Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2004. Том 45, № 1

УДК 517.55

ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ АЛГЕБР ЛИ С ОБЪЕДИНЕНИЕМ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Вводится понятие области для алгебр Ли. Исследуется вопрос о том, когда свободное произведение с объединенной подалгеброй двух областей снова является областью. Классифицированы перестановочные элементы в свободном произведении двух алгебр Ли с объединенной подалгеброй. Вычислен центр свободного произведения алгебр Ли с объединенной подалгеброй.

Ключевые слова: алгебра Ли, свободное произведение алгебр Ли, уравнение над алгеброй Ли, координатная алгебра, делители нуля.

§ 1. Введение

Недавно В. Н. Ремесленников предложил программу построения алгебраической геометрии над алгебрами Ли. Настоящая работа выполнена в рамках этой программы.

В работе [1] введены основные понятия алгебраической геометрии над группами такие, как алгебраическое множество, координатная группа, неприводимость, радикал и т. д. и установлены некоторые их важные свойства, а в [2] исследованы логические вопросы этой теории. В частности, в [1] дано определение области для групп и продемонстрирована важность свойства группы G «быть областью» для решения вопроса о неприводимости алгебраических множеств над G.

В препринте [3] по аналогии со случаем групп вводятся понятия алгебраической геометрии над алгебрами Ли, в том числе и понятие области. С любезного согласия автора мы приведем некоторые нужные нам фрагменты этой пока неопубликованной работы.

Пусть A — алгебра Ли над полем k. Определим категорию A-алгебр Ли. Объектами этой категории будут так называемые A-алгебры. Алгебру Ли B над полем k назовем *A-алгеброй*, если она содержит выделенную подалгебру, изоморфную алгебре A. Подробнее, A-алгебра есть алгебра Ли B вместе с вложением $\alpha : A \to B$ алгебр Ли над полем k.

Морфизмы определим с помощью A-гомоморфизмов. Лиев гомоморфизм $\varphi : B_1 \to B_2$ между A-алгебрами Ли B_1 и B_2 назовем *A-гомоморфизмом*, если $\varphi(a) = a$ для всех $a \in A$. Подробнее, $\varphi(\alpha_1(a)) = \alpha_2(a)$ для всех $a \in A$,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00674) и фонда «Университеты России» (грант ур. 04.01.049)

где α_1 и α_2 — соответствующие вложения алгебры A в алгебры B_1 и B_2. Через $\mathrm{Hom}_A(B_1, B_2)$ обозначим множество всевозможных A-гомоморфизмов из B_1 в B_2.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество. Обозначим через $A[X]$ свободную A-алгебру Ли, порожденную множеством X, т. е. свободную алгебру в категории A-алгебр Ли, порожденную X. Можно показать, что $A[X] = A * F(X)$, где $F(X)$ — свободная алгебра Ли в категории всех k-алгебр Ли, порожденная множеством X, а $*$ — знак свободного лиева произведения алгебр Ли. Пусть L — стандартный язык первой ступени теории алгебр Ли над фиксированным полем k. Язык L состоит из символа сложения $+$, символа 0 для обозначения нуля, символа лиева умножения $\circ$, а также набора символов $\{k_\alpha \mid \alpha \in k\}$ для задания унарных операций умножения на коэффициенты поля k. Для работы в рамках категории A-алгебр Ли удобно расширить язык L до языка L_A путем добавления в него в качестве констант всех ненулевых элементов алгебры A:

$$L_A = L \cup \{c_a \mid a \in A,\, a \neq 0\}.$$

Очевидно, что все A-алгебры Ли можно рассматривать как модели языка L_A.

Таким образом, класс всех A-алгебр Ли над полем k аксиоматизируем в языке L_A с помощью следующих двух серий аксиом.

1. Стандартная серия аксиом в языке L, выделяющая класс всех алгебр Ли над полем k.

