k_\Gamma) \ge \rho(u_{N+1} - u_i, Z_j) = \rho(u_i, Z_j) > \varepsilon$$

для любого $i = \overline{1, N}$. Последовательность u_i построена. Ее существование означает, что оператор $\big(P^k_\Gamma\big)^{-1} : L^p(E^{k+1}, \mu) \to L^p(E^k, \mu)/ \operatorname{Ker} P^k_\Gamma$ не компактен. Тем самым оператор P^k_Γ не компактно разрешим. Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования на римановом многообразии с цилиндрическими концами.

Пусть M — гладкое риманово многообразие, $\Lambda^k = \Lambda^k T^*M$ — k-я внешняя степень кокасательного расслоения, $\Lambda = (\Lambda^k, d^k)$ — комплекс де Рама многообразия M, σ — непрерывная положительная функция на M. Расслоения Λ^k будем считать снабженными эрмитовой структурой, индуцированной римановой метрикой многообразия M. Пусть μ — мера на M, заданная формой объема на римановом многообразии M. В дальнейшем банахово пространство $L^p(\Lambda^k, \sigma^p\mu)$ удобно обозначать символом $L_p^k(M,\sigma)$, а пространство $\mathrm{Dom}(d^k : L_p^k(M,\sigma) \to L_p^{k+1}(M,\sigma))$ символом $W_p^k(M,\sigma)$. Условимся в случае $k=0$ опускать в обозначениях $L_p^k(M,\sigma)$ и $W_p^k(M,\sigma)$ индекс k и опускать символ σ, если $\sigma \equiv 1$.

Предположим теперь, что M как гладкое многообразие является произведением $T\times X$ интервала $T=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, вещественной прямой и замкнутого связного ориентируемого гладкого риманова многообразия X. Пусть $i_x : T \to M$, $i_t : X \to M$, $\pi_X : M \to X$, $\pi_T : M \to T$ — отображения, заданные формулами $i_x(t) = i_t(x) = (t,x)$, $\pi_X(t,x) = x$, $\pi_T(t,x) = t$. Предположим, что метрика многообразия M связана с метрикой многообразия X следующими условиями: 1) для каждой точки $x \in X$ вложение $i_x : T \to M$ является изометрией; 2) для каждой точки $(t,x) \in M$ кривая $i_x(T)$ пересекает подмногообразие $M_t = \pi_T^{-1}(t)$ в точке (t,x) ортогонально.

Многообразия $M = T \times X$ с римановой метрикой, удовлетворяющей указанным условиям 1 и 2, будем называть *цилиндрическими*.

Обозначим через dm_t и dx формы объема на римановых многообразиях M_t и X. Так как отображение $i_t : X \to M_t$ является диффеоморфизмом, формула

$$i_t^*(\sigma^p(t,x)\,dm_t) = \theta^p(t,x)\,dx$$

однозначно определяет непрерывную положительную функцию θ на M.

Для нормы $\|\cdot\|_{L_p^k}$ в пространстве $L_p^k(M,\sigma)$ по теореме Фубини имеем

$$\|\varphi\|_{L_p^k} = \left(\int\limits_X \int\limits_T |\varphi|^p \theta^p \,dtdx\right)^{1/p}.$$

Для функции $\varphi \in W_p(M,\sigma)$ в силу условий 1 и 2, которым удовлетворяет метрика цилиндрического многообразия M, выполнено неравенство $|d\varphi| \ge \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|$. Поэтому для $\varphi \in W_p(M,\sigma)$

$$\|d\varphi\|_{L_p^1} \ge \left(\int\limits_X \int\limits_T \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^p \theta^p \,dtdx\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Для любых $s,t \in [a,b]$ обозначим через $M_{s,t}$ подмногообразие $(s,t)\times X$ многообразия M. Для произвольного $\varphi \in L_p(M,\sigma)$ по неравенству Гёльдера имеем

$$\int\limits_X \left|\int\limits_s^t \varphi(\tau,x)\,d\tau\right|^p dx \le \int\limits_X \left|\int\limits_s^t |\varphi|^p\theta^p\,d\tau\right| \cdot \left|\int\limits_s^t \theta^{-p'}\,d\tau\right|^{p/p'} dx$$
$$\le \left(\sup_{x\in X}\left|\int\limits_s^t \theta^{-p'}\,d\tau\right|^{p/p'}\right) \cdot \int\limits_X \left|\int\limits_s^t |\varphi|^p\theta^p\,d\tau\right| dx.$$

Иначе,

$$\left\| \int_s^t \varphi(\tau, x)\, d\tau \right\|_{L_p(X)} \leq \left(\sup_{x\in X} \left| \int_s^t \theta^{-p'} d\tau \right|^{1/p'} \right) \cdot \|\varphi\|_{L_p(M_{s,t},\sigma)}. \tag{6}$$

Обозначим через $I_s\varphi$ функцию $\int\limits_s^t \varphi(\tau, x) d\tau$ переменных $(t, x) \in M$. Пусть $a \leq a' < b' \leq b$, $s, u, v \in [a', b']$, $C = \sup\limits_{(t,x)\in M_{a',b'}} \theta(t, x)$. Используя неравенство (6), получаем

$$\|I_s\varphi\|_{L_p(M_{u,v})} \leq \left(\int_u^v \int_X \left| \int_s^t \varphi(\tau, x)\, d\tau \right|^p \theta^p(t, x)\, dxdt \right)^{1/p}$$

$$\leq C|u - v| \sup_{x\in X} \left| \int_{a'}^{b'} \theta^{-p'}\, d\tau \right|^{1/p'} \cdot \|\varphi\|_{L_p(M_{a',b'})}, \tag{7}$$

где C не зависит от u, v, s и φ.

Лемма 4. *Если $s \in (a, b)$, то оператор $I_s : L_{p,\mathrm{loc}}(M) \to L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ непрерывен. Оператор $I_b : L_p(M, \sigma) \to L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ непрерывен, если*

$$\sup_{x\in X} \int_t^b \theta^{-p'}(\tau, x) d\tau < \infty$$

для некоторого $t \in [a, b)$. Если

$$\sup_{x\in X} \int_t^b \theta^{-p'}(\tau, x)\, d\tau \to 0 \quad \text{при } t \to b,$$

то $I_s\varphi \to I_b\varphi$ в $L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ при $s \to b$ для любой функции $\varphi \in L_p(M, \sigma)$.

Доказательство. Непрерывность операторов I_s в указанных в лемме случаях непосредственно следует из оценки (7). Так как

$$\|I_s\varphi - I_b\varphi\|_{L_p(M_{u,v})} = \left\| \int_s^b \varphi\, d\tau \right\|_{L_p(M_{u,v})} \leq C|u - v| \left\| \int_s^b \varphi\, d\tau \right\|_{L_p(X)},$$

где $C = \sup\limits_{(t,x)\in M_{u,v}} \theta(t, x)$, из оценки (6) следует, что $\|I_s\varphi - I_b\varphi\|_{L_p(M_{u,v})} \to 0$ для любых $u, v \in (a, b)$, если $\sup\limits_{x\in X} \int\limits_s^b \theta^{-p'} d\tau \to 0$. Лемма доказана.

Для произвольных $u, v \in [a, b]$ и $(t, x) \in M$ положим

$$\chi_{u,v}(t, x) = \left| \int_t^v \theta^p(\tau, x)\, d\tau \right|^{1/p} \cdot \left| \int_u^t \theta^{-p'}(\tau, x)\, d\tau \right|^{1/p'}.$$

Для произвольной измеримой функции $\varphi(t,x)$ на M для почти всех $x \in X$ справедливо неравенство (неравенство Харди [7, п. 1.3.1])

$$\int\limits_u^v \left| \int\limits_u^t \varphi(\tau,x)\,d\tau \right|^p \theta^p(t,x)\,dt \le p(p')^{p-1} \sup_{t\in(u,v)} \chi^p_{u,v}(t,x) \cdot \int\limits_u^v |\varphi|^p \theta^p\,dt. \tag{8}$$

Интегрируя неравенство (8) по $x \in X$, получаем оценку

$$\|I_u\varphi\|_{L_p(M_{u,v},\sigma)} \le p^{1/p}(p')^{1/p'} \sup_{(t,x)\in M_{u,v}} \chi_{u,v}(t,x) \cdot \|\varphi\|_{L_p(M_{u,v},\sigma)}. \tag{9}$$

Пусть $(s,t) \in (a,b)$, $s \ne t$, φ — гладкая функция на M. Выберем какую-нибудь гладкую функцию $\lambda : (a,b) \to [0,1]$, равную 0 в точке s и 1 в точке t. Тогда

$$\varphi(t,x) = \int\limits_s^t \frac{\partial}{\partial\tau}(\lambda\varphi)d\tau. \tag{10}$$

Используя (10), (6) и (5), приходим к оценке

$$\|i_t^*\varphi\|_{L_p(X)} \le C\|\varphi\|_{W_p(M_{s,t},\sigma)}, \tag{11}$$

где $i_t^*\varphi = \varphi \circ i_t$, а константа C не зависит от выбора функции φ. Следовательно, оператор $i_t^* : W_{p,\mathrm{loc}}(M) \to L_p(X)$, заданный на плотном в $W_{p,\mathrm{loc}}$ множестве $\mathscr{E}(M)$ гладких функций, непрерывен. Поэтому, продолжив оператор i_t^* по непрерывности, получим оператор $i_t^* : W_{p,\mathrm{loc}}(M) \to L_p(X)$, заданный на всем пространстве $W_{p,\mathrm{loc}}(M)$.

Для гладкой функции φ на M и $s,t \in (a,b)$ по формуле Ньютона — Лейбница

$$i_t^*\varphi - i_s^*\varphi = \int\limits_s^t \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,d\tau.$$

Учитывая оценки (6) и (5), получаем

$$\left\|i_t^*\varphi - i_s^*\varphi\right\|_{L_p(X)} \le \sup_{x\in X} \left| \int\limits_s^t \theta^{-p'}\,d\tau \right|^{1/p'} \cdot \|d\varphi\|_{L_p^1(M_{s,t},\sigma)}. \tag{12}$$

Если

$$\sup_{x\in X} \left| \int\limits_s^t \theta^{-p'}\,d\tau \right| \to 0 \quad \text{при } t,s \to b,$$

то из (12) следует существование предела $\lim\limits_{t\to b} i_t^*$ в пространстве непрерывных линейных операторов, действующих из $W_p(M_{s,b},\sigma)$ в $L_p(X)$. Обозначим этот предел через i_b^*. Условие

$$\sup_{x\in X} \left| \int\limits_s^t \theta^{-p'}\,d\tau \right| \to\ 0 \quad \text{при } t,s \to b$$

эквивалентно условию

$$\sup_{x\in X} \int\limits_t^b \theta^{-p'}\,d\tau \to 0 \quad \text{при } t \to b.$$

Обозначим через V_b замыкание в $W_p(M,\sigma)$ подпространства, образованного гладкими функциями, каждая из которых равна 0 на некотором цилиндре $M_{s,b}$, $s \in (a,b)$.

Лемма 5. *Если*
$$\sup_{x\in X}\int\limits_s^b \theta^{-p'}d\tau<\infty$$
для некоторого $s\in(a,b)$, *то для любой функции* $\varphi\in V_b$ *выполнено равенство*
$$\varphi=I_b\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\biggr).$$
Если
$$\sup_{x\in X}\int\limits_s^b \theta^{-p'}\,d\tau\to 0\quad \textit{при } s\to b,$$
то
$$\varphi=\pi_X^*i_b^*\varphi+I_b\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\biggr)$$
для любой $\varphi\in W_p(M,\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in V_b$. Существует последовательность φ_j гладких функций, каждая из которых равна 0 на некотором цилиндре $M_{s_j,b}$, сходящаяся к φ в пространстве $W_p(M,\sigma)$. Для каждого j по формуле Ньютона — Лейбница $\varphi_j=I_b\bigl(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\bigr)$. В силу неравенства (5)
$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\to\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$
в $L_p(M,\sigma)$ при $j\to\infty$. Если для некоторого $s\in(a,b)$
$$\sup_{x\in X}\int\limits_s^b \theta^{-p'}\,d\tau<\infty,$$
то по лемме 4
$$I_b\biggl(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\biggr)\to I_b\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\biggr)$$
в $L_{p,\mathrm{loc}}(M)$. А так как $\varphi_j\to\varphi$ в $L_p(M,\sigma)$, то
$$\varphi=I_b\biggl(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\biggr).$$

Предположим теперь, что $\varphi\in W_p(M,\sigma)$. В пространстве $W_p(M,\sigma)$ гладкие функции образуют плотное множество [8]. Выберем последовательность φ_j гладких функций, сходящуюся в $W_p(M,\sigma)$ к функции φ. Для $s\in(a,b)$ по формуле Ньютона — Лейбница
$$I_s\biggl(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\biggr)=\varphi_j-\pi^*i_s^*\varphi_j.$$
Если
$$\sup_{x\in X}\int\limits_s^b \theta^{-p'}d\tau\to 0\quad \text{при } s\to b,$$
то по формуле (5) и лемме 4
$$I_s\biggl(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\biggr)\to I_b\biggl(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\biggr)$$

в $L_{p,\text{loc}}(M)$ при $s \to b$. Согласно определению оператора i_b^* $i_s^*\varphi_j \to i_b^*\varphi_j$ в $L_p(X)$ при $s \to b$. Но тогда $\pi^* i_s^* \varphi_j \to \pi^* i_b^* \varphi_j$ в $L_{p,\text{loc}}(M)$. Следовательно,

$$I_b\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}\right) = \varphi_j - \pi^* i_b^* \varphi_j.$$

В силу формулы (11) и леммы 4 операторы $I_b : L_p(M,\sigma) \to L_{p,\text{loc}}(M)$ и $\pi^* i_s^* : W_p(M,\sigma) \to L_{p,\text{loc}}(M)$ непрерывны. Поэтому

$$\varphi - \pi_X^* i_b^* \varphi = I_b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

для любой функции $\varphi \in W_p(M,\sigma)$.

Если $\sup\limits_{(t,x)\in M} \chi_{a,b}(t,x) < \infty$, то по формуле (9) $I_b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \in L_p(M,\sigma)$. Но тогда в силу равенства (13) $\pi_X^* i_b^* \varphi \in L_p(M,\sigma)$.

Кроме того,

$$\|\pi_X^* i_b^* \varphi\|_{L_p(M,\sigma)} = \left(\int\limits_X \int\limits_a^b |i_b^*\varphi|^p \theta^p \, dt dx\right)^{1/p} \geq \left(\inf_{x\in X} \int\limits_a^b \theta^p \, dt\right)^{1/p} \cdot \|i_b^*\varphi\|_X.$$

Поэтому если

$$\inf_{x\in X} \int\limits_a^b \theta^p \, dt = \infty,$$

то $\pi_X^* i_b^* \varphi \in L_p(M,\sigma)$ лишь в том случае, когда $i_b^* = 0$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $M' = (a',b) \times X$ — цилиндрическое многообразие, σ — непрерывная положительная функция на M', $a' < a < b$, $M = (a,b) \times X$ — цилиндрическое подмногообразие многообразия M', Γ — подпространство пространства $W_p(M,\sigma)$, заданное идеальными краевыми условиями. Тогда в каждом из следующих четырех случаев оператор $d_\Gamma : L_p(M,\sigma) \to L_p^1(M,\sigma)$ компактно разрешим:*

1) $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{b,c}(t,x) \to 0$ *при* $c \to b$, $\Gamma \subset V_b$;

2) $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{b,c}(t,x) \to 0$ *при* $c \to b$,

$$\sup_{x\in X} \int\limits_c^b \theta^{-p'} \, dt \to 0 \quad \textit{при } c \to b, \quad \inf_{x\in X} \int\limits_a^b \theta^p \, dt = \infty,$$

Γ *произвольное;*

3) $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{b,c}(t,x) \to 0$ *при* $c \to b$,

$$\sup_{x\in X} \int\limits_c^b \theta^{-p'} dt \to 0 \quad \textit{при } c \to b, \quad \sup_{x\in X} \int\limits_c^b \theta^p dt \to 0 \quad \textit{при } c \to b,$$

Γ *произвольное.*

4) $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{c,b}(t,x) \to 0$ *при* $c \to b$, Γ *произвольное.*

Доказательство. Если Γ и Γ_1 — подпространства в $W_p^k(M,\sigma)$, заданные идеальными краевыми условиями, $\Gamma \subset \Gamma_1$, $\dim \operatorname{Ker} d_{\Gamma_1}^k < \infty$, $d_{\Gamma_1}^k$ — компактно разрешимый оператор, то d_Γ^k компактно разрешим [9]. Поэтому можно считать, что $\Gamma = V_b$ в случае 1 и $\Gamma = W_p(M,\sigma)$ в остальных трех случаях.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, $\varphi \in \Gamma$. По лемме 5 в первых двух случаях $\varphi = I_b\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big)$, а в третьем случае $\varphi = I_b\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big) + \pi_X^* i_b^*\varphi$. Пусть $s, c \in (a,b)$. По формулам (9) и (5) в случаях 1–3

$$\left\| I_b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\|_{L_p(M_{c,b},\sigma)} \le \varepsilon\|\varphi\|_{W_p(M,\sigma)}$$

при c, достаточно близких к b. По формулам (7) и (5)

$$\left\| I_b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\|_{L_p(M_{a,s})} \le \varepsilon\|\varphi\|_{W_p(M,\sigma)}$$

при s, достаточно близких к a.

Кроме того, в случае 3 в силу непрерывности оператора $i_b^* : W_p(M,\sigma) \to L_p(X)$

$$\|\pi_X^* i_b^*\varphi\|_{L_p(M_{c,b},\sigma)} = \left(\int\limits_X |i_b^*\varphi|^p \int\limits_c^b \theta^p\, dtdx\right)^{1/p}$$
$$\le \sup_{(x,t)\in M_{c,b}} \left(\int\limits_c^b \theta^p\, dt\right)^{1/p} \cdot \|i_b^*\varphi\| \le \varepsilon\|\varphi\|_{W_p(M,\sigma)}$$

при c, достаточно близких к b.

Аналогично $\|\pi_X^* i_b^*\varphi\|_{L_p(M_{a,s})} \le \varepsilon\|\varphi\|_{W_p(M,\sigma)}$ при s, достаточно близких к a.

По теореме 1 оператор d_Γ компактно разрешим в каждом из случаев 1–3.

Перейдем к случаю 4. Пусть $\varphi \in W_p(M,\sigma)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset M_{a,s} \cup M_{c,b}$, $s < c$. Тогда

$$\varphi = I_s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = I_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

и по формулам (9) и (5)

$$\|\varphi\|_{L_p(M_{a,s},\sigma)} \le p^{1/p}(p')^{1/p'} \sup_{(t,x)\in M_{a,s}} \chi_{s,a}\|d\varphi\|_{L_p(M,\sigma)},$$
$$\|\varphi\|_{L_p(M_{c,b},\sigma)} \le p^{1/p}(p')^{1/p'} \sup_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{c,b}\|d\varphi\|_{L_p(M,\sigma)}.$$

Следовательно, $\|\varphi\|_{L_p(M,\sigma)} \le \varepsilon\|d\varphi\|_{L_p(M,\sigma)}$ при s, достаточно близких к a, и c, достаточно близких к b. По теореме 2 оператор d_Γ компактно разрешим. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\Gamma \subset V_b$ *и* $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{b,c}(t,x) \to 0$, *либо* $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b}} \chi_{c,b}(t,x) \to 0$, *то оператор* d_Γ *компактно разрешим.*

Гладкое риманово многообразие M (без края) будем называть *многообразием с цилиндрическими концами*, если в M заданы попарно не пересекающиеся открытые множества M_i', $i = 1,\dots,m$, такие, что множество $M \setminus \bigcup\limits_i M_i'$ компактно, а каждое подмногообразие M_i' риманова многообразия M является цилиндрическим многообразием $(a_i', b_i) \times X_i$.

Теорема 4. *Пусть M — многообразие с цилиндрическими концами, $a_i \in (a'_i, b_i)$, σ — непрерывная положительная функция на M, Γ — подпространство в $W_p(M,\sigma)$, заданное идеальными краевыми условиями, $M_i = (a_i, b_i) \times X$, $\sigma = \sigma|_{M_i}$, $\Gamma_i = \{\varphi|_{M_i} : \varphi \in \Gamma\}$. Тогда Γ_i для каждого i является подпространством в $W_p(M_i, \sigma_i)$, заданным идеальными краевыми условиями. Оператор $d_\Gamma : L_p(M,\sigma) \to L^1_p(M,\sigma)$ компактно разрешим, если для каждого цилиндрического многообразия M_i, функции σ_i и подпространства Γ_i выполнено хотя бы одно из условий* 1–4 *теоремы* 3.

Доказательство. Для каждого i существует линейный непрерывный оператор $r_i : W_p(M_i,\sigma_i) \to W_p(M,\sigma)$ такой, что $r_i\varphi|_{M_i} = \varphi$ и $\operatorname{supp} r_i\varphi \subset M'_i$ [10, лемма 4]. Тогда $r_i^{-1}(\Gamma) = \Gamma_i$ и тем самым подпространство Γ_i замкнуто в $W_p(M_i,\sigma_i)$. Следовательно, подпространство Γ_i задано идеальными краевыми условиями. Оператор d_Γ компактно разрешим, если компактно разрешимы операторы d_{Γ_i} [9, теорема 2]. Поэтому теорема 4 является следствием теоремы 2. Теорема доказана.

Обозначим через V замыкание в $W_p(M,\sigma)$ множества $D(M)$ гладких функций с компактными носителями.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 3 $\Gamma = V$, *то оператор d_Γ компактно разрешим в том случае, если для каждого i либо $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b_i}} \chi_{b_i,c}(t,x) \to 0$, либо $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b_i}} \chi_{c,b_i}(t,x) \to 0$ при $c \to b_i$.*

В заключение обсудим связь полученных результатов с вопросом о дискретности спектра оператора Шредингера. Пусть M — связное гладкое риманово многообразие, σ — гладкая положительная функция на M. Оператор умножения на функцию σ переводит изометрично пространство $L^j_2(M,\sigma)$ на пространство $L^j_2(M) = L^j_2(M,1)$. Рассмотрим оператор $\sigma d\sigma^{-1} : L_2(M) \to L^1_2(M)$ с областью задания $\mathscr{D}(M)$ и обозначим через $T : L_2(M) \to L^1_2(M)$ его замыкание. Поскольку оператор σ является изометрией, оператор T компактно разрешим тогда и только тогда, когда компактно разрешим оператор $d_V : L_2(M,\sigma) \to L^1_2(M,\sigma)$.

Пусть $T^* : L^1_2(M) \to L_2(M)$ — оператор, метрически сопряженный к оператору T, $u, v \in \mathscr{D}(M)$. Тогда

$$\begin{aligned}
(T^*Tu, v) = (Tu, Tv) &= \int\limits_M (\sigma d\sigma^{-1}u, \sigma d\sigma^{-1}v)\, dm \\
&= -\int\limits_M (\sigma^{-1} * d * \sigma^2 d\sigma^{-1}u, v)\, dm = -\int\limits_M (\sigma^{-1} * d * (-ud\sigma + \sigma du), v)\, dm \\
&\quad - \int\limits_M (\sigma^{-1} * (-du \wedge *d\sigma - ud * d\sigma + d\sigma \wedge *du + \sigma d * du), v)\, dm \\
&= \int\limits_M u\sigma^{-1} * d * d\sigma - *d * du, v)\, dm = \left(\Delta u - \frac{\Delta\sigma}{\sigma}u, v\right),
\end{aligned}$$

где $\Delta = -(*d * d)$ — оператор Лапласа.

Следовательно, оператор T^*T совпадает на подпространстве $\mathscr{D}(M)$ с оператором Шредингера $\Delta - \frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ с потенциалом $-\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$.

Так как подпространство $\mathscr{D}(M)$ плотно в $\operatorname{Dom} T$, оператор T^*T совпадает с расширением по Фридрихсу оператора $\Delta - \frac{\Delta\sigma}{\sigma}$, заданного на $\mathscr{D}(M)$.

Самосопряженный оператор T^*T имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$ и T — компактно разрешимый оператор [11].

Итак, оператор Шредингера S, являющийся расширением по Фридрихсу оператора $\Delta - \frac{\Delta\sigma}{\sigma}$, заданного на $\mathscr{D}(M)$, имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда компактно разрешим оператор $d_V : L_2(M,\sigma) \to L_2^1(M,\sigma)$, действующий в весовых L_2-пространствах дифференциальных форм.

Поэтому в силу следствия теоремы 4 оператор Шредингера S на многообразии с цилиндрическими концами имеет дискретный спектр, если для каждого конца этого многообразия либо $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b_i}} \chi_{b_i,c}(t,x) \to 0$, либо $\sup\limits_{(t,x)\in M_{c,b_i}} \chi_{c,b_i}(t,x) \to 0$ при $c \to b_i$.

При $\sigma \equiv 1$ получаем достаточные условия дискретности спектра оператора Лапласа на многообразии с цилиндрическими концами. Отличающиеся от наших условия дискретности спектра оператора Лапласа на многообразии с цилиндрическими концами имеются в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 49–59.
2. *Тарханов Н. Н.* Метод параметрикса в теории дифференциальных комплексов. Новосибирск: Наука, 1990.
3. *Ремпель Ш., Шульце Б. В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
5. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
7. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
8. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 104–111.
9. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 82–96.
10. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Интегральное представление интеграла дифференциальной формы // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 53–87.
11. *Кузьминов В. И., Шведов И. А.* О компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 573–590.
12. *Kleine R.* Discreteness conditions for the Laplacian on complete, non-compact Riemannian manifolds // Math. Z. 1988. Bd 198, N 1. S. 127–141.

Статья поступила 3 сентября 2003 г.

Кузьминов Владимир Иванович, *Шведов Игорь Александрович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kuzminov@math.nsc.ru, shvedov@math.nsc.ru