Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.953+517.983

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. В. Демиденко

Аннотация: Изучается один класс матричных дифференциальных операторов во всем пространстве. Для этого класса операторов установлены изоморфные свойства в специальных шкалах весовых соболевских пространств, а также изучены свойства регулярности решений системы дифференциальных уравнений, определяемое этими операторами. Рассматриваемый класс операторов содержит, в частности, стационарный оператор Навье — Стокса.

Ключевые слова: матричные дифференциальные операторы, весовые соболевские пространства, изоморфизм, регулярность решений, оператор Навье — Стокса.

В работе продолжаются исследования [1–3] свойств дифференциальных операторов с квазиоднородными символами. Мы будем рассматривать класс матричных дифференциальных операторов следующего вида:

$$\mathscr{L}(D_x) = \begin{pmatrix} K(D_x) & L(D_x) \\ M(D_x) & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_n. \tag{0.1}$$

Для этого класса операторов установим изоморфные свойства в специальных шкалах весовых соболевских пространств, а также изучим регулярность решений системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}_n$:

$$\begin{aligned} K(D_x)u^+ + L(D_x)u^- &= f^+(x), \\ M(D_x)u^+ &= f^-(x). \end{aligned} \tag{0.2}$$

Рассматриваемый класс операторов содержит, в частности, стационарный оператор Навье — Стокса

$$\ell(D_x) = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & -\Delta & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & -\Delta & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_3. \tag{0.3}$$

§ 1. Формулировка основных результатов

Укажем условия на класс дифференциальных операторов (0.1).

Будем предполагать, что матричный $\nu \times \nu$-дифференциальный оператор $\mathscr{L}(D_x)$ удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Операторы $K(D_x)$, $L(D_x)$ и $M(D_x)$ являются $\mu \times \mu$-, $\mu \times (\nu - \mu)$- и $(\nu - \mu) \times \mu$-матричными дифференциальными операторами по $x \in \mathbb{R}_n$ с постоянными коэффициентами, $1 \leq \mu < \nu$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 01–01–00609, № 03–01–00095).

Условие 2. Существуют вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и число $s \in (0,\,1)$ такие, что $s/\alpha_i,\ 1/\alpha_i \in \mathbb{N}$ и символы матричных операторов $K(D_x),\ L(D_x),\ M(D_x)$ однородны относительно вектора α с показателями 1, $(1-s)$, s соответственно, т. е.

$$K(c^\alpha i\xi) = cK(i\xi), \quad L(c^\alpha i\xi) = c^{1-s}L(i\xi), \quad M(c^\alpha i\xi) = c^s M(i\xi), \quad c > 0.$$

Условие 3. Равенство

$$\det K(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Условие 4. При любых $\xi \in \mathbb{R}_n \backslash \{0\}$ имеет место неравенство

$$\det(M(i\xi)K^{-1}(i\xi)L(i\xi)) \neq 0.$$

Из условий 2 и 3 следует, что оператор $K(D_x)$ квазиэллиптический (см, например, [1, 4]).

Оператор Навье — Стокса (0.3), очевидно, удовлетворяет условиям 1–4. Действительно, для этого оператора $\nu = 4$, $\mu = 3$,

$$K(D_x) = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad L(D_x) = \begin{pmatrix} D_{x_1} \\ D_{x_2} \\ D_{x_3} \end{pmatrix}, \quad M(D_x) = (D_{x_1},\, D_{x_2},\, D_{x_3}),$$

при этом

$$\det K(i\xi) = |\xi|^6, \ \ \det(M(i\xi)K^{-1}(i\xi)L(i\xi)) = -1, \ \ \alpha = (1/2,\,1/2,\,1/2), \ \ s = 1/2.$$

По аналогии с [1–3] установим изоморфные свойства операторов вида (0.1) в специальных весовых соболевских пространствах $W^r_{p,\sigma}(\mathbb{R}_n)$, введенных в [5].

По определению [5] норма в пространстве

$$W^r_{p,\sigma}(\mathbb{R}_n), \quad r = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma \in \mathbb{R}_1,$$

имеет вид

$$\bigl\|u(x), W^r_{p,\sigma}(\mathbb{R}_n)\bigr\| = \sum_{0 \le \beta/r \le 1} \bigl\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(1-\beta/r)} D^\beta_x u(x), L_p(\mathbb{R}_n)\bigr\|, \tag{1.1}$$

где

$$\langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2r_i}, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \beta/r = \sum_{i=1}^n \beta_i/r_i.$$

В изотропном случае $r_1 = \ldots = r_n = r$ норма (1.1) эквивалентна следующей:

$$\sum_{0 \le |\beta| \le r} \bigl\|(1 + |x|)^{-\sigma(r-|\beta|)} D^\beta_x u(x), L_p(\mathbb{R}_n)\bigr\|.$$

В работе [5] доказано, что при $\sigma \le 1$ множество финитных бесконечно дифференцируемых функций всюду плотно в $W^r_{p,\sigma}(\mathbb{R}_n)$. В дальнейшем мы будем рассматривать эти пространства в частном случае $\sigma = 1$. Отметим, что в изотропном случае при $\sigma = 1$ и $p > n$ пространства такого типа были введены Л. Д. Кудрявцевым [6] (см. также обзор [7]), а при $\sigma = 1$ и любых $p > 1$ они изучались в работах [8, 9].

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $r = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n)$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$. *Если* $|\alpha|/p > 1$, *то оператор*

$$\mathscr{L}(D_x) : \prod_1^{\mu} W^r_{p,1}(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n) \to \prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)$$

устанавливает изоморфизм.

Следствие. *Оператор Навье — Стокса* (0.3) *устанавливает изоморфизм*

$$\ell(D_x) : \prod_1^{3} W^2_{p,1}(\mathbb{R}_3) \times W^1_{p,1}(\mathbb{R}_3) \ \to \ \prod_1^{3} L_p(\mathbb{R}_3) \times W^1_{p,1}(\mathbb{R}_3)$$

при $1 < p < 3/2$.

Рассмотрим систему уравнений (0.2) в $\mathbb{R}_n$. В силу теоремы 1 при $|\alpha|/p > 1$ эта система имеет единственное решение

$$u^+(x) \in \prod_1^{\mu} W^r_{p,1}(\mathbb{R}_n), \quad u^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n) \tag{1.2}$$

для любой правой части

$$f^+(x) \in \prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n), \tag{1.3}$$

при этом справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| u_j^+(x),\, W^r_{p,1}(\mathbb{R}_n)\big\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| u_i^-(x),\, W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)\big\| \\ \le c\left(\sum_{j=1}^{\mu} \big\| f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| f_i^-(x),\, W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)\big\| \right) \tag{1.4}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$. Приведем теорему о регулярности решений системы (0.2).

Теорема 2. *Пусть* $r = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n)$, $l \in \mathbb{N}$ *и* $|\alpha|/p > 1$,

$$f^+(x) \in \prod_1^{\mu} W^{lr}_{p}(\mathbb{R}_n), \quad f^-(x) \in \prod_{\mu+1}^{\nu} W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n),$$

при этом $D^\sigma_x f^-(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} W^{lr}_p(\mathbb{R}_n)$ *для любых* σ, $\sigma\alpha = 1 - s$. *Тогда для производных компонент решения системы* (0.2) *имеют место следующие свойства:*

1) $D^\beta_x u^+(x) \in \prod\limits_1^{\mu} W^{lr}_p(\mathbb{R}_n)$ *при* $\beta\alpha = 1$;

2) $D^\gamma_x u^-(x) \in \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} W^{lr}_p(\mathbb{R}_n)$ *при* $\gamma\alpha = 1 - s$.

Замечание 1. Некоторые результаты об изоморфных свойствах дифференциальных операторов с однородными символами содержатся в работах [1–3, 9–14].

Замечание 2. В частном случае теорема 1 анонсирована в [15].

Замечание 3. Интересно сравнить изоморфные свойства оператора Навье — Стокса (0.3), указанные в следствии к теореме 1, и изоморфные свойства оператора

$$\ell_1(D_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D_{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & D_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & D_{x_3} \\ D_{x_1} & D_{x_2} & D_{x_3} & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_3,$$

установленные автором в [3]. Из теоремы 1 в [3] следует, что оператор

$$\ell_1(D_x) : \prod_1^3 W^1_{p,1}(\mathbb{R}_3) \times W^2_{p,1}(\mathbb{R}_3) \to \prod_1^3 W^1_{p,1}(\mathbb{R}_3) \times L_p(\mathbb{R}_3)$$

является изоморфизмом при $1 < p < 3/2$.

§ 2. Схема доказательства изоморфных свойств оператора (0.1)

Доказательство теоремы 1 можно провести, следуя [3]. Поэтому кратко укажем схему доказательства и остановимся на существенных отличиях.

Учитывая условия 1, 2 и используя определения пространств $W^r_{p,1}(\mathbb{R}_n)$ и $W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)$, нетрудно убедиться, что линейный оператор $\mathscr{L}(D_x)$ отображает пространство

$$\prod_1^\mu W^r_{p,1}(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^\nu W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)$$

в пространство

$$\prod_1^\mu L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^\nu W^{(1-s)r}_{p,1}(\mathbb{R}_n)$$

и является ограниченным. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (0.2) имеет единственное решение в пространстве (1.2) при $|\alpha|/p > 1$ для любой правой части (1.3), и для решения справедлива оценка (1.4).

Отметим основные моменты доказательства разрешимости системы (1.2).

Для доказательства разрешимости системы (1.2) будем использовать метод построения приближенных решений, подробно описанный в монографии [16]. Он основан на использовании интегрального представления С. В. Успенского [17] для суммируемых функций (см. также [16, гл. 1]):

$$\varphi(x) = \lim_{h\to 0} (2\pi)^{-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{\mathbb{R}_n}\int_{\mathbb{R}_n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right) G(\xi)\varphi(y)\, d\xi dy dv, \tag{2.1}$$

где $|\alpha| = \sum\limits_1^n \alpha_i$ и

$$G(\xi) = 2m\langle\xi\rangle^{2m} \exp(-\langle\xi\rangle^{2m}), \quad \langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2/\alpha_i}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Для этого рассмотрим следующую систему с параметром $\xi \in \mathbb{R}_n$:

$$K(i\xi)v^+ + L(i\xi)v^- = \widehat{f}^+(\xi), \quad M(i\xi)v^+ = \widehat{f}^-(\xi),$$

получающуюся формальным применением оператора Фурье к системе (0.2), при этом считаем, что вектор-функции $f^+(x)$, $f^-(x)$ бесконечно дифференцируемы и финитны. Учитывая условия 1–4, из этой системы при $\xi \in \mathbb{R}_n \backslash \{0\}$ имеем

$$v^+(\xi) = v^{+,+}(\xi) + v^{+,-}(\xi), \quad v^-(\xi) = v^{-,+}(\xi) + v^{-,-}(\xi),$$

где

$$\begin{gathered} v^{+,+}(\xi) = K^{-1}(i\xi)(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi))\widehat{f}^+(\xi), \\ v^{+,-}(\xi) = K^{-1}(i\xi)L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)\widehat{f}^-(\xi), \\ v^{-,+}(\xi) = N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi)\widehat{f}^+(\xi), \\ v^{-,-}(\xi) = -N_0^{-1}(\xi)\widehat{f}^-(\xi), \quad N_0(\xi) = M(i\xi)K^{-1}(i\xi)L(i\xi). \end{gathered}$$

Символы $\widehat{f}^+(\xi), \widehat{f}^-(\xi)$ обозначают преобразование Фурье соответствующих вектор-функций. По аналогии с [16, гл. 3] для любых вектор-функций $f^+(x)$, $f^-(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ определим следующие вектор-функции:

$$\begin{aligned} u_k^+(x) &= u_k^{+,+}(x) + u_k^{+,-}(x) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(v^{+,+}(\xi) + v^{+,-}(\xi))\, d\xi dv, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} u_k^-(x) &= u_k^{-,+}(x) + u_k^{-,-}(x) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(v^{-,+}(\xi) + v^{-,-}(\xi))\, d\xi dv, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где функция $G(\xi)$ определена в (2.2).

Из условий 1–4 следует, что вектор-функции

$$v^{+,+}(\xi), \quad v^{+,-}(\xi), \quad v^{-,+}(\xi), \quad v^{-,-}(\xi),$$

используемые в определениях (2.3), (2.4), могут иметь особенности только при $\xi = 0$, причем эти особенности имеют вид $O(\langle\xi\rangle^q)$, $q \in [-1, 0]$. Поэтому в силу определения (2.2) вектор-функции $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$ будут бесконечно дифференцируемыми. Очевидно, можно указать натуральное число m_1 такое, что при $m \geq m_1$ в (2.2) эти вектор-функции будут суммируемыми в любой степени $p \geq 1$ (см., например, [3]). В дальнейшем будем считать, что в (2.2) $m \geq m_1$.

Учитывая определения вектор-функций $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$K(D_x)u_k^+(x) + L(D_x)u_k^-(x) = f_k^+(x), \quad M(D_x)u_k^+(x) = f_k^-(x),$$

где

$$f_k^+(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-|\alpha|-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right) G(\xi) f^+(y)\, d\xi dy dv,$$

$$f_k^-(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-|\alpha|-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \exp\left(i\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\right) G(\xi) f^-(y)\, d\xi dy dv.$$

В силу интегрального представления (2.1) имеем

$$\left\|f_k^+(x) - f^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\right\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

$$\left\|(1+\langle x\rangle_s)^{-(1-\beta/((1-s)r))}\big(D_x^\beta f_k^-(x) - D_x^\beta f^-(x)\big),\, L_p(\mathbb{R}_n)\right\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

где

$$\langle x\rangle_s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2(1-s)r_i}, \quad 0 \le \beta/((1-s)r) \le 1.$$

Следовательно, вектор-функцию

$$u_k(x) = \begin{pmatrix} u_k^+(x) \\ u_k^-(x) \end{pmatrix},$$

компоненты которой определены в (2.3), (2.4), можно рассматривать в качестве приближенного решения системы (0.2).

Перепишем формулы (2.3), (2.4) в операторном виде

$$P_k f(x) = \begin{pmatrix} u_k^+(x) \\ u_k^-(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f^+(x) \\ f^-(x) \end{pmatrix}.$$

В следующем параграфе будет доказано, что при условии $|\alpha|/p > 1$ справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{\mu}\left\|u_{k,j}^+(x),\, W_{p,1}^r(\mathbb{R}_n)\right\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|u_{k,i}^-(x),\, W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)\right\|$$
$$\le c\left(\sum_{j=1}^{\mu}\left\|f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\right\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|f_i^-(x),\, W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)\right\|\right) \quad (2.5)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, а также установлена сходимость

$$\sum_{j=1}^{\mu}\left\|u_{k_1,j}^+(x) - u_{k_2,j}^+(x),\, W_{p,1}^r(\mathbb{R}_n)\right\|$$
$$+ \sum_{i=\mu+1}^{\nu}\left\|u_{k_1,i}^-(x) - u_{k_2,i}^-(x),\, W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)\right\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) в силу полноты пространства

$$\prod_1^{\mu} W_{p,1}^r(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)$$

следует, что существует линейный непрерывный оператор

$$P : \prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n) \to \prod_1^{\mu} W_{p,1}^r(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n),$$

определенный на финитных вектор-функциях $f(x)$ по формуле

$$Pf(x) = \lim_{k\to\infty} P_k f(x),$$

при этом вектор-функция $u(x) = Pf(x)$ будет решением системы (0.2). В силу плотности множества финитных вектор-функций в $\prod\limits_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod\limits_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)$ (см. [5]) по теореме «о продолжении по непрерывности» оператор P можно единственным образом продолжить на все это пространство с сохранением нормы. Для продолженного оператора будем использовать то же обозначение P.

Из неравенства (2.5) следует, что линейные операторы

$$P_k : \prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n) \to \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{r}(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)$$

являются непрерывными и последовательность норм $\{\|P_k\|\}$ ограничена: $\|P_k\| \le c$. Следовательно, по теореме Банаха — Штейнгауза сходимость

$$P_k f(x) \to Pf(x), \quad k \to \infty,$$

имеет место для любой вектор-функции $f(x)$, удовлетворяющей (1.3).

Из сказанного выше вытекает существование решения $u(x)$ системы (0.2) из пространства (1.2) для любой правой части $f(x)$ из пространства (1.3), и для него выполняется оценка (1.4) с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Единственность решения системы (0.2) в рассматриваемом пространстве при условии $|\alpha|/p > 1$ доказывается по аналогии с [1, 16].

Итак, линейный оператор

$$\mathscr{L}(D_x) : \prod_1^{\mu} W_{p,1}^{r}(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n) \to \prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)$$

является непрерывным, область его значений при $|\alpha|/p > 1$ совпадает со всем пространством

$$\prod_1^{\mu} L_p(\mathbb{R}_n) \times \prod_{\mu+1}^{\nu} W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n),$$

и ядро нулевое, при этом оператор P является обратным. Следовательно, оператор $\mathscr{L}(D_x)$ устанавливает изоморфизм.

Из проведенных рассуждений следует, что для полного доказательства теоремы 1 нужно получить оценку (2.5) и установить сходимость (2.6). Этот вопрос обсуждается в следующем параграфе.

§ 3. Оценки приближенных решений

Проведение оценок вектор-функций (2.3), (2.4) разобьем на ряд лемм.

Вначале приведем оценки старших производных этих вектор-функций.

Лемма 3.1. *Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = 1$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left\| D_x^{\beta} u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \right\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \left\| f_j^{+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \right\|, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\sum_{\gamma\alpha=1-s}\big\|D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\|, \tag{3.2}$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|D_x^\beta u_{k_1,j}^{+}(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^{+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \to 0, \quad k_1,k_2\to\infty. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{+,+}(x)$, очевидно, имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{1/k}^{k} v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{+,+}(\xi)\,d\xi dv$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{1/k}^{k} v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}\bigg(\int_{\mathbb{R}_n}\exp(i(x-y)\xi)G(\xi v^\alpha)\,d\xi\bigg)F_\beta^+(y)\,dydv, \tag{3.4}$$

где

$$F_\beta^+(y) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}_n}\exp(iys)(is)^\beta K^{-1}(is)(I-L(is)N_0^{-1}(s)M(is)K^{-1}(is))\widehat{f}^+(s)\,ds.$$

В силу свойств представления (2.1) (см. [16, гл. 1]) получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{\mu}\|D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c\sum_{j=1}^{\mu}\|F_{\beta,j}^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\|.$$

Из условий 2–4 элементы матрицы $L(is)N_0^{-1}(s)M(is)K^{-1}(is)$ однородны относительно вектора α степени 0. А поскольку $\beta\alpha=1$, в силу условий 2, 3 элементы матрицы $(is)^\beta K^{-1}(is)$ также однородны относительно вектора α степени 0. Поэтому из теоремы о мультипликаторах [18] следует неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|F_{\beta,j}^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c_\beta\sum_{j=1}^{\mu}\big\|f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^+(x)$. Отсюда вытекает оценка (3.1).

Из определения вектор-функции $u_k^{+,-}(x)$ имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,-}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{1/k}^{k} v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{+,-}(\xi)\,d\xi dv$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{1/k}^{k} v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}\bigg(\int_{\mathbb{R}_n}\exp(i(x-y)\xi)G(\xi v^\alpha)\,d\xi\bigg)F_\beta^-(y)\,dydv, \tag{3.5}$$

где

$$F_\beta^-(y) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}_n}\exp(iys)(is)^\beta K^{-1}(is)L(is)N_0^{-1}(s)\widehat{f}^-(s)\,ds.$$

Как и выше, имеем неравенство

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c\sum_{j=1}^{\mu}\big\|F_{\beta,j}^-(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|.$$

Из условий 2–4 следует, что

$$K^{-1}(c^\alpha is)L(c^\alpha is)N_0^{-1}(c^\alpha s)=c^{-s}K^{-1}(is)L(is)N_0^{-1}(s),\quad c>0,$$

а поскольку $\beta\alpha=1$, в силу теоремы о мультипликаторах [18] приходим к оценке

$$\sum_{j=1}^{\mu}\big\|F_{\beta,j}^-(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c_\beta\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\sum_{\gamma\alpha=1-s}\big\|D_x^\gamma f_i^-(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f^-(x)$. Отсюда следует неравенство (3.2).

Учитывая интегральное представления (2.1) и формулы (3.4), (3.5), получаем также сходимость (3.3).

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta\alpha=1-s$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c\sum_{j=1}^{\mu}\big\|f_j^+(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|,\tag{3.6}$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\sum_{\gamma\alpha=1-s}\big\|D_x^\gamma f_i^-(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|,\tag{3.7}$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|D_x^\beta u_{k_1,i}^-(x)-D_x^\beta u_{k_2,i}^-(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\to 0,\quad k_1,k_2\to\infty.\tag{3.8}$$

Доказательство. Из определения вектор-функций $u_k^{-,+}(x)$ и $u_k^{-,-}(x)$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned}D_x^\beta u_k^{-,+}(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{1/k}^{k}v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{-,+}(\xi)\,d\xi dv\\&=(2\pi)^{-n}\int_{1/k}^{k}v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}\bigg(\int_{\mathbb{R}_n}\exp(i(x-y)\xi)G(\xi v^\alpha)\,d\xi\bigg)\Phi_\beta^+(y)\,dydv,\end{aligned}\tag{3.9}$$

где

$$\Phi_\beta^+(y)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}_n}\exp(iys)(is)^\beta N_0^{-1}(s)M(is)K^{-1}(is)\widehat{f}^+(s)\,ds,$$

а также

$$\begin{aligned}D_x^\beta u_k^{-,-}(x)&=(2\pi)^{-n/2}\int_{1/k}^{k}v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta v^{-,-}(\xi)\,d\xi dv\\&=(2\pi)^{-n}\int_{1/k}^{k}v^{-1}\int_{\mathbb{R}_n}\bigg(\int_{\mathbb{R}_n}\exp(i(x-y)\xi)G(\xi v^\alpha)\,d\xi\bigg)\Phi_\beta^-(y)\,dydv,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где

$$\Phi_\beta^-(y) = -(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \exp(iys)(is)^\beta N_0^{-1}(s)\widehat{f}^-(s)\,ds.$$

В силу свойств интегрального представления (2.1), как при доказательстве предыдущей леммы, приходим к оценкам

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\|\Phi_{\beta,i}^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\|,$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\|\Phi_{\beta,i}^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\|.$$

Из условий 2–4 следует

$$N_0^{-1}(c^\alpha s)M(c^\alpha is)K^{-1}(c^\alpha is) = c^{-1+s} N_0^{-1}(s)M(is)K^{-1}(is),$$

$$N_0^{-1}(c^\alpha s) = N_0^{-1}(s), \quad c > 0,$$

а поскольку $\beta\alpha = 1 - s$, то по теореме о мультипликаторах [18] имеем неравенства

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|\Phi_{\beta,i}^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c_\beta \sum_{j=1}^{\mu} \|f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\|,$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \|\Phi_{\beta,i}^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\| \le c_\beta \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\gamma\alpha=1-s} \|D_x^\gamma f_i^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\|$$

с константой c_β, не зависящей от $f(x)$. Отсюда вытекают оценки (3.6) и (3.7).

Учитывая интегральное представления (2.1) и формулы (3.9), (3.10), получаем также сходимость (3.8).

Лемма доказана.

Для получения оценок производных

$$D_x^\beta u_k^+(x), \quad 0 \le \beta\alpha < 1, \quad D_x^\gamma u_k^-(x), \quad 0 \le \gamma\alpha < 1 - s, \tag{3.11}$$

мы, как и в работе [3], будем использовать оценки интегралов

$$\mathscr{K}_h(x) = \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k(\xi)\,d\xi dv, \quad 0 < h < 1, \tag{3.12}$$

где функция $k(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_n \backslash \{0\})$ однородная относительно вектора α с показателем однородности $q \le 0$, т. е.

$$k(c^\alpha \xi) = c^q k(\xi), \quad c > 0.$$

В работе [3] при $q < 0$ была доказана следующая

Лемма 3.3. *Пусть $|\alpha| + q > 0$. Тогда существует m_0 такое, что если $m \ge m_0$ в определении (2.2) функции $G(\xi)$, то имеет место равномерная оценка*

$$\langle x\rangle^{|\alpha|+q} |\mathscr{K}_h(x)| \le c, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

с константой $c > 0$, не зависящей от h.

В случае $q = 0$ лемма также справедлива. Доказательство этого факта существенно не отличается от рассуждений, проведенных в [3], поэтому мы его опускаем.

В дальнейшем мы будем иметь дело с интегралами вида (3.12) при $q \in [-1, 0]$. В этом случае, как следует из [3], можно взять $m_0 = m_1$.

Проведем теперь оценки производных (3.11).

Лемма 3.4. *Пусть* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha < 1$ *и* $|\alpha|/p > 1$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| \langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \big\| f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\|, \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| \langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| f_i^-(x),\, W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)\big\|, \tag{3.14}$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f^+(x)$, $f^-(x)$ *и* k, *при этом*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| (1+\langle x\rangle)^{-(1-\beta\alpha)} \big(D_x^\beta u_{k_1,j}^+(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^+(x)\big),\, L_p(\mathbb{R}_n)\big\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty. \tag{3.15}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{+,+}(x)$, очевидно, имеем

$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} \bigg(\int_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta$$
$$\times K^{-1}(i\xi)(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi))\, d\xi \bigg) f^+(y)\, dy dv.$$

Введем обозначение

$$\mathscr{K}_{k,\beta}^{+,+}(x) = \int_{1/k}^{k} v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k_\beta^{+,+}(\xi)\, d\xi dv,$$

где
$$k_\beta^{+,+}(\xi) = (i\xi)^\beta K^{-1}(i\xi)(I - L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi)).$$

Тогда
$$D_x^\beta u_k^{+,+}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathscr{K}_{k,\beta}^{+,+}(x-y) f^+(y) dy.$$

Как уже отмечалось, элементы матрицы $L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi)$ однородны относительно вектора α степени 0. Поэтому в силу условий 2, 3 все элементы матрицы $k_\beta^{+,+}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = \beta\alpha - 1 < 0$. Поскольку $|\alpha|/p > 1$, $\beta\alpha \ge 0$, то $|\alpha| + q > 0$. Следовательно, применяя лемму 3.3, приходим к неравенству

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| \langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x), L_p(\mathbb{R}_n)\big\|$$
$$\le c \sum_{j=1}^{\mu} \bigg\| \langle x\rangle^q \int_{\mathbb{R}_n} \langle x-y\rangle^{-|\alpha|-q} \big| f_j^+(y)\big|\, dy,\, L_p(\mathbb{R}_n)\bigg\|$$
$$\le c' \sum_{j=1}^{\mu} \bigg\| \int_{\mathbb{R}_n} \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{q/|\alpha|} |x_i - y_i|^{-1-q/|\alpha|} \big| f_j^+(y)\big|\, dy,\, L_p(\mathbb{R}_n)\bigg\|.$$

Из условий леммы имеем $1/p > -q/|\alpha| > 0$, поэтому в силу неравенства Харди — Литтлвуда [19] получаем оценку (3.13).

Докажем (3.14). Обозначим $r_l = 1/\alpha_l$. Из определения вектор-функции $u_k^{+,-}(x)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
&D_x^\beta u_k^{+,-}(x)\\
&= \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n/2} \int_{1/k}^k v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{2r_l} K^{-1}(i\xi) L(i\xi) N_0^{-1}(\xi) \widehat{f^-}(\xi)\, d\xi dv\\
&\qquad = \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n/2} \int_{1/k}^k v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l}\\
&\qquad\qquad \times K^{-1}(i\xi) L(i\xi) N_0^{-1}(\xi) \big(\widehat{D_l^{(1-s)r_l} f^-}(\xi)\big)\, d\xi dv\\
&\qquad = \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n} \int_{1/k}^k v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} \Bigg(\int_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l}\\
&\qquad\qquad\qquad \times K^{-1}(i\xi) L(i\xi) N_0^{-1}(\xi)\, d\xi \Bigg) D_{y_l}^{(1-s)r_l} f^-(y)\, dy dv.
\end{aligned}
$$

Введем обозначение

$$
\mathscr{K}_{k,\beta}^{+,-}(x) = \int_{1/k}^k v^{-1} \int_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k_\beta^{+,-}(\xi)\, d\xi dv,
$$

где

$$
k_\beta^{+,-}(\xi) = \sum_{l=1}^n (i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l} K^{-1}(i\xi) L(i\xi) N_0^{-1}(\xi).
$$

Тогда

$$
D_x^\beta u_k^{+,-}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}_n} \mathscr{K}_{k,\beta}^{+,-}(x-y) D_{y_l}^{(1-s)r_l} f^-(y) dy.
$$

Как уже отмечалось, элементы матрицы $K^{-1}(i\xi)L(i\xi)N_0^{-1}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $-s$, тем самым элементы матрицы $k_\beta^{+,-}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = \beta\alpha - 1 < 0$. Поэтому по аналогии с предыдущим имеем оценку

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^\mu \big\| \langle x\rangle^{-(1-\beta\alpha)} D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x), L_p(\mathbb{R}_n) \big\|\\
&\quad \le c' \sum_{i=\mu+1}^\nu \sum_{l=1}^n \Bigg\| \int_{\mathbb{R}_n} \prod_{k=1}^n |x_k|^{q/|\alpha|} |x_k - y_k|^{-1-q/|\alpha|} \big| D_{y_l}^{(1-s)r_l} f_i^-(y) \big|\, dy,\, L_p(\mathbb{R}_n) \Bigg\|,
\end{aligned}
$$

и в силу неравенства Харди — Литтлвуда получим оценку (3.14).

С учетом проведенных рассуждений доказательство сходимости (3.15) можно получить по аналогии с доказательством леммы 3.4 из [3].

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\beta\alpha<1-s$ и $|\alpha|/p>1$. Тогда имеют место неравенства*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|\langle x\rangle^{-(1-s-\beta\alpha)}D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c\sum_{j=1}^{\mu}\big\|f_j^+(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|, \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|\langle x\rangle^{-(1-s-\beta\alpha)}D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\le c\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|f_i^-(x),\,W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n)\big\| \tag{3.17}$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f^+(x)$, $f^-(x)$ и k, при этом

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu}\big\|(1+\langle x\rangle)^{-(1-s-\beta\alpha)}\big(D_x^\beta u_{k_1,i}^-(x)-D_x^\beta u_{k_2,i}^-(x)\big),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\to 0,\quad k_1,k_2\to\infty. \tag{3.18}$$

Доказательство. Из определения вектор-функции $u_k^{-,+}(x)$ имеем

$$D_x^\beta u_k^{-,+}(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi)\,d\xi\bigg)f^+(y)\,dydv.$$

Введем обозначение

$$\mathscr{K}_{k,\beta}^{-,+}(x)=\int\limits_{1/k}^{k} v^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)k_\beta^{-,+}(\xi)\,d\xi dv,$$

где

$$k_\beta^{-,+}(\xi)=(i\xi)^\beta N_0^{-1}(\xi)M(i\xi)K^{-1}(i\xi).$$

Тогда

$$D_x^\beta u_k^{-,+}(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\mathscr{K}_{k,\beta}^{-,+}(x-y)f^+(y)dy.$$

Из условий 2–4 следует, что все элементы матрицы $k_\beta^{-,+}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q=s+\beta\alpha-1<0$. Поскольку $|\alpha|/p>1$, $s+\beta\alpha>0$, то $|\alpha|+q>0$. Следовательно, применяя лемму 3.3, получим неравенство

$$\begin{aligned}\sum_{i=\mu+1}^{\nu}&\big\|\langle x\rangle^{-(1-s-\beta\alpha)}D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\,L_p(\mathbb{R}_n)\big\|\\ &\le c\sum_{j=1}^{\mu}\bigg\|\langle x\rangle^q\int\limits_{\mathbb{R}_n}\langle x-y\rangle^{-|\alpha|-q}\big|f_j^+(y)\big|\,dy,\,L_p(\mathbb{R}_n)\bigg\|\\ &\le c'\sum_{j=1}^{\mu}\bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}_n}\prod_{k=1}^{n}|x_k|^{q/|\alpha|}|x_k-y_k|^{-1-q/|\alpha|}|f_j^+(y)|\,dy,\,L_p(\mathbb{R}_n)\bigg\|.\end{aligned}$$

Из условий леммы имеем $1/p>-q/|\alpha|>0$, поэтому в силу неравенства Харди — Литтлвуда [19] получаем оценку (3.16).

Докажем (3.17). Обозначим $r_l = 1/\alpha_l$. Из определения вектор-функции $u_k^{-,-}(x)$ вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&- D_x^\beta u_k^{-,-}(x) \\
&\quad = \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{2r_l} N_0^{-1}(\xi) \widehat{f^-}(\xi)\, d\xi dv \\
&\qquad = \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \\
&\qquad \times \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l} N_0^{-1}(\xi) \big(\widehat{D_l^{(1-s)r_l} f^-(\xi)}\big)\, d\xi dv \\
&\qquad = \sum_{l=1}^n (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha)(i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \\
&\qquad\qquad \times \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l} N_0^{-1}(\xi)\, d\xi \Bigg) D_{y_l}^{(1-s)r_l} f^-(y) dy dv.
\end{aligned}
$$

Введем обозначение

$$
\mathscr{K}_{k,\beta}^{-,-}(x) = \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) k_\beta^{-,-}(\xi)\, d\xi dv,
$$

где

$$
k_\beta^{-,-}(\xi) = -\sum_{l=1}^n (i\xi)^\beta \langle\xi\rangle^{-2} \xi_l^{(1+s)r_l} i^{-(1-s)r_l} N_0^{-1}(\xi).
$$

Тогда

$$
D_x^\beta u_k^{-,-}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathscr{K}_{k,\beta}^{-,-}(x-y) D_{y_l}^{(1-s)r_l} f^-(y) dy.
$$

Из условий 2–4 следует, что все элементы матрицы $k_\beta^{-,-}(\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности $q = s + \beta\alpha - 1 < 0$. Поэтому по аналогии с предыдущим имеем оценку

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| \langle x\rangle^{-(1-s-\beta\alpha)} D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \\
&\quad \le c' \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{l=1}^{n} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}_n} \prod_{k=1}^n |x_k|^{q/|\alpha|} |x_k - y_k|^{-1-q/|\alpha|} \big| D_{y_l}^{(1-s)r_l} f_i^-(y) \big|\, dy,\, L_p(\mathbb{R}_n) \Bigg\|,
\end{aligned}
$$

и в силу неравенства Харди — Литтлвуда получим оценку (3.17).

С учетом проведенных рассуждений доказательство сходимости (3.18) можно получить по аналогии с доказательством леммы 3.4 из [3].

Лемма доказана.

Из доказанных лемм непосредственно вытекают оценка (2.5) и сходимость (2.6) для приближенных решений системы (0.2), на которые мы опирались в § 2, доказывая теорему 1.

§ 4. Регулярность решений системы (0.2)

Из доказательства теоремы 1 следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно получить L_p-оценки соответствующих производных приближенных решений $u_k^+(x)$, $u_k^-(x)$. Приведем эти оценки.

Лемма 4.1. *Пусть* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = l+1$. *Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = l} \big\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\|,$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k,j}^{+,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\sigma\alpha = l+1-s} \big\| D_x^\sigma f_i^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\|$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f^+(x)$, $f^-(x)$ *и* k, *при этом*

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| D_x^\beta u_{k_1,j}^{+}(x) - D_x^\beta u_{k_2,j}^{+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty.$$

Для доказательства леммы нужно использовать представления (3.4), (3.5) для производных $D_x^\beta u_k^{+,+}(x)$, $D_x^\beta u_k^{+,-}(x)$, учесть условия 2–4 и применить теорему о мультипликаторах [18].

Лемма 4.2. *Пусть* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = l+1-s$. *Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,+}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \le c \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{\gamma\alpha = l} \big\| D_x^\gamma f_j^+(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\|,$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| D_x^\beta u_{k,i}^{-,-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \le c \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \sum_{\sigma\alpha = l+1-s} \big\| D_x^\sigma f_i^-(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\|,$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f^+(x)$, $f^-(x)$ *и* k, *при этом*

$$\sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| D_x^\beta u_{k_1,i}^{-}(x) - D_x^\beta u_{k_2,i}^{-}(x),\, L_p(\mathbb{R}_n) \big\| \to 0, \quad k_1, k_2 \to \infty.$$

Для доказательства этой леммы нужно использовать представления (3.9), (3.10) для производных $D_x^\beta u_k^{-,+}(x)$, $D_x^\beta u_k^{-,-}(x)$, учесть условия 2–4 и применить теорему о мультипликаторах [18].

В § 2, 3 доказано существование решения системы (0.2) в пространстве (1.2), при этом

$$\sum_{j=1}^{\mu} \big\| u_{k,j}^+(x) - u_j^+(x),\, W_{p,1}^r(\mathbb{R}_n) \big\| + \sum_{i=\mu+1}^{\nu} \big\| u_{k,i}^-(x) - u_i^-(x),\, W_{p,1}^{(1-s)r}(\mathbb{R}_n) \big\| \to 0, \quad k \to 0.$$

Отсюда в силу лемм 4.1 и 4.2 вытекает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}_n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
2. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства квазиэллиптических операторов // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 6. С. 730–734.
3. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.
4. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–50.
5. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве // Мат. сб. I: 1966. Т. 69, N 4. С. 616–639; II: 1966. Т. 70, N 1. С. 3–35.
7. *Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М.* Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 26. С. 5–157. (Итоги науки и техники).
8. *Nirenberg L., Walker H. F.* The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 42, N 2. P. 271–301.
9. *Cantor M.* Elliptic operators and the decomposition of tensor fields // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 5, N 3. P. 235–262.
10. *McOwen R. C.* The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32, N 6. P. 783–795.
11. *Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D.* Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math. 1981. V. 146, N 1/2. P. 129–150.
12. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1985. V. 12, N 3. P. 409–447.
13. *Amrouche C., Girault V., Giroire J.* Espaces de Sobolev avec poids et equation de Laplace dans R^n. I // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. 1992. V. 315. P. 269–274.
14. *Hile G. N., Mawata C. P.* The behavior of the heat operator on weighted Sobolev spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350, N 4. P. 1407–1428.
15. *Demidenko G. V.* On properties of a class of matrix differential operators in R^n // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, N 2. P. 23–36.
16. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
17. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
18. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.
19. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. П.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Статья поступила 25 февраля 2003 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru