Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.11

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ С КОНЕЧНЫМИ ВЫЧИСЛИМЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ ВЫЧИСЛИМЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

А. С. Морозов, Б. Касымканулы

Аннотация: Показано, что для любой вычислимой булевой алгебры существует такое ее вычислимое представление, относительно которого любое вычислимое семейство автоморфизмов передвигает в совокупности лишь конечное множество атомов. Как следствие доказывается, что для любой атомной вычислимой булевой алгебры существует такое ее вычислимое представление, относительно которого любое вычислимое семейство автоморфизмов конечно. Доказательство проведено без использования метода приоритета.

Ключевые слова: вычислимая булева алгебра, конструктивная булева алгебра, конструктивные модели, автоморфизм.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории вычислимости, теории вычислимых (конструктивных) моделей и счетными булевыми алгебрами (см., например, [1–3]).

Известен ряд примеров вычислимых моделей с богатыми группами автоморфизмов, из которых вычислимыми автоморфизмами являются, однако, лишь тривиальные. Так, вычислимая модель может иметь 2^ω автоморфизмов, но при этом в любом своем гиперарифметическом представлении не иметь нетривиальных гиперарифметических автоморфизмов [4]. Другие примеры поведения таких групп можно найти, например, в обзоре [5]. Есть также серия подобных результатов о вычислимых булевых алгебрах. Дж. Реммел в [6] показал, что для любой булевой алгебры существует ее эффективное представление, относительно которого любой вычислимый автоморфизм передвигает лишь конечное число атомов. В меньшей общности (только для атомных булевых алгебр) подобный результат был получен ранее А. С. Морозовым в [7]. Данная работа продолжает изучение булевых алгебр с малыми группами вычислимых автоморфизмов.

Цель настоящей работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любой вычислимой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует такое ее вычислимое представление, относительно которого любое вычислимое семейство ее автоморфизмов передвигает в совокупности лишь конечное множество атомов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593), INTAS (грант N 00–499) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–2112,2003.1).

© 2004 Морозов А. С., Касымканулы Б.

Следствие 1. *Для любой вычислимой атомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$ существует такое ее вычислимое представление, относительно которого любое вычислимое семейство ее автоморфизмов конечно.*

Заметим, что это следствие неверно в случае, когда алгебра содержит нетривиальный безатомный элемент, поскольку в этом случае она, очевидно, всегда будет обладать бесконечным вычислимым семейством автоморфизмов.

Это следствие, в частности, обобщает упомянутый результат Дж. Реммела из [6], поскольку если φ — произвольный вычислимый автоморфизм такой алгебры, то вычислимое семейство $\{\varphi\}$ будет передвигать в совокупности лишь конечное число ее атомов.

Доказательство следствия. Предположим, что теорема 1 уже доказана. Пусть $(f_i(x))_{i<\omega}$ — вычислимое семейство автоморфизмов вычислимой атомной булевой алгебры $\mathfrak{B}$, и пусть $a \in \mathfrak{B}$ — объединение конечного (по теореме 1) множества всех атомов, передвигаемых хотя бы одним из автоморфизмов этого семейства. Тогда, поскольку алгебра $\mathfrak{B}$ атомная, каждый элемент из семейства автоморфизмов $(f_i(x))_{i<\omega}$ полностью определен перестановкой, которую он определяет на конечном множестве атомов, меньших a. Таких перестановок существует лишь конечное число. Отсюда получается, что и семейство $(f_i(x))_{i<\omega}$ конечно. Следствие доказано.

Доказательство теоремы. Будем считать, что число атомов алгебры $\mathfrak{B}$ бесконечно, так как в противном случае доказывать нечего.

Мы обозначаем n-ю бинарную клиниевскую функцию через $\varkappa_n(i,x)$, а ее конечную часть, вычисленную за первые t шагов, — через $\varkappa_n^t(i,x)$. Мы также используем стандартную нумерацию всех конечных множеств: $D_m = \{a_0 < a_1 < \dots a_{k-1}\}$, где $m = \sum_{i=0}^{k-1} 2^{a_k}$. Для множества атомов булевой алгебры $\mathfrak{B}$ используем обозначение $\mathrm{At}\,\mathfrak{B}$, а множество всех атомов булевой алгебры $\mathfrak{B}$, меньших a, обозначаем через $\mathrm{At}_{\mathfrak{B}}(a)$. Запись $|M|$ означает мощность множества M.

При построении булевых алгебр будем использовать древесные представления вычислимых булевых алгебр, с которыми можно познакомиться по [3]. Коротко напомним, о чем идет речь. Если α и β — две последовательности символов, то пусть $\alpha \sqsubseteq \beta$ означает, что α — начальный сегмент β. *Бинарным деревом* называется любое непустое множество $S \subseteq 2^{<\omega}$, замкнутое относительно взятия начальных сегментов (т. е. $\forall \alpha, \beta \in 2^{<\omega}(\alpha \sqsubseteq \beta \ \& \ \beta \in S \Rightarrow \alpha \in S)$) и удовлетворяющее дополнительному условию $\forall \varepsilon \in 2^{<\omega}(\varepsilon 0 \in S \Leftrightarrow \varepsilon 1 \in S)$. Пустая последовательность из $2^{<\omega}$ обозначается через Λ. Для наглядности предполагаем, что наше дерево растет вниз, т. е. $\alpha \sqsubseteq \beta$ означает, что α находится выше β. Мы предполагаем также, что зафиксирована гёделевская нумерация элементов множества $2^{<\omega}$ натуральными числами; поэтому мы можем говорить о вычислимых и перечислимых деревьях. Каждому перечислимому дереву $T \subseteq 2^{<\omega}$ соответствует булева алгебра $\mathfrak{B}(T)$, порождаемая элементами дерева T и элементами 0 и 1, которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям: $\Lambda = 1$, $\varepsilon 0 \cup \varepsilon 1 = \varepsilon$, $\varepsilon 0 \cap \varepsilon 1 = 0$ для всех $\varepsilon \in T$. Каждый элемент этой булевой алгебры имеет представление в виде объединения конечного числа элементов дерева T. Такое объединение $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k$ назовем *каноническим,* если оно не содержит элементов α_i, α_j таких, что $\alpha_i \sqsubseteq \alpha_j$, $i \neq j$, а также пар элементов вида $\alpha 0$, $\alpha 1$. Каждый элемент алгебры $\mathfrak{B}(T)$ имеет в точности одно каноническое представление. Очевидно, что для любого дерева $T \subseteq 2^{<\omega}$ элемент a алгебры $\mathfrak{B}(T)$ является атомом, если и только если он является концевым элементом в T, т. е. если $a \in T$ и $\forall \varepsilon \in T\,(a \sqsubseteq \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon)$. Естественным образом нумеруя канонические представления элементов, получим вычислимое представление булевой алгебры $\mathfrak{B}(T)$. Известно [3], что таким способом можно получить все вычислимые булевы алгебры с точностью до вычислимого изоморфизма.

Пусть T — некоторое перечислимое дерево такое, что $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(T)$. Для доказательства теоремы нам достаточно построить некоторое перечислимое дерево $U \supseteq T$ такое, что $\mathfrak{B}(U) \cong \mathfrak{B}(T)$, при этом удовлетворить следующее бесконечное семейство условий.

$\mathbf{Q}_n$ $(n \in \omega)$: *неверно, что множество* $(\varkappa_n(i,x))_{i\in\omega}$ *образует семейство автоморфизмов булевой алгебры* $\mathfrak{B}(U)$, *для которого бесконечно множество* $\{x \in \mathrm{At}\,\mathfrak{B}(U) \mid \exists i\, \varkappa_n(i,x) \neq x\}$.

Для удобства построения нам понадобится вычислимая последовательность функций $(\gamma_n(i,x))_{n,i<\omega}$, являющаяся для каждого $n \in \omega$ замыканием последовательности функций $(\varkappa_n(i,x))_{i<\omega}$ относительно операций композиции и обращения, которая определена следующим образом. Зафиксируем некоторую вычислимую функцию $\kappa_n(i,x)$ такую, что для любых i и n если $f(x) = \varkappa_n(i,x)$ — разнозначная функция, то $\kappa_n(i,x) = f^{-1}(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}(f^{-1})$. Зафиксируем также некоторую гёделевскую нумерацию $(\tau_i)_{i<\omega}$ групповых термов от переменных $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$. По определению $\gamma_n(i,x)$ — это функция, которая вычисляется по следующему алгоритму:

> *по данному i вычислите терм τ_i; вместо каждого вхождения t_j подставьте в него функцию $\varkappa_n(j,x)$, а вместо каждого вхождения t_j^{-1} — функцию $\kappa_n(j,x)$; значение полученного выражения от x и есть значение функции $\gamma_n(i,x)$.*

Мы будем вместо семейства условий $(Q_n)_{n<\omega}$ удовлетворять следующее бесконечное семейство условий:

$\mathbf{R}_n$ $(n \in \omega)$: *неверно, что множество* $(\gamma_n(i,x))_{i\in\omega}$ *образует семейство автоморфизмов булевой алгебры* $\mathfrak{B}(U)$, *для которой бесконечно множество* $\{x \in \mathrm{At}\,\mathfrak{B}(U) \mid \exists i\, \gamma_n(i,x) \neq x\}$.

Поскольку очевидно, что $\neg Q_n$ влечет $\neg R_n$, из удовлетворения всех условий семейства $(R_n)_{n<\omega}$ следует и удовлетворение всех условий из семейства $(Q_n)_{n<\omega}$.

Построение проведем по шагам. Зафиксируем некоторое перечисление $T^0 \subseteq T^1 \subseteq \ldots T^t \cdots \subseteq T = \bigcup\limits_{t<\omega} T^t$ исходного дерева T, в котором каждое T^t — дерево, и по каждому $t \in \omega$ эффективно находим индекс m конечного множества D_m всех номеров элементов из T^t. Результатом каждого шага t будет являться конечное дерево U^t такое, что $T^t \subseteq U^t$. Эти деревья будут образовывать возрастающую цепочку множеств:

$$U^0 \subseteq U^1 \subseteq \ldots U^t \cdots \subseteq U = \bigcup_{t<\omega} U^t = U.$$

Пусть $a \in 2^{<\omega}$. Обозначим через $a \upharpoonright m$ последовательность, состоящую из первых m элементов последовательности a. Пусть $a \in U^t \supseteq T^t$. Назовем *t-рангом элемента* a наибольшее натуральное число m такое, что $a \upharpoonright m \in T^t$. Очевидно, что t-ранг любого элемента a монотонно возрастает по t и не превосходит его длины. Назовем *рангом элемента* $a \in U$ предел его t-рангов при $t \to \infty$. Вершины, являющиеся концевыми в дереве T либо принадлежащие множеству $U \setminus T$, назовем *внешними*. Вершины, являющиеся концевыми в дереве T^t либо принадлежащие множеству $U^t \setminus T^t$, назовем *внешними на шаге* t.

Идея доказательства состоит в том, что мы будем удовлетворять условие R_n, выбирая два элемента a и b таких, что $\gamma_n(i,a) = b$, $a \cap b = 0$, и добавляя новые элементы дерева под один из этих элементов, чтобы обеспечить неравенство мощностей множеств атомов, меньших a и b соответственно. Попутно мы будем обеспечивать конечность этих мощностей, выбирая, если надо, другие a и b в случае, если имеется подозрение, что число атомов под одним из элементов может оказаться бесконечным (например, если его представление стало содержать не внешний элемент), а также стараясь выбрать для удовлетворения условия элементы достаточно большого ранга. Заслуживает внимания тот факт, что при удовлетворении одного условия нашим способом возможно удовлетворить любое другое условие Q_m, не нарушая выполнения условия Q_n, нужно просто добавить под один из элементов достаточно большое количество новых элементов. Поэтому наше доказательство не является доказательством методом приоритета.

В ходе конструкции удовлетворение условия R_n будет ассоциировано с тем, что некоторая четверка $\langle n,i,a,b\rangle \in \omega \times \omega \times \mathfrak{B}(U) \times \mathfrak{B}(U)$ будет объявлена *активной*. При этом если четверка $\langle n,i,a,b\rangle$ активна на шаге t, то выполнено следующее условие:

$$(\text{а}) \ \&\ (\text{б}) \ \&\ (\text{в}) \ \&\ (\text{г}), \qquad (*)$$

где

(а) $|\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(U^t)}(a)| \neq |\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(U^t)}(b)|$;

(б) все элементы канонических представлений для a и b являются внешними на шаге t;

(в) все элементы канонических представлений для a и b имеют t-ранги не менее n;

(г) $\gamma_n^t(i,a) = b$ и $a \cap b = 0$.

Теперь все готово для описания построения.

Построение.

Шаг t. Пусть n равно левому компоненту пары, кодируемой числом t. Добавим к построенной к данному моменту конечной части дерева U все элементы из T^t. Все активные на этот момент четверки $\langle m,i,a,b\rangle$, для которых в результате этого нарушилось условие $(*)$, объявляем неактивными. (Заметим, что если на шаге t четверка $\langle m,i,a,b\rangle$ становится неактивной, то некоторые внешние вершины, входящие в представление элементов a и b, перестают быть внешними. Действительно, нарушение условий (а) или (б) влечет требуемое. Нарушение условия (в) невозможно, так как t-ранг монотонно возрастает по t. Нарушение условия (г) также очевидно невозможно.)

Дальнейшие действия шага t производятся только в случае, если одновременно выполнены следующие условия.

1. Требование R_n либо ранее не удовлетворялось ни разу, либо в последний раз удовлетворялось на некотором шаге $t' < t$, при этом выполнены условия:

— все функции $\gamma_n^t(i,x)$, $i \leqslant t'$ разнозначны;

— эти функции и обратные к ним функции определены на всех элементах множества $\mathfrak{B}(U^{t'})$;

— эти функции и обратные к ним функции задают изоморфные вложения $\mathfrak{B}(U^{t'}) \to \mathfrak{B}(U^t)$.

2. В данный момент не существует активной четверки с первой координатой n.

3. Существуют $i < t$, а также a, b из дерева, построенного к данному моменту, которые удовлетворяют условиям (б)–(г).

В этом случае мы производим следующие действия (и говорим, что *требование R_n удовлетворяется на шаге t*):

> *находим пару $\langle a, b\rangle$ с минимальным номером такую, что для некоторого $i < t$ выполнены условия* (б)–(г), *затем выбираем наименьшее $i = i_0$, для которого это условие выполняется, потом выбираем среди концевых вершин дерева, построенного к данному моменту, меньших $a \cup b$, вершину наибольшего t-ранга и добавляем под нее конечное поддерево так, чтобы для любой активной на данный момент четверки $\langle m, i, a', b'\rangle$ число концевых вершин, меньших a', не равнялось числу концевых вершин, меньших b', и чтобы число концевых вершин, меньших a, не равнялось числу концевых вершин, меньших b. Объявляем четверку $\langle n, i_0, a, b\rangle$ активной.*

Описание конструкции закончено.

Лемма 1.1. *Под каждый концевой элемент дерева T в ходе построения добавляется лишь конечное число элементов.*

Доказательство. Предположим, что α — концевая вершина дерева T, имеющая ранг n. Из описания построения следует, что после шага t, на котором ранг этой вершины сравняется с ее t-рангом, новые элементы под нее могут быть добавлены лишь при удовлетворении требований R_0, R_1, …, R_n. Поэтому для доказательства леммы достаточно понять, что при всех удовлетворениях каждого из этих требований, лишь конечное число элементов будет добавлено под эту вершину.

Пусть $n_0 \in \{0, \dots, n\}$. Здесь возможны следующие случаи.

Случай 1. Множество $(\gamma_{n_0}(i, x))_{i\in\omega}$ не образует семейства автоморфизмов булевой алгебры $\mathfrak{B}(U)$. Тогда в силу п. 1 из описания шага t удовлетворение требования R_{n_0} происходит лишь конечное число раз и соответственно добавит лишь конечное число новых элементов под α.

Случай 2. Случай 1 не выполнен, но в ходе построения возникла активная четверка $\langle n_0, i_0, a, b\rangle$, для которой канонические разложения элементов a и b содержат лишь внешние элементы. Это означает, что эта четверка будет всегда в дальнейшем активна и требование R_{n_0} никогда впоследствии удовлетворяться уже не будет.

Случай 3. Случаи 1 и 2 не выполнены. Если требование R_{n_0} удовлетворяется в ходе конструкции лишь конечное число раз, то лемма доказана. Предположим, что это требование удовлетворяется бесконечное число раз. Тогда каждый раз через некоторое время после удовлетворения требования R_{n_0} впоследствии оказывается, что хотя бы один из выбранных элементов a и b в каноническом представлении имеет элемент, не являющийся внешним. Пусть t_0 — шаг, после которого все вершины дерева T длины до $n + 1$ включительно уже появились в нашем построении. Предположим, что на некотором шаге $t_1 > t_0$ происходит очередное удовлетворение требования R_{n_0}. Если все элементы канонических разложений для a и b имеют t_1-ранг, не превосходящий n, то тогда это внешние элементы, и после удовлетворения на этом шаге требования R_{n_0}, некоторая четверка $\langle n_0, i, a, b\rangle$ останется активной навсегда. Отсюда следует, что требование R_{n_0} больше никогда не будет удовлетворяться; противоречие.

Значит, хотя бы один элемент канонических разложений для a и b имеют t_1-ранг, превосходящий n. Ввиду того, что мы всегда добавляем новые элементы под вершины максимального ранга, при удовлетворении требования R_{n_0} на шагах, больших t_0, новые элементы будут добавлены уже не под вершину α, а под некоторую другую вершину. Лемма доказана.

Следующая лемма непосредственно следует из леммы 1.1.

Лемма 1.2. *В дереве U число элементов ранга m конечно для любого $m < \omega$.*

Лемма 1.3. $\mathfrak{B}(U) \cong \mathfrak{B}(T)$.

Доказательство. Мы используем критерий Воота изоморфизма счетных булевых алгебр, доказательство которого можно найти, например в [3, гл. 1].

Критерий Воота. *Пусть $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ — две счетные булевы алгебры. Тогда $\mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{B}_1$ тогда и только тогда, когда существует подмножество $S \subseteq \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_1$ такое, что*

1) $\langle 0, 0\rangle \in S$ и $\langle 1, 1\rangle \in S$;
2) $\forall x, y\, (\langle x, y\rangle \in S \Rightarrow (x = 0 \Leftrightarrow y = 0))$;
3) $\forall x, y\, (\langle x, y\rangle \in S \Rightarrow \forall x_0 \leqslant x \exists y_0 \leqslant y(\langle x_0, y_0\rangle \in S \; \&$
$\langle x \setminus x_0, y \setminus y_0\rangle \in S))$;
4) $\forall x, y\, (\langle x, y\rangle \in S \Rightarrow \forall y_0 \leqslant y \exists x_0 \leqslant x(\langle x_0, y_0\rangle \in S \& \langle x \setminus x_0, y \setminus y_0\rangle \in S))$.

Пусть $\mathscr{F}(\mathfrak{B})$ — идеал Фреше булевой алгебры $\mathfrak{B}$, т. е. идеал, состоящий из всех объединений конечных семейств атомов этой алгебры. Обозначим через $x \triangle y$ симметрическую разность элементов x и y, т. е. элемент $(x \cap \bar{y}) \cup (y \cap \bar{x})$. Для доказательства соотношения $\mathfrak{B}(U) \cong \mathfrak{B}(T)$ достаточно проверить, что множество S, определенное как

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathfrak{B}(U) \times \mathfrak{B}(T) \mid x \triangle y \in \mathscr{F}(\mathfrak{B}(U)) \\ \& |\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(U)}(a)| = |\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(T)}(b)| \& |\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(U)}(\bar{a})| = |\operatorname{At}_{\mathfrak{B}(T)}(\bar{b})|\},$$

удовлетворяет критерию Воота, что легко проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Все требования R_n, $n \in \omega$, удовлетворяются.*

Доказательство. Предположим противное: для некоторого натурального n элементы семейства вычислимых автоморфизмов $(\gamma_n(i, x))_{i<\omega}$ алгебры $\mathfrak{B}(U)$ передвигают в совокупности бесконечно много атомов. Покажем, что тогда существует хотя бы одна пара a_0 и b_0, для которой начиная с некоторого шага будут всегда выполнены условия (б)–(г). Докажем, что на самом деле существует даже такая пара, состоящая из атомов. Действительно, если не существует различных атомов a и b, ранг которых не менее n и которые переводимы друг в друга некоторым автоморфизмом $\gamma_n(i, x)$, $i < \omega$, то в силу леммы 1.2 и сделанного предположения найдется атом, переводимый автоморфизмами $\gamma_n(i, x)$, $i < \omega$, в бесконечное семейство атомов. Теперь мы получаем требуемое из замкнутости семейства $(\gamma_n(i, x))_{i<\omega}$ относительно обращения и композиции.

Как замечено ранее, если четверка $\langle \_, \_, a, b\rangle$ перестает быть активной, то хотя бы один из элементов канонических представлений для a и b перестает быть внешним. Поэтому пара элементов $\langle a, b\rangle$ уже никогда в дальнейшем не может использоваться для удовлетворения требования R_n. Поскольку мы каждый раз при удовлетворении требования R_n выбираем пару элементов $\langle a, b \rangle$ с наименьшим номером, рано или поздно будет создана активная четверка $\langle n, i, a, b \rangle$ с участием внешних элементов a и b, которая будет активна всегда. Из леммы 1.1 следует, что под каждую внешнюю вершину будет добавлено лишь конечное число элементов, и каждый раз, добавляя новые элементы, мы заботимся о том, чтобы число концевых вершин под a и b не совпадали. В результате число атомов, меньших a, и число атомов, меньших b, в итоговой алгебре $\mathfrak{B}(U)$ не совпадут, и эти элементы не смогут быть отождествлены никаким автоморфизмом, но при этом $\gamma_n(i, a) = b$, т. е. $\gamma_n(i, x)$ не будет автоморфизмом; противоречие. Лемма а вместе с ней и теорема доказаны.

Авторы благодарят рецензента за замеченные неточности в изложении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.
2. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
4. *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.
5. *Morozov A. S.* Groups of computable automorphisms. Handbook of Recursive Mathematics. V. 1: Recursive Model Theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. Chapter 8. P. 311–345. (Stud. Logic Found. Math.).
6. *Remmel J. B.* Recursively rigid Boolean algebras // Ann Pure Appl. Logic. 1987. V. 36, N 1. P. 39–52.
7. *Морозов А. С.* О конструктивных булевых алгебрах с почти тождественными автоморфизмами // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 4. С. 478–482.

Статья поступила 7 апреля 2003 г., окончательный вариант — 15 сентября 2003 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

Касымканулы Борибай
Костанайский гос. университет им. А. Байтурсынова,
ул. Тарана, 118, Костанай 458000, Казахстан
boribay@mail.ru