Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 513.74

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КЕНМОЦУ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. Б. Банару

Аннотация: Рассматриваются почти контактные метрические гиперповерхности почти эрмитовых многообразий класса $W3$ (в терминологии Грея — Херевеллы). Установлен критерий минимальности таких гиперповерхностей в случае, когда контактная метрическая структура является косимплектической.

Ключевые слова: почти эрмитово многообразие, $W3$-многообразие, косимплектическая структура, минимальная гиперповерхность.

1. Теория почти контактных метрических структур занимает одно из ведущих мест в современных дифференциально-геометрических исследованиях. Это объясняется как многочисленными приложениями ее в математической физике (например, в классической механике [1] и в теории геометрического квантования [2]), так и богатством внутреннего содержания самой теории, а также ее теснейшими связями с другими разделами геометрии.

Напомним, что *почти контактной метрической структурой* на нечетномерном многообразии N называется такая система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на этом многообразии, что Φ — поле тензора типа (1,1), ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика. При этом должны выполняться условия

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta;$$
$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \aleph(N),$$

где $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N. Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, характеризуемая тождеством $\nabla\eta = \nabla\Phi = 0$, где ∇ — риманова связность метрики g. Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [3].

Почти контактные метрические структуры тесно связаны с почти эрмитовыми (almost Hermitian, AH-) структурами. Например, если $(N, \{\Phi, \xi, \eta, g\})$ — почти контактное метрическое многообразие, то на многообразии $N \times \mathbb{R}$ индуцируется почти эрмитова структура [4]. Если эта почти эрмитова структура интегрируема, то исходная почти контактная метрическая структура называется *нормальной*. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой* [4]. Сасакиевы структуры можно охарактеризовать и с помощью тождества

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \aleph(N). \tag{1}$$

Сасакиевы структуры, например, индуцируются на вполне омбилических гиперповерхностях келеровых многообразий [4]. Они обладают многими замечательными свойствами и играют фундаментальную роль в контактной геометрии.

В начале 70-х гг. 20-го в. К. Кенмоцу ввел в рассмотрение класс почти контактных метрических структур, характеризуемых тождеством [5]

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \aleph(N). \tag{2}$$

Многообразия Кенмоцу нормальны и интегрируемы, но не являются контактными и, стало быть, не могут быть сасакиевыми [5]. Несмотря на внешнее сходство тождеств (1) и (2), свойства многообразий Кенмоцу в определенном смысле полярны свойствам сасакиевых многообразий. Заметим, что исчерпывающее описание многообразий Кенмоцу, а также множество различных примеров таких многообразий содержатся в новейшем исследовании [6] по данной тематике.

Настоящая заметка посвящена гиперповерхностям W_3-многообразий, наделенным структурой Кенмоцу. Она является продолжением исследований автора, ранее рассматривавшего почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях келеровых, приближенно келеровых и W_3-многообразий (см., например, [7, 8]). В частности, в [7] было доказано, что если $(N, \{\Phi, \xi, \eta, g\})$ — слабо косимплектическая гиперповерхность приближенно келерова многообразия M^{2n}, σ — вторая квадратичная форма погружения N в M^{2n}, то N минимальна тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$. Кроме того, в [7] установлено, что для слабо косимплектической гиперповерхности N приближенно келерова многообразия M^{2n} следующие утверждения эквивалентны:

1) N — минимальное подмногообразие многообразия M^{2n};
2) N — вполне геодезическое подмногообразие многообразия M^{2n};
3) типовое число гиперповерхности N тождественно обращается в нуль.

В [8] доказано, что условие $\sigma(\xi, \xi) = 0$ есть критерий минимальности для всякой косимплектической гиперповерхности 6-мерного W_3-подмногообразия алгебры октав.

Отметим, что класс W_3-многообразий (или специальных эрмитовых многообразий) — один из важнейших классов почти эрмитовых многообразий [9]. Однако он изучен не так подробно, как другие так называемые «малые» классы почти эрмитовых многообразий. О приближенно келеровых, почти келеровых и W_4-многообразиях написано несколько десятков значительных работ, о W_3-многообразиях — гораздо меньше. Среди работ, посвященных специальным эрмитовым многообразиям, несомненно, следует выделить статью В. Ф. Кириченко о 6-мерных симметрических W_3-многообразиях [10].

2. Как известно, *почти эрмитовой структурой* на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle \quad \forall X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Здесь $\aleph(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется почти эрмитовым (AH)-многообразием. С каждой AH-структурой

$\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n})$$

и называемого *фундаментальной* (или *келеровой*) формой структуры.

Пусть $(M^{2n}, \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора структуры, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь и далее индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$. Матрица оператора структуры в A-репере в точке p имеет вид

$$\left(J_j^k\right) = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right),$$

где I_n — единичная матрица порядка n; $k, j = 1, , \ldots, 2n$. Хорошо известно [11], что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере примут соответственно вид

$$(g_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right), \quad (F_{kj}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & iI_n \\ \hline -iI_n & 0 \end{array}\right).$$

Почти эрмитово многообразие является специальным эрмитовым [9], если

$$\delta F = 0; \quad \nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0, \quad X, Y, Z \in \aleph(M^{2n}),$$

где δ — оператор кодифференцирования. Первая группа структурных уравнений специального эрмитова многообразия в A-репере имеет вид [12]

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}_c \omega^c \wedge \omega_b;$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B^c_{ab}\omega_c \wedge \omega^b,$$

причем

$$B^{ab}_b = 0; \quad B^b_{ab} = 0. \tag{3}$$

Здесь и далее $\{B^{ab}_c\}$ и $\{B^c_{ab}\}$ — компоненты виртуальных тензоров Кириченко [8]; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $j, k = 1, \ldots, 2n$.

Основной результат данной заметки содержит

Теорема. *Пусть N — гиперповерхность Кенмоцу специального эрмитова многообразия M^{2n}, σ — вторая квадратичная форма погружения N в M^{2n}. Тогда гиперповерхность N будет минимальным подмногообразием многообразия M^{2n} в том и только том случае, если $\sigma(\xi, \xi) = 0$.*

Доказательство. Если N — гиперповерхность эрмитова многообразия, то на ней индуцируется почти контактная метрическая структура, структурные уравнения которой имеют вид [8]

$$
\begin{aligned}
d\omega^{\alpha}&=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+B^{\alpha\beta}_{\gamma}\omega^{\gamma}\wedge\omega_{\beta}+\big(\sqrt{2}B^{\alpha n}_{\beta}+i\sigma^{\alpha}_{\beta}\big)\omega^{\beta}\wedge\omega+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_{n}+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_{\beta}\wedge\omega,\\
d\omega_{\alpha}&=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+B^{\gamma}_{\alpha\beta}\omega_{\gamma}\wedge\omega^{\beta}+\big(\sqrt{2}B^{\beta}_{\alpha n}-i\sigma^{\beta}_{\alpha}\big)\omega_{\beta}\wedge\omega+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{n}_{\alpha\beta}-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^{\beta}\wedge\omega,\\
d\omega&=\big(\sqrt{2}B^{n\alpha}_{\beta}-\sqrt{2}B^{\alpha}_{n\beta}-2i\sigma^{\alpha}_{\beta}\big)\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+\big(B^{n}_{n\beta}+i\sigma_{n\beta}\big)\omega\wedge\omega^{\beta}+\big(B^{n\beta}_{n}-i\sigma^{\beta}_{n}\big)\omega\wedge\omega_{\beta}.
\end{aligned}
$$

Здесь и далее $\alpha,\beta,\gamma=1,\ldots,n-1$.

Пусть почти контактная метрическая структура на гиперповерхности N является структурой Кенмоцу. Первая группа структурных уравнений структуры Кенмоцу такова [6]:

$$
\begin{aligned}
d\omega^{\alpha}&=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+\omega\wedge\omega^{\alpha};\\
d\omega_{\alpha}&=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+\omega\wedge\omega_{\alpha};\\
d\omega&=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
1)\ B^{\alpha\beta}_{\gamma}=0;\quad 2)\ \sqrt{2}B^{\alpha n}_{\beta}+i\sigma^{\alpha}_{\beta}=-\delta^{\alpha}_{\beta};\quad 3)\ -\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_{n}+i\sigma^{\alpha\beta}=0;\\
4)\ \sqrt{2}B^{n\alpha}_{\beta}-\sqrt{2}B^{\alpha}_{n\beta}-2i\sigma^{\alpha}_{\beta}=0;\quad 5)\ B^{n\beta}_{n}-i\sigma^{\beta}_{n}=0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

и формулы комплексного сопряжения (ф.к.с.), запись которых мы опустим. Из условия 3 формулы (4) следует

$$\sigma^{\alpha\beta}=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_{n}.$$

Проальтернируем это соотношение:

$$0=\sigma^{[\alpha\beta]}=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{[\alpha\beta]}_{n}=-\frac{i}{2\sqrt{2}}\big(B^{\alpha\beta}_{n}-B^{\beta\alpha}_{n}\big)=-\frac{i}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_{n}.$$

Следовательно, $B^{\alpha\beta}_{n}=0$, а значит, $\sigma^{\alpha\beta}=0$. Аналогично из условия 5 формулы (4) получаем $\sigma^{\beta}_{n}=0$. Таким образом, условия (4) можно переписать так:

$$1)\ B^{\alpha\beta}_{\gamma}=0;\quad 2)\ \sigma^{\alpha\beta}=0;\quad 3)\ \sigma^{\beta}_{n}=0;\quad 4)\ \sigma^{\alpha}_{\beta}=i\sqrt{2}B^{\alpha n}_{\beta}+i\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{5}$$

и ф.к.с.

Пусть теперь гиперповерхность N будет минимальным подмногообразием специального эрмитова многообразия M^{2n}. Критерием минимальности является условие [13] $g^{ps}\sigma_{ps}=0$, $p,s=1,\ldots,2n-1$. Матрица контравариантного метрического тензора гиперповерхности N имеет вид [8]

$$
(g^{ps})=\left(\begin{array}{c|c|c}
0 & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & I_{n-1}\\
\hline
0\ldots0 & 1 & 0\ldots0\\
\hline
I_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & 0
\end{array}\right).
$$

В силу вышесказанного для гиперповерхности Кенмоцу N специального эрмитова многообразия M^{2n} имеем

$$g^{ps}\sigma_{ps} = g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}+g^{\hat\alpha\hat\beta}\sigma_{\hat\alpha\hat\beta}+g^{\hat\alpha\beta}\sigma_{\hat\alpha\beta}+g^{\alpha\hat\beta}\sigma_{\alpha\hat\beta}+g^{nn}\sigma_{nn} = g^{\hat\alpha\beta}\sigma_{\hat\alpha\beta}+g^{\alpha\hat\beta}\sigma_{\alpha\hat\beta}+g^{nn}\sigma_{nn}.$$

Из (3) и (5) следует

$$g^{ps}\sigma_{ps} = i\sqrt{2}B^{\alpha n}_{\alpha} + i(n-1) - i\sqrt{2}B^{\alpha}_{\alpha n} - i(n-1) + \sigma_{nn} = \sigma_{nn}.$$

Поэтому $g^{ps}\sigma_{ps} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{nn} = 0$. Последнее равенство означает, что $\sigma(\xi,\xi) = 0$.

Итак, гиперповерхность Кенмоцу N W_3-многообразия M^{2n} минимальна в том и только том случае, если $\sigma(\xi,\xi) = 0$, что и требовалось доказать.

Поскольку класс специальных эрмитовых многообразий включает в себя класс келеровых многообразий, из доказанной теоремы вытекает такое

Следствие. *Гиперповерхность Кенмоцу келерова многообразия минимальна тогда и только тогда, когда* $\sigma(\xi,\xi) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Мир, 1985.
3. *Kiritchenko V. F.* Sur la gèomètrie des variètès approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Ser. I. 1982. V. 295, N 12. P. 673–676.
4. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry // Lecture Notes Math. 1976. V. 509. P. 1–145.
5. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
6. *Кириченко В. Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 5. С. 585–587.
7. *Банару М. Б.* О типовом числе слабо косимплектических гиперповерхностей приближенно келеровых многообразий // Фундаментальная и прикладная математика. 2002. Т. 8, № 2. С. 357–364.
8. *Banaru M. B.* Some theorems on cosymplectic hypersurfaces of six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Математички весник (СР Југославија). 2001. V. 53. P. 103–110.
9. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123, N 4. P. 35–58.
10. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1994. № 3. С. 6–13.
11. *Арсеньева О. Е., Кириченко В. Ф.* Автодуальная геометрия обобщенных эрмитовых поверхностей // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 1. С. 21–44.
12. *Банару М. Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 5. С. 3–16.
13. *Норден А. П.* Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.

Статья поступила 20 марта 2002 г.

Банару Михаил Борисович
Смоленский гуманитарный университет, кафедра математического моделирования, ул. Герцена, 2, Смоленск 214014
banaru@keytown.com