2. Серии аксиом, задающих вложение алгебры A:

(a) $c_{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2} = k_{\alpha_1}(c_{a_1}) + k_{\alpha_2}(c_{a_2})$ для любых $a_1, a_2 \in A$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$;

(b) $c_{a_1 a_2} = c_{a_1} \circ c_{a_2}$ для любых $a_1, a_2 \in A$;

(c) $c_a \neq 0$ для всякого $a \in A$, $a \neq 0$.

Серии аксиом (a) и (b) обеспечивают наличие в алгебре гомоморфного образа алгебры A, а серия (c) гарантирует, что соответствующий гомоморфизм есть вложение.

Алгебраическая геометрия изучает системы уравнений. Алгебра A при построении алгебраической геометрии будет играть роль множества коэффициентов, над которым рассматриваются системы уравнений. Уравнения таких систем — это элементы алгебры $A[X]$. Подробнее, пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечный набор неизвестных, $A[X]$ — свободная A-алгебра Ли, порожденная множеством X. Элементы $f \in A[X]$ будем называть *полиномами от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из алгебры A*:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r),$$

где $a_1, \ldots, a_r \in A$ — константы. Приравнивая полином f к нулю, получаем уравнение над алгеброй A. Так, произвольное подмножество S алгебры $A[X]$ будем называть *системой уравнений над алгеброй A*.

Будем решать системы уравнений над алгеброй Ли A в некоторой A-алгебре Ли B над полем k.

Аффинным n-мерным пространством над алгеброй B назовем множество $B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_i \in B\}$. Точку $p = (b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ назовем *корнем многочлена* $f \in A[X]$, если

$$f(p) = f(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_r) = 0.$$

Аналогично точка $p \in B^n$ называется *корнем системы* $S \subseteq A[X]$, если p — корень каждого многочлена из S. *Алгебраическим множеством* над B, соответствующим системе S, назовем множество

$$V_B(S) = \{p \in B^n \mid f(p) = 0 \quad \forall f \in S\}.$$

Две системы уравнений S_1 и S_2 назовем *эквивалентными над* B, если $V_B(S_1) = V_B(S_2)$. Система S *несовместна над* B, если $V_B(S) = \varnothing$.

Определим понятие радикала. Пусть $Y \subseteq B^n$ — произвольное подмножество (не обязательно алгебраическое). Положим

$$\mathrm{Rad}_B(Y) = \{f \in A[X] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in Y\}.$$

Очевидно, что радикал любого множества будет идеалом алгебры $A[X]$. В случае, когда Y является алгебраическим множеством: $Y = V_B(S)$, будем также говорить о радикале его системы, т. е.

$$\mathrm{Rad}_B(S) = \mathrm{Rad}_B(V_B(S)).$$

Таким образом, радикал системы S состоит из всех полиномов, нулевых на всех решениях системы S. Полином $f \in A[X]$ назовем *следствием системы* S, если $f \in \mathrm{Rad}_B(S)$. Другими словами, полином f является следствием системы S тогда и только тогда, когда система $S' = S \cup \{f\}$ эквивалентна S. Иначе говоря, $\mathrm{Rad}_B(S)$ — это максимальная система уравнений, эквивалентная S. Если же система S несовместна, то ее радикал по определению — это вся алгебра $A[X]$.

Лемма о радикалах. 1. *Радикал любой системы $S \subseteq A[X]$ содержит в себе идеал, порожденный множеством S:* $\mathrm{Rad}_B(S) \supseteq \mathrm{id}\langle S\rangle$.

2. *Для произвольных множеств $Y_1, Y_2 \subseteq B^n$*

$$Y_1 \subseteq Y_2 \to \mathrm{Rad}_B(Y_1) \supseteq \mathrm{Rad}_B(Y_2).$$

3. *Для любого семейства подмножеств $\{Y_i \mid i \in I\}$, $Y_i \subseteq B^n$*

$$\mathrm{Rad}_B\Big(\bigcup_{i\in I} Y_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Rad}_B(Y_i).$$

4. *Идеал $I \lhd A[X]$ является радикалом некоторого алгебраического множества над B тогда и только тогда, когда $\mathrm{Rad}_B(V_B(I)) = I$.*

5. *Множество $Y \subseteq B^n$ является алгебраическим над B тогда и только тогда, когда $V_B(\mathrm{Rad}_V(Y)) = Y$.*

6. *Если $Y_1, Y_2 \subseteq B^n$ — алгебраические множества, то*

$$Y_1 = Y_2 \leftrightarrow \mathrm{Rad}_B(Y_1) = \mathrm{Rad}_B(Y_2).$$

Фактор-алгебру

$$\Gamma_B(Y) = \Gamma_B(S) = A[X]/\,\mathrm{Rad}_B(Y)$$

назовем *координатной алгеброй алгебраического множества* Y (или системы S, $Y = V_B(S)$). Если система S несовместна над B, то, очевидно,

$$\Gamma_B(S) = 0.$$

Можно проверить, что $\mathrm{Rad}_B(S)$ выражается следующим образом:

$$\mathrm{Rad}_B(S) = \bigcap_{p \in V_B(S)} \mathrm{Ker}\,\varphi_p,$$

где φ_p — гомоморфизм «подстановки» $f \mapsto f(p)$.

Первое определение делителей нуля. Элемент $0 \neq x \in A$ назовем *делителем нуля*, если существует $0 \neq y \in A$ такой, что

$$xy = 0, \quad axy = 0 \quad \forall a \in A. \tag{Z}$$

Замечание. Если для элементов $x, y \in A$ верно (Z), то

$$ayx = 0 \quad \forall a \in A,$$

т. е. в этом случае y также является делителем нуля.

Второе определение делителей нуля. Элемент $0 \neq x \in A$ назовем *делителем нуля*, если существует $0 \neq y \in A$ такой, что

$$\langle x \rangle \circ \langle y \rangle = 0.$$

Замечание. Если A — метабелева алгебра Ли, то оба определения делителей нуля эквивалентны.

Определение. Алгебра Ли A называется *областью*, если в ней нет делителей нуля.

Замечание. Если A — область в смысле первого определения делителей нуля, то она является областью и в смысле второго. Таким образом, областей в смысле второго определения больше.

Лемма D1. *Пусть $Z_1 \subseteq B^n$ и $Z_2 \subseteq B^m$ — алгебраические множества над B. Тогда множество $Z_1 \times Z_2 \subseteq B^{n+m}$ также является алгебраическим над B.*

Лемма D2. *Координатная алгебра алгебраического множества $Z_1 \times Z_2$ вычисляется по формуле*

$$\Gamma_B(Z_1 \times Z_2) \cong_A \Gamma_B(Z_1) *_{A=A} \Gamma_B(Z_2).$$

На этом мы закончим изложение препринта [3].

В настоящей статье мы рассматриваем вопрос о том, когда свободное произведение с объединением двух областей снова является областью. Этот вопрос важен потому, что свободное произведение с объединением координатных алгебр Ли играет в алгебраической геометрии над алгебрами Ли ту же роль, что тензорное произведение координатных колец в привычной алгебраической геометрии (см леммы D1 и D2 выше). Во избежание недоразумений подчеркнем, что делители нуля понимаются в смысле **второго** определения Э. Ю. Данияровой.

В качестве подготовительного результата охарактеризованы перестановочные элементы в свободном произведении двух алгебр Ли с объединенной подалгеброй. Классификация перестановочных элементов здесь вполне аналогична классификации перестановочных элементов в свободном произведении групп с объединенной подгруппой [4, с. 219–221]. Попутно вычислен центр свободного произведения алгебр Ли с объединенной подалгеброй.

§ 2. Подготовительные результаты

Мы пользуемся определением свободного произведения с объединением, данным А. И. Ширшовым в работе [5]. Нам понадобятся также некоторые определения из работ [5, 6].

Определение 1. Пусть S — упорядоченный алфавит. Множество всех ассоциативных слов в алфавите S упорядочим лексикографически слева направо, причем будем считать ассоциативное слово v большим, чем vw, где w — непустое слово. Ассоциативное слово u назовем *правильным*, если для любых непустых ассоциативных слов u_1, u_2 из равенства $u = u_1u_2$ следует, что $u > u_2u_1$.

Очевидно, что если $u = vw$ — правильное ассоциативное слово, то $u > w$.

Определение 2. Неассоциативное слово u называется *правильным*, если

1) правильно ассоциативное слово, полученное из u опусканием скобок,

2) если $u = vw$, то $v > w$, v, w — правильные неассоциативные слова,

3) если при условии 2 $v = v_1v_2$, то $v_2 \leq w$.

Лемма 1 из работы [6] фактически утверждает, что п. 1 определения 2 эквивалентен совокупности пп. 2, 3 того же определения.

Поясним, что ввиду имеющегося взаимно однозначного соответствия между правильными ассоциативными и неассоциативным словами мы сравниваем неассоциативные слова так же, как соответствующие ассоциативные.

Хорошо известно [6], что правильные неассоциативные слова в алфавите S образуют линейную базу в свободной алгебре Ли с множеством свободных порождающих S.

Идеал, порожденный множеством S в алгебре T, обозначается через $\mathrm{id}_T(S)$.

Пусть A и B — две алгебры Ли над полем K, содержащие подалгебры (которые мы отождествляем), изоморфные некоторой алгебре Ли C. Зафиксируем базы векторных пространств A, B, C таким образом, чтобы база Z алгебры C дополнялась множествами X, Y до баз A, B соответственно. Считаем множества X, Y, Z вполне упорядоченными. Рассмотрим свободное произведение с объединением $P = A *_C B$ (см. [5]).

Приведем еще одно необходимое нам определение из работы [5].

Определение 3 [5]. Рассмотрим упорядоченный алфавит $U = Z \cup Y \cup X$, причем на X, Y, Z сохраняется ранее введенный порядок и $z < y < x$ для любых $z \in Z$, $y \in Y$, $x \in X$. Правильное слово w в алфавите U называется *особым*, если либо $w \in U$, либо соответствующее w ассоциативное слово в алфавите $X \cup Y$ не содержит подслов вида $a'a''$ ($a', a'' \in X$, $a' > a''$) или $b'b''$ ($b', b'' \in Y$, $b' > b''$).

Если не сказано иное, под словом «степень» далее понимается степень относительно алфавита U.

Заметим, что особые слова в алфавите U степени два или выше не могут содержать в своей записи элементов множества Z.

Как известно (см. [6]), база алгебры P состоит из особых слов в алфавите U.

Пусть U — алфавит, как в определении 3. Положим $V_0 = \{ab \mid a \in X,\ b \in Y\}$ и упорядочим это множество лексикографически. Предположим, что множество V_m $(m \geq 0)$ уже построено и упорядочено. Рассмотрим множество правильных неассоциативных слов в алфавите U вида

$$a_1(a_1 \dots (a_1(\dots((\dots((wb_1)b_2)\dots b_s)a_2)\dots a_t))\dots),$$

где w — правильное слово в алфавите V_m, $a_1 \in X$ — старшая из букв, входящих в запись слова w, $a_2 \leq \ldots \leq a_t < a_1$, $b_1 \in Y$ не меньше всех букв алфавита Y, входящих в запись слова w, $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_s \in Y$, $s + t > 0$. Упорядочим полученное множество как множество правильных слов лексикографически слева направо. Обозначим это упорядоченное множество через V_{m+1} и положим

$$V = \bigcup_{m \geq 0} V_m.$$

Лемма 1. 1. *V состоит из особых слов степени не менее двух.*

2. *Каждое правильное неассоциативное слово в алфавите V является особым словом степени не менее двух в алфавите U.*

3. *Подалгебра, порожденная множеством V в P, свободна с множеством свободных порождающих V.*

4. *Подалгебра, порожденная в P всеми особыми словами в алфавите U степени два или выше, порождается множеством V.*

Доказательство. Первый пункт очевиден.

Правильное неассоциативное слово в алфавите V является правильным и в алфавите U, это слово не будет особым тогда и только тогда, когда оно содержит неассоциативное подслово одного из перечисленных ниже типов:

а) (a_1a_2) $(a_1 > a_2)$ или (b_1b_2) $(b_1 > b_2)$,

б) $(a_1(a_2u))$ $(a_1 > a_2)$ или $(b_1(b_2u))$ $(b_1 > b_2)$,

в) $(a_1(uv))$ и первая буква в слове u есть a_2, $a_1 > a_2$ или $(b_1(uv))$ и первая буква в слове u есть b_2, $b_1 > b_2$.

Все такие неассоциативные слова, а также неассоциативные слова, содержащие перечисленные в качестве подслов, не могут быть записаны в алфавите V. Это доказывает п. 2.

Для доказательства п. 3 нужно проверить, что правильные слова в алфавите V линейно независимы. Каждое правильное неассоциативное слово в алфавите V является особым согласно п. 2 и особые слова линейно независимы в P. Поэтому третье утверждение леммы следует из второго.

Чтобы доказать п. 4, достаточно проверить, что каждое особое слово степени не менее двух в алфавите U можно переписать как некоторый многочлен в алфавите V. Для слов, степень которых равна двум, это утверждение очевидно. Сделаем индуктивное предположение, что каждое особое слово степени $< k$ $(k \geq 2)$ обладает требуемым представлением. Пусть w — особое слово степени k в алфавите U, $w = uv$ и u, v непусты. Если оба слова u и v не являются элементами U, то для них нужное представление есть по предположению индукции, поэтому оно имеется и для w. Предположим теперь, что u — буква. Тогда это обязательно $a_1 \in X$, причем a_1 — наибольшая буква, входящая в запись слова v, поскольку неассоциативное слово w правильное и особое. По построению множества V и предположению индукции $w \in V$. Примерно так же разбирается случай, когда v — буква. Лемма доказана.

Замечание 1. Конструкция так называемого приведенного множества, использованная нами (в частной ситуации) при доказательстве леммы 1, принадлежит А. Г. Курошу [7]. Для свободных алгебр Ли она была использована А. И. Ширшовым [8] для доказательства теоремы о свободе подалгебр свободной алгебры Ли, а к свободным произведениям алгебр Ли ее впервые применил Г. П. Кукин [9, 10] для описания подалгебр свободных произведений в терминах порождающих и определяющих соотношений. Лемма 1 следует из некоторых результатов работ [9, 10], но мы предпочли явное доказательство из-за его простоты.

Лемма 2. 1. *Пусть s, $t \in P$ — особые слова степени не менее двух в алфавите $X \cup Y$, $s > t$. Тогда степень произведения st равна сумме степеней s и t.*

2. *Если $w \in P$ — особое слово степени $m \geq 2$, $a \in X$, то степень произведения aw равна $m + 1$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предыдущей леммы. Докажем второе. Именно, проверим, что подалгебра, порожденная в P множеством $V \cup \{a\}$, свободна при $a \in X$. При этом, не ограничивая общности, считаем, что буква a — самая младшая буква алфавита X. Удалив из V все особые слова, содержащие букву a последним множителем, получим множество V'. Нетрудно убедиться, что каждый элемент множества слов $V_a = V' \cup \{a\}$ не принадлежит подалгебре, порожденной остальными элементами этого множества, и что V содержится в подалгебре, порожденной в P множеством V_a. Докажем индукцией по степени *относительно алфавита* V_a, что различные правильные слова в алфавите V_a (с индуцированным порядком) являются различными особыми словами алфавита U. Для элементов степени 1, т. е. для a и элементов множества V', это очевидно или следует из леммы 1. Если w — правильное слово в алфавите V_a степени не менее двух, то $w = uv$, $u, v \in V_a$ правильны и $u > v$. По предположению индукции u и v — особые слова в алфавите U, следовательно, слово w не будет особым только в двух случаях: когда последняя буква слова u есть a_1, первая буква слова v есть a_2 ($a_1, a_2 \in X$, $a_1 > a_2$) или когда последняя буква слова u есть b_1, первая буква слова v есть b_2 ($b_1, b_2 \in Y$, $b_1 > b_2$).

Докажем, что в первом случае u есть элемент множества U. Допустим, напротив, что $u = u_1u_2$, u_1, u_2 непусты. Тогда $u_2 > v$, так как $u_2 \geq a_1 > a_2 \geq v$. Это невозможно потому, что слово w правильно. Если же $u = a_1 \in X$, то по предположению индукции $a_1 = a$, ведь из элементов множества U только буква a входит в алфавит V_a. Это тоже невозможно, поскольку a — младшая буква алфавита X.

Второй случай тоже невозможен, так как ни одно правильное слово в алфавите V_a не начинается с b_2. Это значит, что w — особое слово, что и требовалось.

Теорема 1 (ср. [4, с. 219–221]). *Если $x, y \in P$, $xy = 0$, то справедливо одно из следующих утверждений.*

1. *Один из сомножителей x или y лежит в C.*
2. *Если ни x, ни y в C не лежат, и один из элементов x или y лежит в одной из компонент A или B, то и второй тоже лежит в той же компоненте.*
3. $x = c_1 + \lambda w$, $y = c_2 + \mu w$, *где* $c_1, c_2 \in C$, $w \in P$, $\lambda, \mu \in K$, *причем* $c_1w = c_2w = c_1c_2 = 0$.

Доказательство. Предположим, что x, y таковы, что $xy = 0$ и ни один из сомножителей в C не лежит.

Предположим, что $x \in A \setminus C$. Без ограничения общности можем считать, что $x = a \in X$. Пусть $y = c_1 + a_1 + b_1 + f_1$. Здесь $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ — линейные комбинации элементов множеств X и Y соответственно, $c_1 \in C$, f_1 — линейная комбинация особых слов степени не менее двух. Тогда $a(c_1 + a_1 + b_1 + f_1) = ac_1 + aa_1 + ab_1 + af_1$. Если $f_1 \neq 0$, то старшее особое слово произведения af_1 имеет степень, равную степени f_1, увеличенной на 1 (по лемме 2). Поэтому $f_1 = 0$. Отсюда легко следует, что $y \in A$. Случай, когда $x \in B \setminus C$, разбирается симметрично.

Пусть $x, y \notin A \cup B$, $xy = 0$, и не выполнено заключение п. 3. Мы хотим получить противоречие. Выберем x с наименьшим возможным старшим особым словом, а из всех возможных y выберем элемент с наименьшим старшим словом. Понятно, что старшее слово y больше либо равно старшему слову x. Пусть $x = c_1 + a_1 + b_1 + f_1$, $y = c_2 + a_2 + b_2 + f_2$, где $c_i \in C$; $a_i \in A$, $b_i \in B$ — линейные комбинации элементов множеств X и Y соответственно; f_i — линейная комбинация особых слов степени 2 или выше, $i = 1, 2$. По условию

$$c_1c_2 + c_1a_2 - c_2a_1 + c_1b_2 - c_2b_1 + a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 - a_2b_1 + c_1f_2 - c_2f_1 \\ + a_1f_2 - a_2f_1 + b_1f_2 - b_2f_1 + f_1f_2 = 0.$$

По лемме 2 получаем равенство старших особых слов x и y. Рассмотрим элементы x и $x-y$. Для них выполнено заключение нашей теоремы, поскольку $x-y$ имеет меньшее старшее слово, чем x, и $(x-y)x = 0$.

Рассмотрим случай, когда $x - y \in C$, так как $x \notin C$ по предположению. В этой ситуации легко видеть, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Это означает, что $x = c_1' + w$, $y = c_2' + w$, $c_1'w = c_2'w = c_1'c_2' = 0$, где $c_1' = 0$, $c_2' = c_2 - c_1$, $w = x$; противоречие.

Рассмотрим случай, когда $x-y \in A \setminus C$. Тогда $x \in A$ по п. 2, это невозможно по нашему предположению.

Наконец, пусть $x - y = c' + \lambda w$, $x = c'' + \mu w$, $c'c'' = c'w = c''w = 0$. Здесь $c', c'' \in C$, $w \in P$, $\lambda, \mu \in K$. Тогда $y = x - (x - y) = (c'' - c') + (\mu - \lambda)w$, причем все произведения $(c'' - c')c'$, $c'w$, $(c'' - c')w$ равны нулю. Противоречие с тем, что для x и y не выполнен п. 3 заключения. Теорема доказана.

Обозначим через $Z(G)$ центр алгебры Ли G.

Следствие. *Если $A \neq C$ и $B \neq C$, то центр алгебры Ли $P = A *_C B$ равен $Z(A) \cap Z(B) \cap C$.*

Доказательство. Понятно, что $Z(A) \cap Z(B) \cap C \subseteq Z(P)$. Из п. 2 предыдущей теоремы следует, что элемент x, перестановочный с $A \setminus C \neq \varnothing$ и с $B \setminus C \neq \varnothing$, должен лежать в A и в B. Тем самым $x \in C$. Поэтому $Z(P) \subseteq C$. Дальнейшее очевидно.

§ 3. Делители нуля в свободных произведениях

Определение. Пусть L — алгебра Ли над полем K. Ненулевые элементы x, y алгебры L называются *делителями нуля* тогда и только тогда, когда идеалы, порожденные этими элементами в алгебре L, коммутируют.

Теорема 2. *Пусть, как выше, $P = A *_C B$ и A, B без делителей нуля. Предположим, что C не содержит ненулевых идеалов алгебр A, B. Тогда P не имеет делителей нуля.*

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ и $y \neq 0$ — делители нуля в P. Поскольку $xy = 0$, по теореме 1 возможны три случая.

1. Если $x \in A \setminus C$, то $y \in A$. Это противоречит тому, что в компонентах нет делителей нуля, поскольку пересечения идеалов, порожденных x (соответственно y) в P, с подалгеброй A дают ненулевые идеалы в A, произведение которых нулевое. Если $x \in B \setminus C$, то рассуждения симметричны.

2. Пусть $x \in C$. Рассмотрим идеал, порожденный x в P. Он имеет ненулевое пересечение с обеими алгебрами A и B. Обозначим $I = A \cap \mathrm{id}_P(x)$, $J = B \cap \mathrm{id}_P(x)$. Это идеалы в A и B соответственно. Оба идеала I и J не могут лежать в C по условию. Пусть, скажем, I в C не содержится. Найдется элемент $z \in I \setminus C \subseteq A \setminus C$, для которого $zy = 0$. Эта ситуация рассмотрена в предыдущем пункте доказательства.

3. Пусть теперь $x = c_1 + \lambda w$, $y = c_2 + \mu w$, $c_1 w = c_2 w = c_1 c_2 = 0$, где $c_1, c_2 \in C$, $w \in P$. Поскольку каждый элемент идеала, порожденного x, коммутирует с y и первые две возможности из теоремы 1 уже рассмотрены, считаем, что каждый элемент u этого идеала имеет вид $u = c(u) + \lambda(u)w$, где $c(u) \in C$, $\lambda(u) \in K$.

Аналогично можем считать, что каждый элемент v идеала, порожденного y, имеет вид $c(v) + \mu(v)w$ ($c(v) \in C$, $\mu(v) \in K$). Отображения $\lambda : \mathrm{id}_P(x) \to K$ и $\mu : \mathrm{id}_P(y) \to K$ являются K-линейными. Если хотя бы одно из них не инъективно, то в одном из этих идеалов найдется ненулевой элемент, лежащий в C, а эта ситуация сводится к п. 2. В противном случае оба идеала одномерны. Тогда алгебра P действует на этих идеалах скалярами, скажем $up = \chi_p u$, $p \in P$, $u \in \mathrm{id}_P(x)$, $\chi_p \in K$. Тогда $\chi_{p_1 p_2} = 0$ для любых $p_1, p_2 \in P$. В частности, коммутанты A' и B' алгебр A и B действуют на идеале $\mathrm{id}_P(x)$ нулевым образом.

Если $A' \neq 0$ и $B' \neq 0$, то A' и B', будучи ненулевыми идеалами алгебр Ли A и B соответственно, не могут оба содержатся в C, и можно считать, что $\varnothing \neq A' \setminus C \subseteq A \setminus C$. Так как $x(A' \setminus C) = 0$, то $x \in A$ по п. 2 теоремы 1. Противоречие получается так же, как в п. 1.

Если же, допустим, $B' = 0$, то A' в C содержаться не может, так как в этом случае C — идеал в B и C — идеал в A. Когда $C \neq 0$, то это опять дает противоречие с условиями теоремы.

Рассмотрим последний случай $C = 0$. Тогда P является свободным произведением и отсутствие делителей нуля (даже без предположения об отсутствии делителей нуля в компонентах) следует из двух фактов. Первый, что каждый ненулевой идеал в P имеет ненулевое пересечение с декартовой подалгеброй, очевиден. Второй, что декартова подалгебра свободного произведения свободна, есть теорема Г. П. Кукина из [11]. Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема остается верной, если условие «C не содержит ненулевых идеалов компонент» заменить (более слабым) условием «C не содержит ненулевых идеалов хотя бы одной из компонент». Приведенное доказательство проходит без изменений.

Определение. Пусть L — алгебра Ли над полем K. Подалгебра $A \neq 0$ алгебры L называется *антиидеалом алгебры* L, если для каждого элемента $a \in A$ из включения $aL \subseteq A$ следует равенство $a = 0$.

Замечание 3. В теореме 2 вместо условия на отсутствие идеалов компонент в объединяемой подалгебре можно поставить условие «C антиидеал в компонентах». Для доказательства достаточно заметить, что антиидеал алгебры Ли, очевидно, не может содержать ненулевых идеалов этой алгебры.

Пример. Предположение о том, что C не содержит ненулевых идеалов обеих компонент произведения P, нельзя выбросить. Действительно, пусть A — свободная алгебра Ли над полем K со свободными порождающими a, b, B — свободная алгебра Ли над тем же полем со свободными порождающими x, y. Пусть $C = A' = B'$, причем каждый коммутатор от букв a, b отождествлен с таким же коммутатором от букв x, y. Очевидно, компоненты делителей нуля не имеют, однако, как легко проверить, $C \cdot \mathrm{id}_P(a - x) = 0$.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить В. Н. Ремесленникова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G., Miasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
2. *Miasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. II. Logical foundation // J. Algebra. 2000. V. 234. P. 225–276.
3. *Даниярова Э. Ю.* Алгебраическая геометрия над алгебрами Ли. Омск, 2003. (Препринт).
4. *Магнус В. Каррас А. Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

5. *Ширшов А. И.* Об одной гипотезе теории алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 297–301.

6. *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 2. С. 113–122.

7. *Курош А. Г.* Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Мат. сб. 1947. Т. 20. С. 239–262.

8. *Ширшов А. И.* Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 2. С. 441–452.

9. *Кукин Г. П.* Подалгебры свободного произведения алгебр Ли с объединенной подалгеброй // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 1. С. 59–86.

10. *Кукин Г. П.* О подалгебрах свободного произведения ограниченных алгебр Ли с объединенной подалгеброй // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 1. С. 53–83.

11. *Кукин Г. П.* О декартовой подалгебре свободной лиевой суммы алгебр Ли // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 6. С. 701–713.

Статья поступила 29 апреля 2003 г.

Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru