Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.98

О БИФУРКАЦИЯХ РАВНОВЕСИЙ ПРИ РАЗРУШЕНИИ КОСИММЕТРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Л. Г. Куракин, В. И. Юдович

Аннотация: Исследуются бифуркации, сопутствующие распаду непрерывного семейства равновесий косимметричной динамической системы (или вообще семейства решений косимметричного операторного уравнения) при возмущении, разрушающем косимметрию. Продолжаются исследования, начатые в работах [1–3]. Применяется метод Ляпунова — Шмидта. Проведен детальный анализ в случаях, когда уравнение разветвления одномерно или двумерно.

Ключевые слова: косимметрия, симметрия, бифуркация, семейство равновесий, метод Ляпунова — Шмидта.

Существуют два подхода к исследованию бифуркаций — метод Ляпунова — Шмидта и метод центрального многообразия. Метод Ляпунова — Шмидта не связан ограничениями размерности ядра линеаризованного оператора и пригоден для исследования ветвления решений операторных уравнений. Вместе с аналитической теорией возмущений спектра он может служить и для исследования устойчивости равновесий и периодических решений дифференциальных уравнений. Метод центрального многообразия дает наглядную геометрическую картину локальных фазовых портретов системы и во многих случаях удобней для исследования устойчивости движения. В данной работе применяется метод Ляпунова — Шмидта. Все заданные операторы предполагаются аналитическими, хотя большинство результатов распространяется и на тот случай, когда они класса C^k при $k = 2$ или $k = 3$.

Общая теория [4, 5] классифицирует бифуркации по коразмерности вырождения. Для рассмотрения динамической системы с непрерывным семейством равновесий, что соответствует бесконечной коразмерности вырождения, должны быть серьезные причины. Самая известная среди них — присутствие группы симметрии рассматриваемой динамической системы. Другой возможной причиной служит косимметрия [6, 7].

Члены семейства равновесий косимметричной динамической системы обладают изменчивым спектром устойчивости [6, 7], что принципиально отличает такое семейство от орбиты действия любой динамической группы симметрии. Не раз было подчеркнуто [8, 9], что причины сильной неединственности равновесий в системах с косимметрией и в системах с симметрией двойственны: наличие косимметрии указывает на недоопределенность системы, тогда как наличие

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04–01–96815), программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (проект № УР.04.01.035) и гранта поддержки научных школ (проект № НШ-1768.2003.1).

симметрии говорит о ее переопределенности. Равновесия, принадлежащие одной орбите группы симметрии, лишены индивидуальности, и поэтому теория бифуркаций в симметричных системах рассматривает скорее бифуркации орбит, а не равновесий в отдельности.

Роль симметрии в современной физике и, в частности, в теории бифуркаций хорошо известна [10–14]. В то же время понятие косимметрии является сравнительно новым и нет сомнений, что нетривиальные косимметрии будут еще обнаружены во многих задачах математической физики. Известные в настоящее время примеры — фильтрационная конвекция жидкости [6, 7], в частности, многокомпонентной и магнитной [15–17], системы классической механики с симметричной потенциальной энергией [9, 18], модели фазовых переходов антиферромагнетиков [19], задачи о волнах на поверхностях раздела жидкостей [20]. Разумеется, речь здесь идет о неголономных косимметриях, голономные косимметрии суть дифференциалы интегралов системы и, конечно, хорошо известны. Заметим, что пуассоновы системы и их обобщения, наряду с известными интегралами Казимира и соответствующими им голономными косимметриями, могут обладать и неголономными косимметриями [19]. В частности, это имеет место для уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости [7, 19]. Классические уравнения Эйлера — Пуассона тяжелого гироскопа и уравнения Киркгофа — движения твердого тела в потенциальном потоке жидкости — обладают неголономными косимметриями лишь при специальных значениях параметров [19].

Нетривиальная косимметрия указывает на скрытую недоопределенность системы, которая выражается в появлении нового свободного параметра, скажем, длины дуги вдоль одномерного семейства. Когда явно входящие параметры косимметричной системы изменяются, происходят необычные бифуркации как самих непрерывных семейств, так и входящих в них равновесий [6, 21–31]. В работах [27, 28] показано, что при косимметричном возмущении системы семейство равновесий может разорваться, на нем могут появиться новые устойчивые и неустойчивые дуги, на первоначально гладком семействе может возникнуть острие (нулевой угол), от которого может ответвиться цикл равновесий или петля равновесий. Описана бифуркация рождения цикла равновесий «из воздуха». Прослежены также бифуркации, связанные с изменением типа равновесия (узел-фокус, узел-седло и т. д.).

Понятно, что непрерывные семейства равновесий косимметричных систем не выдерживают возмущений, разрушающих косимметрию и, вообще говоря, распадаются или даже полностью исчезают. Как показано в [2, 3] при таких возмущениях, в предположении аналитичности операторов в условиях общего положения сохраняется не более чем конечное число решений. Если исчезают все решения, то цикл равновесий превращается в предельный цикл — траекторию периодического режима с большим периодом.

В работах [2, 3] разобран случай невырожденного семейства равновесий, когда размерность ядра производной оператора совпадает с размерностью семейства и с числом нетривиальных косимметрий. *Основная цель данной работы — рассмотреть случай вырожденных равновесий семейства, когда соответствующее уравнение разветвления двумерно.* Мы ограничиваемся здесь случаем единственной косимметрии. Вопросы устойчивости авторы намерены рассмотреть в другой статье, с применением метода центрального (нейтрального) многообразия. Ранее в работах [27, 28] были изучены возмущения, сохраняющие косимметрию. Можно сказать, что в данной работе исследовано разрушение бифуркаций, описанных в [27, 28].

Распаду семейства стационарных режимов фильтрационной конвекции в невырожденном случае посвящена работа [32]. В работе [33] для одной конечномерной модели фильтрационной конвекции рассмотрен и вырожденный случай.

Статья организована следующим образом. В § 1 дана постановка задачи и с применением спектральных проекторов выведено общее уравнение разветвления. Показано (предложение 1.1), что уравнение разветвления наследует косимметрию при косимметричном возмущении [6]. Доказано, что в условиях общего положения в результате возмущения непрерывное семейство полностью исчезает (теорема 1.1).

В § 2 разобран случай одномерного уравнения разветвления. Сначала приводятся известные результаты [27, 28] для косимметричного возмущения, когда применима косимметричная версия теоремы о неявной функции [6]. Затем в теореме 2.1 описываются бифуркации при разрушении косимметрии. Показано, в частности, что распад семейства равновесий может сопровождаться бифуркацией рождения пары равновесий «из воздуха». Рассмотрены как случай общего положения, так и случай линейного вырождения коразмерности 1 и произвольных нелинейных вырождений.

Вырождение коразмерности 1 в нашей задаче означает, что соответствующая невозмущенная система встречается неустранимым образом в однопараметрических семействах косимметричных векторных полей, т. е. сохраняется при малых гладких косимметричных возмущениях.

В § 3 показано, что вырождения в задаче о структуре множества равновесий связаны с изменением размерности ядра линеаризованного поля, а не со строением спектрального подпространства (предложение 3.1). Детально исследованы двумерные уравнения разветвления. Снова сначала разбирается косимметричный случай (теоремы 3.1 и 3.2) [27, 28]. Рассмотрены ситуация, когда линейная часть уравнения разветвления невырожденна, а также случай ее вырождения. Изучены возможные вырождения вплоть до самого сильного, когда равновесные режимы существуют лишь при критическом значении параметра и заполняют двумерную поверхность в окрестности невозмущенного равновесия. Описаны: a) двусторонняя седловая бифуркация, b) односторонняя бифуркация рождения равновесного цикла «из воздуха» и c) бифуркация потери гладкости семейством равновесий — образование нулевого угла на гладком семействе. Затем (теорема 3.3) исследован распад бифуркаций a) и b) под действием некосимметричных возмущений.

§ 1. Постановка задачи и уравнения разветвления

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H:

$$\dot{\theta} = M(\theta, \lambda, \gamma), \quad M(\theta, \lambda, \gamma) = F(\theta, \lambda) + \gamma K(\theta, \lambda, \gamma), \tag{1.1}$$

с вещественными параметрами $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$. Предположим, что зависящее от параметра λ отображение $F : H \times \mathbb{R} \to H$ допускает косимметрию L, тоже зависящую от λ. Это означает, что известно отображение $L : \ H \times \mathbb{R} \to H$, $(\theta, \lambda) \mapsto L(\theta, \lambda)$, такое, что для всех $\theta \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ векторы $F(\theta, \lambda), L(\theta, \lambda)$ ортогональны [6, 7]:

$$(F(\theta, \lambda), L(\theta, \lambda)) = 0. \tag{1.2}$$

Допустим, что уравнение (1.1) при $\gamma = 0$ и некотором $\lambda = \lambda_0$ имеет равновесие θ_0, так что
$$F(\theta_0, \lambda_0) = 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что вектор $L_0 = L(\theta_0, \lambda_0)$ принадлежит ядру оператора A^*, сопряженного к производной $A = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$ [6]. Для гладкой косимметрии это следует из равенства [6]

$$F'^*(\theta, \lambda)L(\theta, \lambda) + L'^*(\theta, \lambda)F(\theta, \lambda) = 0, \tag{1.4}$$

получаемого дифференцированием тождества (1.2) по переменной θ. Таким образом, если равновесие θ_0 некосимметрично, т. е. $L_0 \neq 0$, то нуль является собственным значением оператора A^*.

Пусть выполняются следующие гипотезы.

H1. Косимметрия L и векторное поле M аналитичны соответственно в некоторых окрестностях точек (θ_0, λ_0) и $(\theta_0, \lambda_0, 0)$.

H2. Равновесие θ_0 некосимметрично: $L_0 \neq 0$.

H3. Спектр $\sigma(A)$ производной $A = F'_\theta(\theta_0, \lambda_0)$ состоит из нейтрального (лежащего на мнимой оси) множества $\sigma_0(A)$, а также устойчивого $\sigma_-(A)$ и неустойчивого $\sigma_+(A)$ спектральных множеств, расположенных соответственно внутри левой и правой полуплоскостей. Нейтральный спектр сводится к единственной точке 0: $\sigma_0(A) = \{0\}$.

H4. Точка 0 — полюс оператора A, так что 0 является собственным значением конечной кратности k как оператора A, так и его сопряженного A^* (в дальнейшем $k = 1$ или $k = 2$).

Специфика системы с косимметрией проявляется в том, что в случае общего положения здесь $k = 1$. Кроме того, однопараметрическое семейство некосимметричных равновесий общего положения может содержать как устойчивые, так и неустойчивые дуги [7]. Их разделяют граничные равновесия [30], линеаризация на которых может иметь кратное нулевое собственное значение. Выходит, что в ситуации общего положения семейство некосимметричных равновесий содержит точки, для которых $k = 2$ (клетка Жордана порядка 2). Когда мы пересекаем такую точку, двигаясь вдоль семейства в сторону неустойчивости (устойчивости), от нулевого собственного числа отщепляются ветви собственных значений, идущие в правую (левую) полуплоскость.

Спектральным множествам $\sigma_0(A)$, $\sigma_1(A) = \sigma_-(A) \cup \sigma_+(A)$ соответствуют спектральные подпространства H_0, H_1 и спектральные проекторы $P_0 : H \to H_0$, $P_1 : H \to H_1$:
$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_0} (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda, \quad P_1 = I - P_0. \tag{1.5}$$

Здесь контур $\Gamma_0 = \partial D_0$ — гладкая граница ограниченной области D_0 комплексной плоскости, не содержащей иных точек спектра $\sigma(A)$, кроме 0. Контур Γ_0 состоит из регулярных точек оператора A, а в остальном произволен.

Применяя метод Ляпунова — Шмидта [34], будем разыскивать решения уравнения равновесий
$$M(\theta, \lambda, \gamma) = 0 \tag{1.6}$$

вблизи точки $(\theta_0, \lambda_0, 0)$ в виде

$$\theta = \theta_0 + u, \quad \lambda = \lambda_0 + \delta, \quad \gamma = \gamma. \tag{1.7}$$

Полагая $u = x_0 + x_1$, где $x_0 = P_0 u, x_1 = P_1 u$, сведем уравнение

$$M(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta, \gamma) = 0 \tag{1.8}$$

к системе

$$P_0 M(\theta_0 + x_0 + x_1, \lambda_0 + \delta, \gamma) = 0, \tag{1.9}$$

$$P_1 M(\theta_0 + x_0 + x_1, \lambda_0 + \delta, \gamma) = 0. \tag{1.10}$$

Выделяя линейные части, переписываем уравнения (1.9)–(1.10) в виде

$$A_0 x_0 + P_0 G(x_0, x_1, \delta, \gamma) = 0, \tag{1.11}$$

$$A_1 x_1 + P_1 G(x_0, x_1, \delta, \gamma) = 0, \tag{1.12}$$

$$G(x_0, x_1, \delta, \gamma) \stackrel{def}{=} M(\theta_0 + x_0 + x_1, \lambda_0 + \delta, \gamma) - A(x_0 + x_1).$$

Здесь A_0, A_1 — сужения оператора A на H_0 и H_1 соответственно, так что их спектры суть $\sigma(A_0) = \sigma_0(A)$ и $\sigma(A_1) = \sigma_1(A)$.

Так как оператор A_1 обратим, к уравнению (1.12) относительно x_1 при заданном малом x_0 применима теорема о неявной функции и можно выразить x_1 через x_0:

$$x_1 = T(x_0, \delta, \gamma). \tag{1.13}$$

Отображение $T : \Omega_0 \to H_1$ определено и аналитично в некоторой окрестности $\Omega_0 \subset H_0 \times \mathbb{R}^2$ точки $(0, 0, 0)$.

Подставляя (1.13) в (1.9), приходим к уравнению разветвления

$$\mathscr{R}_0(x_0, \delta, \gamma) = 0, \tag{1.14}$$

где

$$\mathscr{R}_0(x_0, \delta, \gamma) = P_0 M(Q(x_0, \delta, \gamma), \lambda_0 + \delta, \gamma) = M(Q(x_0, \delta, \gamma), \lambda_0 + \delta, \gamma), \tag{1.15}$$

а $Q : H_0 \times \mathbb{R}^2 \to H_1$ — отображение, определяемое как

$$Q(x_0, \delta, \gamma) = \theta_0 + x_0 + T(x_0, \delta, \gamma). \tag{1.16}$$

Оператор $\mathscr{R}_0 : H_0 \times \mathbb{R}^2 \to H_0$ определен в некоторой окрестности нуля подпространства $H_0 \times \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим отображение $\mathscr{L}_0 : H_0 \times \mathbb{R} \to H_0$,

$$\mathscr{L}_0 : (x_0, \delta) \mapsto \mathscr{L}_0(x_0, \delta) = P_0^* L(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta). \tag{1.17}$$

Предложение 1.1. *Уравнение разветвления* (1.14) *при выполнении условия* $\gamma = 0$ *наследует косимметрию* [6]*: допускает косимметрию* (1.17)*, а его нулевое решение сохраняет некосимметричность:* $\mathscr{L}_0(0, 0) \neq 0$.

Доказательство. Вводя замену переменных (1.16) в косимметричном тождестве (1.2) и полагая $\gamma = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = (F(\theta, \lambda), L(\theta, \lambda)) &= (F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta), L(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta) \\ &= (P_0 F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta), L(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta) \\ &= (F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta), P_0^* L(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta) = (\mathscr{R}_0(x_0, \delta, 0), \mathscr{L}_0(x_0, \delta)). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta) = P_0 F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta)$.

Заметим, что $\mathscr{L}_0(0, 0) = P_0^* L_0 = L_0$, так как $L_0 \in \ker A^*$. Предложение 1.1 доказано.

Уравнение разветвления (1.14) запишем в виде

$$A_0 x_0 + P_0 f(x_0, \delta, \gamma) = 0, \tag{1.18}$$

$$f(x_0, \delta, \gamma) \overset{\text{def}}{=} G(x_0, T(x_0, \delta, \gamma), \delta). \tag{1.19}$$

Заметим, что оператор A_0 нильпотентен, а в случае, когда индекс $\nu(0)$ нулевого собственного значения равен единице, $A_0 x_0 = 0$. Дальнейшие выкладки будем проводить в предположении $\nu(0) = 1$ (см. предложение 3.1).

Разложение оператора F в ряд Тейлора по степеням $\theta - \theta_0 = u$, $\lambda - \lambda_0 = \delta$ в окрестности точки (θ_0, λ_0) имеет вид

$$F(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta) = Au + F_{0\lambda}\delta + \sum_{k+\ell \geq 2} \frac{1}{k!\ell!} F^{(k)}_{0\lambda^\ell} u^k \delta^\ell. \tag{1.20}$$

Здесь штрих соответствует дифференцированию по θ, индекс 0 означает, что соответствующая производная вычислена в точке $(\theta_0,\ \lambda_0)$.

Разложим оператор K в ряд Тейлора по степеням u, δ, γ в окрестности точки $(\theta_0, \lambda_0, 0)$:

$$K(\theta_0 + u, \lambda_0 + \delta, \gamma) = K_0 + Bu + K_{0\lambda}\delta + K_{0\gamma}\gamma + \sum_{k+\ell+m \geq 2} \frac{1}{k!\ell!m!} K^{(k)}_{0\lambda^\ell\gamma^m} u^k \delta^\ell \gamma^m. \tag{1.21}$$

Здесь $K_0 = K(\theta_0, \lambda_0, 0)$ — постоянный вектор, а $B = K'_\theta(\theta_0, \lambda_0, 0)$ — линейный оператор. Отображение T (см. (1.13)) разыскиваем в виде ряда Тейлора по степеням δ, γ:

$$\begin{aligned} T(x_0, \delta, \gamma) &= T' x_0 + \delta T_\lambda + \gamma T_\gamma \\ &+ \frac{1}{2} T'' x_0^2 + \delta T'_\lambda x_0 + \gamma T'_\gamma x_0 + \frac{\delta^2}{2} T_{\lambda\lambda} + \lambda\gamma T_{\gamma\lambda} + \frac{\gamma^2}{2} T_{\gamma\gamma} + \ldots, \end{aligned} \tag{1.22}$$

где точками обозначены слагаемые выше второй степени, несущественные во всех рассмотренных далее случаях. Слагаемые ряда (1.22) находим последовательно, подставляя его в уравнение (1.12) вместо x_1, с учетом (1.20), (1.21).

Среди линейных относительно x_0, δ, γ слагаемых одно равно нулю:

$$T' x_0 = 0, \quad T_\lambda = -A_1^{-1} P_1 F_{0\lambda}, \quad T_\gamma = -A_1^{-1} P_1 K_0. \tag{1.23}$$

Теперь, подставляя ряд (1.22) в (1.19), находим разложение оператора f по степеням параметров δ и γ:

$$\begin{aligned} f(x_0, \delta, \gamma) &= \delta f_\lambda + \gamma f_\gamma \\ &+ \frac{1}{2} f'' x_0^2 + \delta f'_\lambda x_0 + \gamma f'_\gamma x_0 + \frac{\delta^2}{2} f_{\lambda\lambda} + \delta\gamma f_{\gamma\lambda} + \frac{\gamma^2}{2} f_{\gamma\gamma} \\ &+ \frac{1}{6} f''' x_0^3 + \frac{\delta}{2} f''_\lambda x_0^2 + \frac{\gamma}{2} f''_\gamma x_0^2 + \delta\gamma f'_{\lambda\gamma} x_0 + \frac{\gamma^2}{2} f'_{\gamma\gamma} x_0 + \frac{\delta\gamma^2}{2} f_{\delta\gamma\gamma} \\ &+ \frac{\delta^2\gamma}{2} f_{\delta\delta\gamma} + \frac{\gamma^3}{6} f_{\gamma\gamma\gamma} + \ldots. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Здесь также выписаны лишь существенные для дальнейших рассуждений слагаемые. Они определяются равенствами

$$\begin{gathered} f_\lambda = F_{0\lambda}, \quad f_\gamma = K_0, \quad f'' x_0^2 = F''_0 x_0^2, \\ f'_\lambda x_0 = F''_0(x_0, T_\lambda) + F'_{0\lambda} x_0, \quad f'_\gamma x_0 = F''_0(x_0, T_\gamma) + B x_0, \\ f_{\lambda\lambda} = F''_0 T_\lambda^2 + 2F'_{0\lambda} T_\lambda + F_{0\lambda\lambda}, \quad f_{\lambda\gamma} = F''_0(T_\lambda, T_\gamma) + F'_{0\lambda} T_\gamma + B T_\lambda + K_{0\lambda}, \\ f_{\gamma\gamma} = F''_0 T_\gamma^2 + 2B T_\gamma + 2K_{0\gamma} \end{gathered} \tag{1.25}$$

$$
\begin{aligned}
f'''x_0^3 &= 3F_0''(x_0, T''x_0^2) + F_0'''x_0^3,\\
f_\lambda''x_0^2 &= 2F_0''(x_0, T_\lambda'x_0) + F_0''(T_\lambda, T''x_0^2) + F_{0\lambda}'T''x_0^2 + F_0'''(x_0^2, T_\lambda) + F_{0\lambda}''x_0^2,\\
f_\gamma''x_0^2 &= 2F_0''(x_0, T_\gamma'x_0) + F_0''(T_\gamma, T''x_0^2) + F_0'''(x_0^2, T_\gamma) + K_0''x_0^2 + BT''x_0^2,\\
f_{\lambda\gamma}'x_0 &= F_0'''(x_0, T_\lambda, T_\gamma) + F_0''(x_0, T_{\lambda\gamma}) + F_{0\lambda}''(x_0, T_\gamma) + F_0''(T_\lambda, T_\gamma'x_0)\\
&\quad + F_{0\lambda}'T_\gamma'x_0 + F_0''(T_\gamma, T_\lambda'x_0) + K_0''(x_0, T_\lambda) + K_{0\lambda}'x_0 + K_0'T_\lambda'x_0,\\
f_{\gamma\gamma}'x_0 &= F_0'''(x_0, T_\gamma^2) + F_0''(x_0, T_{\gamma\gamma}) + 2F_0''(T_\gamma, T_\gamma'x_0)\\
&\quad + 2K_0''(x_0, T_\gamma) + 2K_{0\gamma}' + 2BT_\gamma'x_0,\\
f_{\lambda\gamma\gamma} &= F_0'''(T_\gamma^2, T_\lambda) + F_0''(T_{\gamma\gamma}, T_\lambda) + 2F_0''(T_{\lambda\gamma}, T_\gamma) + F_{0\lambda}''T_\gamma^2 + F_{0\lambda}'T_{\gamma\gamma}\\
&\quad + 2K_0''(T_\gamma, T_\lambda) + 2K_{0\gamma}'T_\lambda + 2BT_{\lambda\gamma} + 2K_{0\lambda}'T_\gamma + 2K_{0\lambda\gamma},\\
f_{\lambda\lambda\gamma} &= F_0'''(T_\gamma, T_\lambda^2) + 2F_0''(T_\lambda, T_{\lambda\gamma}) + 2F_{0\lambda}''(T_\gamma, T_\lambda) + 2F_{0\lambda}'T_{\lambda\gamma}\\
&\quad + F_0''(T_\gamma, T_{\lambda\lambda}) + F_{0\lambda\lambda}'T_\gamma + K_0''T_\lambda^2 + 2K_{0\lambda}'T_\lambda + BT_{\lambda\lambda} + K_{0\lambda\lambda},\\
f_{\gamma\gamma\gamma} &= F_0'''T_\gamma^3 + 3F_0''(T_\gamma, T_{\gamma\gamma}) + 3K_0''T_\gamma^2 + 6K_{0\gamma}'T_\gamma + 3BT_{\gamma\gamma} + 3K_{0\gamma\gamma}.
\end{aligned}
$$

Подставляя найденное выражение f в (1.12), получаем уравнения для определения слагаемых ряда (1.22):

$$
T_{\lambda^\ell\gamma^m}^{(k)}x_0^k = -A_1^{-1}P_1 f_{\lambda^\ell\gamma^m}^{(k)}x_0^k, \quad k+\ell+m \geq 1. \tag{1.26}
$$

Теорема 1.1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены гипотезы* H1–H4 *и справедливы неравенства* $\gamma \neq 0$, $(K_0, L_0) \neq 0$.

Тогда при малых $\delta = \lambda - \lambda_0$ *и* γ *уравнение* (1.1) *не имеет равновесий в некоторой окрестности* W *точки* θ_0.

Доказательство. Умножая уравнение разветвления (1.14) скалярно на $\mathscr{L}_0(x_0, \delta)$ и разлагая полученное уравнение в ряд в окрестности нуля пространства (x_0, δ, γ), получаем

$$
(\mathscr{R}_0(x_0, \delta, 0), \mathscr{L}_0(x_0, \delta)) = \gamma((K_0, L_0) + \dots) = 0, \tag{1.27}
$$

где точками обозначены слагаемые ненулевой степени. Отсюда и следует утверждение теоремы 1.1.

Для дальнейшего анализа уравнения разветвления (1.18) необходимо конкретизировать предположения о структуре спектрального подпространства H_0. Мы рассмотрим сначала случай общего положения, а затем основные вырождения.

§ 2. Случай общего положения ($k = 1$)

Простому нулевому собственному значению отвечают собственные векторы φ_0, L_0 операторов A, A^* соответственно, так что

$$
A\varphi_0 = 0, \quad A^*L_0 = 0, \quad (\varphi_0, L_0) = 1. \tag{2.1}
$$

Проектор на нейтральное подпространство H_0 задается равенством

$$
P_0\theta = \alpha\varphi_0, \quad \alpha = (\theta, L_0).
$$

Косимметричный случай. Пусть $\gamma = 0$. Мы находимся в ситуации косимметричной версии теоремы о неявной функции [6, 8, 35], из которой следует, что равновесие в окрестности точки θ_0 при любом фиксированном λ, близком к λ_0, образует однопараметрическое подмногообразие. Скажем об этом подробнее.

Уравнение равновесий (1.6) локально эквивалентно уравнению (1.12) [6, 8, 35], которое запишем в виде

$$P_1 F(\theta, \lambda) = 0, \quad P_1 = I - P_0. \tag{2.2}$$

Действительно, из заданного уравнения (1.6), очевидно, следует (2.2), а умножая (1.6) на $L(\theta, \lambda)$, с учетом косимметричного тождества (1.2) приходим к равенству

$$(F(\theta, \lambda), L_0) \cdot (\varphi_0, L(\theta, \lambda)) = 0. \tag{2.3}$$

Второй множитель при $\theta = \theta_0, \lambda = \lambda_0$ равен единице, а значит, не может обращаться в нуль вблизи точки (θ_0, λ_0). Поэтому равен нулю первый множитель. Тем самым и уравнение (1.6) является следствием уравнения (2.2).

Отсюда вытекает, что в некоторой окрестности Ω точки (θ_0, λ_0) равновесия уравнения (1.1) образуют однопараметрическое семейство, задаваемое разложением в ряд Тейлора:

$$\theta = \theta_0 + \alpha\varphi_0 + \delta T_\lambda + \frac{1}{2}\alpha^2 T'' \varphi_0^2 + \delta\alpha T'_\lambda \varphi_0 + \frac{\delta^2}{2} T_{\lambda\lambda} + \ldots. \tag{2.4}$$

Его слагаемые задаются формулами (1.26) при $x_0 = \varphi_0$. Других равновесий в окрестности Ω уравнение (1.1) не имеет.

Разрушение косимметрии. Рассмотрим случай $\gamma \neq 0$. Правую часть уравнения разветвления (1.14) разобьем на два слагаемых:

$$\mathscr{R}_0(x_0, \delta, \gamma) = S(x_0, \delta) + \gamma W(x_0, \delta, \gamma), \tag{2.5}$$

$$S(x_0, \delta) = \mathscr{R}_0(x_0, \delta, 0) = (F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta), L_0)\varphi_0. \tag{2.6}$$

Покажем, что функция S является нулевой. Действительно, согласно предложению 1.1 она обладает косимметрией $\mathscr{L}_0(x_0, \delta)$ такой, что $\mathscr{L}_0(0, 0) = L_0 \neq 0$, и имеет место косимметричное тождество

$$(F(Q(x_0, \delta, 0), \lambda_0 + \delta), L_0) \cdot (\varphi_0, \mathscr{L}_0(x_0, \delta)) = 0. \tag{2.7}$$

Поскольку в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ второй множитель отличен от нуля, там тождественно равен нулю первый множитель, а значит, и функция S.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации уравнение разветвления (1.14) принимает вид

$$W(x_0, \delta, \gamma) = 0. \tag{2.8}$$

Разлагая в окрестности нуля правую часть уравнения (2.8) в ряд Тейлора, получаем уравнение разветвления в виде

$$\Lambda(\alpha, \delta, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} r_{000} + r_{100}\alpha + r_{010}\delta + r_{001}\gamma + \sum_{k+\ell+m \geq 2}^{\infty} r_{k\ell m} \alpha^k \delta^\ell \gamma^m = 0. \tag{2.9}$$

Коэффициенты $r_{km\ell}$ вычисляются по формулам

$$r_{klm} = \frac{1}{k!\ell!(m+1)!} (f^{(k)}_{\lambda^\ell \gamma^{(m+1)}} \varphi_0^k, L_0),$$

в которых существенные для дальнейших рассмотрений функции $f^{(k)}_{\lambda^\ell \gamma^{(m+1)}}$ задаются выражениями (1.25), (1.26), в частности, $r_{000} = (K_0, L_0)$.

Проведем анализ уравнения разветвления (2.9). Случай $r_{000} \neq 0$ описан в теореме 1.1. Далее предполагаем, что $r_{000} = 0$, и рассматриваем последовательно случаи выполнения условий

$$(i)\ r_{100} \neq 0, \quad (ii)\ r_{100} = 0, r_{010} \neq 0, \quad (iii)\ r_{100} = 0, r_{001} \neq 0.$$

При выполнении условий (ii) или (iii) переходим к малым параметрам $\varepsilon, \varepsilon_1$ посредством замен

$$\delta = \frac{1}{r_{010}}(\varepsilon_1 - r_{001}\gamma), \quad \gamma = \varepsilon$$

или

$$\delta = \varepsilon, \quad \gamma = \frac{1}{r_{001}}(\varepsilon_1 - r_{010}\delta).$$

Уравнение разветвления (2.9) разрешаем относительно переменной α в случае (i) или переменной ε_1 при выполнении хотя бы одной из групп условий $(ii), (iii)$. Соответственно получаем одно из двух уравнений

$$\alpha = s(\delta, \gamma), \tag{2.10}$$

$$\varepsilon_1 = h(\alpha, \varepsilon), \tag{2.11}$$

причем функции s, h задаются в окрестности нуля рядами Тейлора

$$s(\delta, \gamma) = -\frac{r_{010}}{r_{100}}\delta - \frac{r_{001}}{r_{100}}\gamma + \sum_{m+\ell \geq 2}^{\infty} s_{m\ell}\delta^{\ell}\gamma^{m}, \tag{2.12}$$

$$h(\alpha, \varepsilon) = \sum_{m+\ell \geq 2}^{\infty} h_{m\ell}\alpha^{m}\varepsilon^{\ell}. \tag{2.13}$$

Коэффициенты $s_{m\ell}, h_{m\ell}$ выражаются через величины $r_{km\ell}$.

Далее, помимо случая общего положения

$$h_{20} \neq 0, \quad \Delta_1 = h_{11}^2 - 4h_{20}h_{02} \neq 0,$$

будет рассмотрено вырождение

$$h_{20} \neq 0, \quad \Delta_1 = 0. \tag{2.14}$$

При условии (2.14) замена переменных

$$\alpha \to \alpha + c_1\varepsilon, \quad \varepsilon \to \varepsilon, \quad c_1 = \frac{h_{11}}{2h_{20}} \tag{2.15}$$

приводит уравнение (2.11), (2.13) к виду

$$\varepsilon_1 = h(\alpha, \varepsilon) = h_{20}\alpha^2 + m_1\varepsilon^3 + \ldots, \tag{2.16}$$

где $m_1 = -h_{30}c_1^3 + h_{21}c_1^2 - h_{12}c_1 + h_{03}$, а многоточие означает слагаемые выше второй степени, кроме выписанного.

Теорема 2.1. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены гипотезы* H1–H4, *ядро* $H_0 = \ker A$ *одномерно и*

$$\gamma \neq 0, \quad r_{000} = 0, \quad r_{100} \neq 0.$$

Тогда при малых $\delta = \lambda - \lambda_0$, γ *уравнение* (1.1) *имеет единственное равновесие в некоторой окрестности* W *точки* θ_0, *задаваемое аналитическими функциями* (2.4), (2.10).

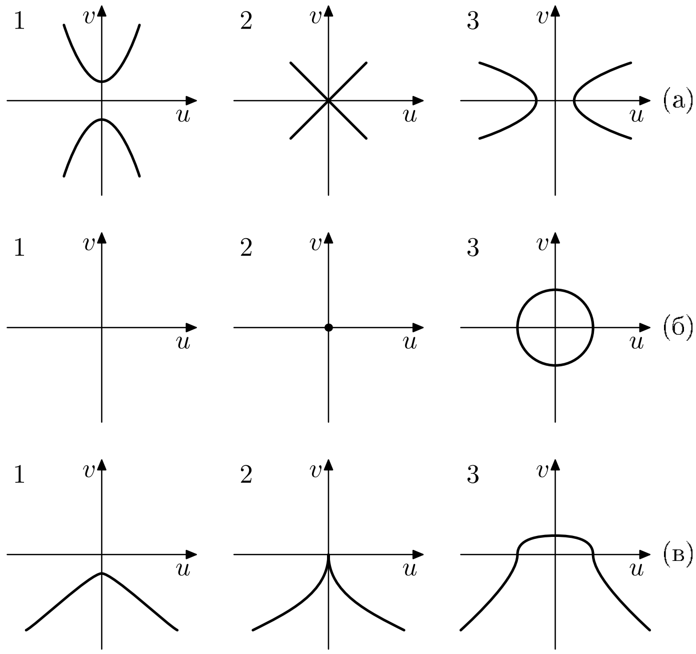

Рис. 1.

В случае выполнения условий (ii) или (iii) при малых ε_1 решения уравнения разветвления (2.9) образуют в некоторой окрестности нуля плоскости переменных (α, ε) линии уровня аналитической функции h. Каждому малому решению (α, ε) уравнения разветвления соответствует единственное равновесие уравнения (1.1), и это соответствие взаимно однозначно.

В зависимости от значений коэффициентов ряда Тейлора (2.13), в окрестности точки $(0, 0)$ имеют место следующие бифуркации линий уровня функции h (рис. 1, где следует считать, что $u = \alpha$, $v = \varepsilon$, номер 2 отвечает условию $\varepsilon_1 = 0$, а 1 и 3 — противоположным знакам ε_1).

(а) *Выполнена группа условий $h_{20} \neq 0, \Delta_1 = h_{11}^2 - 4h_{20}h_{02} > 0$. Тогда имеет место двусторонняя седловая бифуркация (см. рис. 1а).*

(б) *При $h_{20} \neq 0, \Delta_1 < 0$ происходит односторонняя бифуркация рождения цикла «из воздуха» (см. рис. 1б).*

(в) *Пусть имеет место вырождение $\Delta_1 = 0$, но $h_{20} \neq 0$ и в разложении (2.16) $m_1 \neq 0$. Тогда происходит бифуркация потери гладкости линий уровня функции h (см. рис. 1в, где принято, что $h_{20}m_1 > 0$).*

Анализ рис. 1 приводит к следующим выводам.

1. Пусть выполнены условия (а) теоремы 2.1. Если при этом $h_{20}\varepsilon_1 > 0$, то в малой окрестности W_1 точки θ_0 и при малых $\varepsilon, \varepsilon_1$ уравнение (1.1) имеет два равновесия, аналитически зависящих от этих параметров.

В случае $h_{20}\varepsilon_1 < 0$ в окрестности W_1 наблюдается бифуркация рождения пары равновесий «из воздуха», когда параметр $|\varepsilon|$, увеличиваясь, проходит через критическое значение.

2. Пусть выполнены условия (б) теоремы 2.1. Тогда уравнение разветвления не имеет решений, если $h_{20}\varepsilon_1 < 0$, а при $h_{20}\varepsilon_1 > 0$ в окрестности W_1 наблюдается бифуркация рождения пары равновесий «из воздуха», когда параметр $|\varepsilon|$,

уменьшаясь, проходит через критическое значение.

3. В случае (в) теоремы 2.1 в окрестности W_1 имеется единственное критическое значение параметра ε. Оно отвечает бифуркации рождения пары равновесий «из воздуха».

§ 3 Метод Ляпунова — Шмидта в случае двумерного ядра

Когда применяется метод Ляпунова — Шмидта, связь уравнения равновесий (1.3) с дифференциальным уравнением (1.1) несущественна. Понятно, что одно и то же уравнение равновесий соответствует многим дифференциальным уравнениям, например $M\dot{\theta} = F(\theta, \lambda)$, где M — обратимый линейный оператор. Более того, с формальной стороны ничего не изменится, если рассматривать оператор, действующий из $H \times \mathbb{R}$ не в H, а в другое банахово пространство. Отсюда ясно, что строение спектрального подпространства здесь не имеет значения (оно начинает играть существенную роль, когда мы переходим к исследованию устойчивости). Как видно, основные вырождения в задаче о структуре множества равновесий связаны с изменением размерности ядра и соответственно уравнения разветвления. В этом параграфе рассматривается случай, когда уравнение разветвления двумерно.

Далее будем все-таки предполагать, что базис ядра оператора A допускает биортогональный базис ядра сопряженного оператора, т. е. что $\nu(0) = 1$. В работе [27] показано, что это условие «безобидно» — его можно достигнуть, переходя к эквивалентному уравнению $MF(\theta, \lambda) = 0$ с линейным обратимым оператором M или, что, по сути, то же самое, переходя к иному, эквивалентному скалярному произведению. Следующее предложение и его доказательство имеются в работе [27]. Приведем их здесь для удобства читателя.

Предложение 3.1 [27]. *Пусть $A : H \to H$ — линейный оператор и $\dim\ker A = 2$, $\dim\ker A^* = 2$. Тогда существует обратимый линейный оператор M такой, что у оператора MA точка 0 — собственное значение индекса 1: $\nu(0) = 1$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi^0, \varphi^1\}$, $\{\Phi_0, \Phi_1\}$ — базисы соответственно в $H_0 = \ker A$ и $H_0^* = \ker A^*$. Возьмем произвольную систему векторов $\{\Psi_0, \Psi_1\}$, биортогональную к базису $\{\varphi^0, \varphi^1\}$, так что $(\varphi^i, \Psi_j) = \delta^i_j$.

Введем обозначение $\mathrm{Lin}\{\Psi_0, \Psi_1\} = Y$. Определим оператор $B : H^* \to H^*$ следующими требованиями: он переводит H_0^* в Y, а ортогональное дополнение $H_0^{*\perp}$ — в $Y^\perp$. При этом на H_0^* он определяется равенствами $B\Phi_i = \Psi_i (i = 0, 1)$, а на $H_0^{*\perp}$ произвольно, лишь бы $B(H_0^{*\perp}) = Y^\perp$ и отображение $B : H_0^{*\perp} \to Y^\perp$ было обратимо.

Теперь ясно, что оператор $M = B^{*-1}$ обратим и удовлетворяет поставленным условиям. Действительно, $\ker(MA) = \ker A = \mathrm{Lin}\{\varphi^0, \varphi^1\}$, а $\ker(MA)^* = \ker(A^*M^*) = \mathrm{Lin}\{M^{*-1}\Phi_0, M^{*-1}\Phi_1\} = \mathrm{Lin}\{\Psi_0, \Psi_1\}$. Условие биортогональности выполнено по построению. Предложение 3.1 доказано.

Заметим, что это предложение непосредственно обобщается на случай произвольной размерности ядра $\ker A$.

В обычном изложении метода Ляпунова — Шмидта [34, 36] используются два произвольных проектора: на ядро и на образ линейного оператора A. Они определяются соответствующей биортогональной системой ковекторов для проектора на ядро и биортогональной системой векторов для проектора на коядро

$\ker A^*$. Из предложения 3.1 следует, что при надлежащем определении гильбертова сопряженного оператора любую биортогональную к $\ker A$ систему ковекторов можно превратить в базис коядра, добиваясь при этом, чтобы индекс нулевого собственного значения стал равен единице, а проектор на ядро стал спектральным.

Пусть подпространства $H_0 = \ker A$ и $H_0^* = \ker A^*$ двумерны: $\dim H_0 = \dim H_0^* = 2$, $\nu(0) = 1$, и существуют такие базисы $\{\varphi_0, \varphi_1\}$, $\{L_0, \Phi_1\}$ в H_0, H_0^* соответственно, что

$$\begin{gathered} A\varphi_0 = 0, \quad A\varphi_1 = 0, \quad A^*L_0 = 0, \quad A^*\Phi_1 = 0, \\ (\varphi_0, L_0) = (\varphi_1, \Phi_1) = 1, \quad (\varphi_0, \Phi_1) = (\varphi_0, L_0) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Напомним, что вектор $L_0 = L(\theta_0, \lambda_0)$ принадлежит ядру H_0.

Проекторы $P_0 : H \to H_0$, $P_1 : H \to H_1$ задаются равенствами

$$P_0\theta = x_0 = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1, \quad \alpha = (\theta, L_0), \quad \beta = (\theta, \Phi_1), \quad P_1 = I - P_0.$$

Уравнение разветвления рассматриваем в форме (1.14), (2.5), (2.6). Согласно предложению 1.1 отображение S обладает косимметрией $\mathscr{L}_0(x_0, \delta)$ такой, что $\mathscr{L}_0(0, 0) = L_0 \neq 0$. Имеют место разложения

$$\begin{gathered} S(x_0, \delta) = U(x_0, \delta)\varphi_0 + V(x_0, \delta)\varphi_1, \\ U(x_0, \delta) = (S(x_0, \delta), L_0), \quad V(x_0, \delta) = (S(x_0, \delta), \Phi_1), \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_0(x_0, \delta) = \mathscr{P}(x_0, \delta)L_0 + \mathscr{Q}(x_0, \delta)\Phi_1, \\ \mathscr{P}(x_0, \delta) = (\mathscr{L}_0(x_0, \delta), \varphi_0), \quad \mathscr{Q}(x_0, \delta) = (\mathscr{L}_0(x_0, \delta), \varphi_1) \end{gathered} \tag{3.3}$$

и косимметричное тождество

$$\mathscr{P}(x_0, \delta)U(x_0, \delta) + \mathscr{Q}(x_0, \delta)V(x_0, \delta) = 0. \tag{3.4}$$

Для дальнейших рассмотрений потребуется разложение отображения $\mathscr{K}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_0, \delta) = (0, 0)$:

$$\mathscr{K}(x_0, \delta) = \mathscr{K}_0 + \mathscr{K}'x_0 + \delta\mathscr{K}_\delta + \sum_{k+\ell\geq 2} \frac{1}{k!\ell!}\mathscr{K}^{(k)}_{\delta^\ell} x_0^k \delta^\ell. \tag{3.5}$$

Здесь $\mathscr{K}$ — любое из отображений $S, \mathscr{P}, Q, U, V, \ldots$.

Из косимметричного тождества (3.4), поскольку $S_0 = S(0, 0) = 0$ и $S'x_0 = 0$, следует равенство

$$\mathscr{P}_0 U_\delta + \mathscr{Q}_0 V_\delta = 0. \tag{3.6}$$

Напомним, что, по условию

$$\mathscr{L}_0(0, 0) = \mathscr{P}_0 L_0 + \mathscr{Q}_0 \Phi_1 = L_0 \neq 0. \tag{3.7}$$

Из системы уравнений (3.6), (3.7) ввиду ортогональности векторов L_0, Φ_1 следует, что

$$\mathscr{P}_0 = 1, \quad \mathscr{Q}_0 = 0, \quad U_\delta = 0. \tag{3.8}$$

Рассмотрим случай, когда *выполнено условие*

$$V_\delta \neq 0. \tag{3.9}$$

Функция $\mathscr{P}(x_0, \delta)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $(x_0, \delta) = (0, 0)$, поскольку $\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}(0, 0) = 1$. Косимметрия вообще определена с точностью до умножения на функцию с таким свойством. Поэтому ненулевую функцию $\mathscr{P}(x_0,\delta)$ можно выбрать произвольно, лишь бы $\mathscr{P}_0=1$. Пусть она является постоянной:

$$\mathscr{P}(x_0,\delta)=1. \tag{3.10}$$

Ряды Тейлора (3.5) функций $\mathscr{Q},U,V$ подставляем в косимметричное тождество (3.4) и учитываем условия (3.8)–(3.10). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений для коэффициентов ряда Тейлора оператора $\mathscr{Q}$. Косимметрия налагает на ряды Тейлора функций U и V определенные ограничения.

В результате получаем разложение

$$\mathscr{Q}(x_0,\delta)=\mathscr{Q}'x_0+\delta\mathscr{Q}_\delta+\frac{1}{2}\mathscr{Q}''x_0^2+\delta\mathscr{Q}'_\delta x_0+\frac{\delta^2}{2}\mathscr{Q}_{\delta\delta}+\dots. \tag{3.11}$$

Здесь выписаны лишь слагаемые, участвующие в дальнейших рассмотрениях:

$$\mathscr{Q}_\delta=-\frac{1}{2V_\delta}U_{\delta\delta},\quad \mathscr{Q}'x_0=-\frac{1}{V_\delta}U'_\delta x_0,\quad \mathscr{Q}_{\delta\delta}=-\frac{1}{V_\delta}\left(\mathscr{Q}_\delta V_{\delta\delta}+\frac{1}{3}U_{\delta\delta\delta}\right),$$
$$\mathscr{Q}'_\delta x_0=-\frac{1}{V_\delta}\left(\frac{1}{2}\mathscr{Q}'x_0V_{\delta\delta}+\mathscr{Q}_\delta V'_\delta x_0+\frac{1}{2}U'_{\delta\delta}x_0\right),$$
$$\mathscr{Q}''x_0^2=-\frac{1}{V_\delta}\bigl(2\mathscr{Q}'x_0V'_\delta x_0+\mathscr{Q}_\delta V''x_0^2+U''_\delta x_0^2\bigr).$$

Квадратичные и кубические слагаемые рядов Тейлора функций U и V связаны соотношениями

$$U''x_0^2=0,\quad U'''x_0^3=-3\mathscr{Q}'x_0V''x_0^2.$$

В остальном они могут быть произвольными. Согласно представлениям (3.3), (3.10), (3.11) можно считать, что косимметрия $\mathscr{L}_0(x_0,\delta)$ имеет вид

$$\mathscr{L}_0(x_0,\delta)=L_0+\mathscr{Q}(x_0,\delta)\Phi_1. \tag{3.12}$$

Подстановка выражения $x_0=\alpha\varphi_0+\beta\varphi_1$ в ряд Тейлора (3.11) приводит к разложению

$$Q(\alpha\varphi_0+\beta\varphi_1,\delta)=q_{100}\alpha+q_{010}\beta+q_{001}\delta+\sum_{k+m+\ell\ge 2}^{\infty}q_{km\ell}\alpha^k\beta^m\delta^\ell,$$

$$q_{100}=-\frac{1}{a_{001}}(f'_\lambda\varphi_0,L_0),\quad q_{010}=-\frac{1}{a_{001}}(f'_\lambda\varphi_1,L_0),\quad q_{001}=\frac{1}{2a_{001}}(f_{\lambda\lambda},L_0).$$

Уравнение разветвления (1.14), (2.5), (2.6), (3.2) записывается в виде системы

$$(\mathscr{R}_0(x_0,\delta,\gamma),L_0)=0, \tag{3.13}$$

$$(\mathscr{R}_0(x_0,\delta,\gamma),\Phi_1)=0, \tag{3.14}$$

которая в малой окрестности точки $(x_0,\delta,\gamma)=(0,0,0)$ эквивалентна системе

$$(\mathscr{R}_0(x_0,\delta,\gamma),\mathscr{L}_0(x_0,\delta))=0, \tag{3.15}$$

$$(\mathscr{R}_0(x_0,\delta,\gamma),\Phi_1)=0. \tag{3.16}$$

С учетом представления (2.5) и косимметричного тождества $(S, \mathscr{L}_0) = 0$ уравнения разветвления приводятся к виду

$$\gamma(W(x_0, \delta, \gamma), \mathscr{L}_0(x_0, \delta)) = 0, \tag{3.17}$$

$$(\mathscr{R}_0(x_0, \delta, \gamma), \Phi_1) = 0. \tag{3.18}$$

Косимметричные возмущения ($\gamma = 0$). Этот случай при условии двумерности ядра оператора A был исследован в работах [6, 27, 28]. Изложим кратко полученные там результаты.

Полагая в (3.18) $x_0 = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1$, представим уравнение разветвления в виде

$$\Gamma(\alpha, \beta, \delta) \overset{def}{=} a_{001}\delta + \sum_{k+m+\ell\geq 2}^{\infty} a_{km\ell}\alpha^k\beta^m\delta^\ell = 0. \tag{3.19}$$

Коэффициенты $a_{km\ell}$, существенные для дальнейших рассмотрений, задаются выражениями

$$a_{001} = (F_{0\lambda}, \Phi_1), \quad a_{101} = (F_0''(\varphi_0, T_\lambda) + F_{0\lambda}'\varphi_0, \Phi_1),$$

$$a_{200} = \frac{1}{2}(F_0''\varphi_0^2, \Phi_1), \quad a_{110} = (F_0''(\varphi_0, \varphi_1), \Phi_1), \tag{3.20}$$

$$a_{002} = \frac{1}{2}\big(F_0''T_\lambda^2 + 2F_{0\lambda}'T_\lambda + F_{0\lambda\lambda}, \Phi_1\big), \quad a_{300} = \frac{1}{6}\big(3F_0''\big(\varphi_0, T''\varphi_0^2\big) + F_0'''\varphi_0^3, \Phi_1\big),$$

$$a_{210} = \frac{1}{2}\big(3F_0''\big(\varphi_1, T''\varphi_0^2\big) + 6F_0''(\varphi_0, T''(\varphi_0, \varphi_1)) + 3F_0'''(\varphi_0^2, \varphi_1), \Phi_1\big).$$

Здесь использованы формулы

$$T_\lambda = -A_1^{-1}P_1F_{0\lambda}, \quad T''\varphi_0^2 = -A_1^{-1}P_1F_0''\varphi_0^2,$$

$$T''\varphi_1^2 = -A_1^{-1}P_1F_0''\varphi_1^2, \quad T''(\varphi_0, \varphi_1) = -A_1^{-1}P_1F_0''(\varphi_0, \varphi_1).$$

Выражения величин $a_{011}, a_{020}, a_{120}, a_{030}$ получаются заменой $(\varphi_0, \varphi_1) \to (\varphi_1, \varphi_0)$ в представлениях (3.20) коэффициентов $a_{101}, a_{200}, a_{210}, a_{300}$ соответственно.

Имеем $a_{001} = V_\delta \neq 0$. Значит, по теореме о неявной функции уравнение (3.19) при достаточно малых α, β можно разрешить относительно δ, так что

$$\delta = g(\alpha, \beta). \tag{3.21}$$

Аналитическая функция g однозначно определяется требованием $g(0, 0) = 0$. При этом дифференциал dg нулевой в точке $(0, 0)$. Таким путем приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1 [27, 28]. *Пусть $\gamma = 0$, а для уравнения* (1.1) *с косимметрией L выполнены гипотезы* H1–H4, *ядро $H_0 = \ker A$ двумерно и справедливо неравенство* (3.9).

Тогда при малых $\delta = \lambda - \lambda_0$ равновесия уравнения (1.1) *в некоторой окрестности $W \subset H$ точки θ_0 образуют образ линии уровня $\{(\alpha, \beta) : g(\alpha, \beta) = \delta\}$ при аналитическом диффеоморфизме $k : \mathbb{R}^2 \to H$:*

$$k : (\alpha, \beta) \to \theta_0 + x_0 + x_1, \quad x_0 = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1 \in H_0, \quad x_1 = T(x_0, \delta) \in H_1. \tag{3.22}$$

При этом имеются лишь две возможности.

(a) *Функция g принимает положительные* (*отрицательные*) *значения в сколь угодно малой проколотой окрестности нуля. Тогда равновесия уравнения* (1.1) *существуют при $\delta > 0$ ($\delta < 0$) и образуют однопараметрические аналитические семейства.*

(b) *Функция $g \equiv 0$ — тождественный нуль. Тогда при $\lambda = \lambda_0$ уравнение* (1.1) *имеет в окрестности W двупараметрическое аналитическое семейство равновесий, а при малых ненулевых $\lambda - \lambda_0$ уравнение* (1.1) *не имеет равновесий в окрестности W.*

Замечание 1. Из теоремы 3.1 следует, что при выполнении условия (3.9) значение $\delta = 0$ бифуркационное. Интересно сравнить ситуацию с тем, что имеется в случае общего положения. Фактически условие (3.9) показывает, что кратность нулевого собственного числа совпадает с размерностью ядра и равна двум. В случае общего положения размерность ядра равна единице и аналогичное условие показывает, что кратность нулевого собственного значения тоже равна единице. Известная теорема Красносельского [37] в таком случае (и в более общем, когда кратность — любое нечетное число) гарантирует наличие бифуркации, правда при дополнительном предположении о возможности сведения системы к уравнению вида $x - \lambda Ax = 0$ с вполне непрерывным оператором A.

Замечание 2. Случай (b) типичен для линейного оператора, так что условие (a), по сути, есть условие нелинейности.

Для более детального исследования семейств равновесий уравнения (1.1), их числа и аналитических свойств необходимо учесть нелинейные слагаемые. Разлагая функцию g в окрестности нуля в ряд Тейлора, получаем

$$\delta = g(\alpha, \beta) = p\alpha^2 + q\alpha\beta + r\beta^2 + b_{30}\alpha^3 + b_{21}\alpha^2\beta + b_{12}\alpha\beta^2 + b_{03}\beta^3 + \dots . \tag{3.23}$$

Здесь многоточие означает слагаемые выше третьей степени, а коэффициенты выписанных слагаемых задаются выражениями

$$\begin{gathered} p = -\frac{a_{200}}{a_{001}}, \quad q = -\frac{a_{110}}{a_{001}}, \quad r = -\frac{a_{020}}{a_{001}}, \\ b_{30} = -\frac{1}{a_{001}}(a_{300} + a_{101}p), \quad b_{21} = -\frac{1}{a_{001}}(a_{210} + a_{011}p + a_{101}q), \\ b_{12} = -\frac{1}{a_{001}}(a_{120} + a_{011}q + a_{101}r), \quad b_{03} = -\frac{1}{a_{001}}(a_{030} + a_{011}r). \end{gathered} \tag{3.24}$$

Далее помимо случая общего положения $\Delta = q^2 - 4pr \neq 0$ будет рассмотрено вырождение

$$\Delta = q^2 - 4pr = 0, \quad p \neq 0. \tag{3.25}$$

При условии (3.25) замена переменных

$$\alpha \to \alpha + c\beta, \quad \beta \to \beta, \quad c = \frac{q}{2p} \tag{3.26}$$

приводит разложение (3.23) к виду

$$\delta = g(\alpha, \beta) = p\alpha^2 + m\beta^3 + \dots, \tag{3.27}$$

где $m = -b_{30}c^3 + b_{21}c^2 - b_{12}c + b_{03}$, а многоточие означает слагаемые выше второй степени, кроме выписанного.

Случай $\Delta = 0$, $r \neq 0$ сводится к (3.25) заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Анализ линий уровня функции $g(\alpha, \beta)$ в условиях (3.23) и (3.27) приводит к следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда в зависимости от значений коэффициентов в окрестности точки* (θ_0, λ_0) *имеют место следующие бифуркации семейств равновесий уравнения* (1.1) (*см. рис.* 1, *где теперь следует считать, что* $u = \alpha$, $v = \beta$, *а номера* 1, 2 *и* 3 *отвечают условиям* $\delta < 0$, $\delta = 0$ *и* $\delta > 0$ *соответственно*).

(a) *Пусть* $\Delta = q^2 - 4pr \neq 0$. *Если* $\Delta > 0$, *то имеет место двусторонняя седловая бифуркация* (*рис.* 1(a)), *а при* $\Delta < 0$ *происходит односторонняя бифуркация рождения равновесного цикла «из воздуха»* (*рис.* 1(б)).

(b) *Пусть имеет место вырождение* $\Delta = 0$, *но* $p \neq 0$ (*см.* (3.25)), *и в разложении* (3.27) $m \neq 0$. *Тогда происходит бифуркация потери гладкости семейства равновесий* (*см. рис.* 1(в), *где принято, что* $pm > 0$).

Нуждается в комментариях лишь случай (b). Здесь семейство равновесий при $\delta = 0$ теряет гладкость: на нем образуется в точке $(0,0)$ острие с нулевым углом, и локальное уравнение семейства имеет вид $\beta = (-\frac{p}{m}\alpha^2)^{1/3}$. Стоит отметить, что семейства равновесий при различных малых δ остаются гомеоморфными, в то время как их диффеоморфность теряется. Если удовлетвориться гомеоморфностью, то выйдет, что в этом случае вообще нет бифуркации. Заметим еще, что интересные явления (рождение петли и ответвление цикла равновесий от острия) обнаруживаются, когда мы переходим к двупараметрическому семейству (см. [27, 28]).

Разрушение косимметрии. Пусть теперь $\gamma \neq 0$. Уравнения разветвления равновесий (3.17), (3.18), (3.12) записываются в виде системы двух скалярных уравнений для коэффициентов α, β разложения $x_0 = \alpha\varphi_0 + \beta\varphi_1$:

$$\Pi(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = 0, \tag{3.28}$$

$$\Gamma(\alpha, \beta, \delta) + \gamma\Omega(\alpha, \beta, \delta, \gamma) = 0. \tag{3.29}$$

Разлагая в окрестности нуля правые части уравнений (3.28), (3.29) в ряд Тейлора, получаем уравнения разветвления в виде

$$r_{0000} + r_{0001}\delta + r_{0010}\gamma + r_{1000}\alpha + r_{0100}\beta + \sum_{k+m+\ell+n\geq 2}^{\infty} r_{km\ell n}\alpha^k\beta^m\delta^\ell\gamma^n = 0, \tag{3.30}$$

$$a_{001}\delta + \sum_{k+m+\ell\geq 2}^{\infty} a_{km\ell}\alpha^k\beta^m\delta^\ell + \gamma(\omega_{0000} + \omega_{0001}\delta + \omega_{0010}\gamma + \omega_{1000}\alpha$$
$$+ \omega_{0100}\beta + \sum_{k+m+\ell+n\geq 2}^{\infty} \omega_{km\ell n}\alpha^k\beta^m\delta^\ell\gamma^n) = 0. \tag{3.31}$$

Коэффициенты $r_{km\ell n}, a_{km\ell}, \omega_{km\ell n}$, существенные для дальнейших рассмотрений, задаются выражениями (3.20) и равенствами

$$r_{0000} = (K_0, L_0), \quad r_{0001} = \frac{1}{2}(f_{\gamma\gamma}, L_0),$$
$$r_{1000} = (f'_\gamma\varphi_0, L_0) - \frac{1}{a_{001}}(K_0, \Phi_1)(f'_\lambda\varphi_0, L_0),$$
$$r_{0100} = (f'_\gamma\varphi_1, L_0) - \frac{1}{a_{001}}(K_0, \Phi_1)(f'_\lambda\varphi_1, L_0),$$
$$r_{0010} = (f_{\lambda\gamma}, L_0) - \frac{1}{2a_{001}}(K_0, \Phi_1)(f_{\lambda\lambda}, L_0),$$

$$\omega_{00\ell n} = \frac{1}{\ell!(n+1)!}(f_{\lambda^\ell\gamma^{(n+1)}}, \Phi_1), \quad \ell + n \geq 0,$$

$$\omega_{k0\ell n} = \frac{1}{k!\ell!(n+1)!}(f^{(k)}_{\lambda^\ell\gamma^{(n+1)}}\varphi_0^k, \Phi_1), \quad k > 0,$$

$$\omega_{0m\ell n} = \frac{1}{m!\ell!(n+1)!}(f^{(m)}_{\lambda^\ell\gamma^{(n+1)}}\varphi_1^m, \Phi_1), \quad m > 0,$$

$$\omega_{1100} = 2(2F_0''(\varphi_0, T_\gamma'\varphi_1) + F_0''(T_\gamma, T''(\varphi_0, \varphi_1)) \\ + F_0'''(\varphi_0, \varphi_1, T_\gamma) + K_0''(\varphi_0, \varphi_1) + BT''(\varphi_0, \varphi_1), \Phi_1).$$

Участвующие здесь функции $f^{(m)}_{\lambda^\ell\gamma^{(n+1)}}$ определены формулами (1.25). Теперь приступим к анализу уравнений разветвлений (3.30), (3.31). Прежде всего заметим, что они не имеют решений в некоторой окрестности нуля четырехмерного пространства переменных $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, если выполнено условие

$$r_{0000} \neq 0. \tag{3.32}$$

Рассмотрим случай нарушения условия (3.32) при отличии от нуля определителя $\mathscr{D}$:

$$r_{0000} = 0, \quad \mathscr{D} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} r_{0001} & r_{0010} \\ a_{001} & \omega_{0000} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.33}$$

Вводя новые малые параметры

$$\gamma_1 = r_{0001}\delta + r_{0010}\gamma, \quad \delta_1 = a_{001}\delta + \omega_{0000}\gamma \tag{3.34}$$

и разрешая относительно них уравнения (3.30), (3.31), получаем

$$\gamma_1 = g_1(\alpha, \beta), \quad \delta_1 = g_2(\alpha, \beta), \tag{3.35}$$

где g_1, g_2 — аналитические в окрестности нуля функции, удовлетворяющие условию $g_1(0,0) = 0$, $g_2(0,0) = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнены гипотезы* H1–H4, *ядро* $H_0 = \ker A$ *двумерно и справедливо неравенство* $\gamma \neq 0$.

Если при этом выполнено условие $r_{0000} \neq 0$, *то при малых* $\delta = \lambda - \lambda_0, \gamma$ *уравнение* (1.1) *не имеет равновесий в некоторой окрестности* W *точки* θ_0.

В случае $a_{001} \neq 0$ *и выполнения условий* (3.33) *при малых* δ_1, γ_1 *множество решений уравнений разветвления* (3.30), (3.31) *в некоторой окрестности нуля плоскости переменных* (α, β) *есть пересечение линий уровней аналитических функций* g_1, g_2. *Каждому малому решению* (α, β) *системы уравнений разветвления соответствует единственное равновесие уравнения* (1.1), *и это соответствие взаимно однозначно.*

Разлагая функции g_1, g_2 в ряд Тейлора в окрестности нуля, получаем уравнения разветвления (3.30) в виде

$$\gamma_1 = -r_{1000}\alpha - r_{0100}\beta + \sum_{k+m\geq 2}^{\infty} r_{km}\alpha^k\beta^m, \tag{3.36}$$

$$\delta_1 = \sum_{k+m\geq 2}^{\infty} d_{km}\alpha^k\beta^m. \tag{3.37}$$

Пусть справедливо неравенство $r_{0100} \neq 0$.

Заметим, что случай $r_{1000} \neq 0$ сводится к данному заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Уравнение (3.36) разрешаем относительно переменной β и подставляем полученное выражение в уравнение (3.37). Получаем уравнения разветвления в форме

$$\beta = -\frac{r_{1000}}{r_{0100}}\alpha - \frac{1}{r_{0100}}\gamma_1 + \sum_{k+m\geq 2}^{\infty} a_{km}\alpha^k\gamma_1^m, \tag{3.38}$$

$$\delta_1 = c(\alpha, \gamma_1) = \sum_{k+m\geq 2}^{\infty} c_{km}\alpha^k\gamma_1^m. \tag{3.39}$$

Второе уравнение этой системы не зависит от переменной β, которая однозначно вычисляется для малых α, γ_1 из первого уравнения (3.38). Таким образом, в рассматриваемых условиях анализ уравнений разветвления свелся к исследованию одномерного уравнения (3.39).

Осталось заметить, что уравнение (3.39) анализируется так же, как и уравнение (2.14), — достаточно заменить параметры (δ_1, γ_1) на $(\varepsilon_1, \varepsilon)$, функцию c на h и воспользоваться результатами теоремы 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yudovich V. I.* Cosymmetric dynamic systems and equilibria cycles // Abstracts FSU-USA Conference on Chaos. Woods Hole, Massachusetts, 19-23 July 1993. Massachusetts, 1993. P. 37.

2. *Юдович В. И.* Бифуркации, связанные с разрушением косимметрии динамической системы. Ч. I / РГУ. Ростов н/Д, 1996. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 18.06.96, № 2002-В96.

3. *Юдович В. И.* Бифуркации, связанные с разрушением косимметрии динамической системы. Ч. II / РГУ. Ростов н/Д, 1996. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 28.08.96, № 2736-В96.

4. *Арнольд В. И.* Лекции о бифуркациях и версальных семействах // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 5. С. 119-184.

5. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. С. 5–220. (Итоги науки и техники).

6. *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.

7. *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411.

8. *Yudovich V. I.* The cosymmetric version of the implicit function theorem // Linear topological spaces and complex analisis. METU-TUBITAK, Ankara, 1995. V. 2. P. 105–125.

9. *Yudovich V. I.* Cosymmetry and dynamical systems // Book of Abstracts. Third intern. congr. industrial and appl. math., Hamburg, 3–7 July 1995. (Z. Angew. Math. Mech. (1996); Proc., ICAM'95, Issue 4. Applied sciences, especially mechanics). Hamburg, 1995. P. 585–588.

10. *Zaslavsky G. M.* Physics of chaos in hamiltonian systems. London: Imperial College Press, 1998.

11. *Chossat P., Iooss G.* The Couette–Taylor problem. Applied mathematical sciences. New York: Springer-Verl., 1994. V. 102.

12. *Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D.* Singularities and groups in bifurcation theory. V. II. New York: Springer-Verl., 1988. (Appl. Math. Sci.; v. 69).

13. *Chossat P., Golubitsky M.* Iterates of maps with symmetry // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19, N 6. P. 1259–1270.

14. *Логинов Б. В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: Фан, 1985.

15. *Юдович В. И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде / РГУ. Ростов н/Д, 1993. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 07.06.93, № 1523-В93.

16. *Юдович В. И.* Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Сев-Кавказ. Регион. Естественные науки. Спец. Выпуск «Математическое моделирование». 2001. С. 175–178.

17. *Юдович В. И.* Косимметрия и магнитная конвекция жидкости в пористой среде / РГУ. Ростов н/Д, 1998. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 366-В98.
18. *Юдович В. И.* Косимметрия и дифференциальные уравнения второго порядка. / РГУ. Ростов н/Д, 1993. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 19.04.93, № 1008-В93.
19. *Юдович В. И.* Косимметрия и консервативные системы. Ч. III / РГУ. Ростов н/Д, 2002. 44 с. Деп. в ВИНИТИ 09.12.2002, № 2140-В2002.
20. *Макаренко Н. И.* Симметрия и косимметрия вариационных задач теории волн // Тр. конф. «Симметрия и косимметрия и их приложение в теории бифуркаций и фазовых переходов», Сочи, 18–23 сентября 2001 г. SCDS-2001. Сочи, 2001. С. 109–120.
21. *Юдович В. И.* О бифуркации рождения цикла из семейства равновесий динамической системы и ее затягивании // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 1. С. 22–34.
22. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация рождения цикла в системе с косимметрией // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 346–349.
23. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* Bifurcation of the branching of a cycle in n-parameter family of dynamic systems with cosymmetry // Chaos. 1997. V. 7, N 3. P. 376–386.
24. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Применение метода Ляпунова Шмидта в задаче ответвления цикла от семейства равновесий системы с мультикосимметрией // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 136–149.
25. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация ответвления цикла от семейства равновесий динамической системы с мультикосимметрией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 10. С. 1315–1323.
26. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Ответвление предельного цикла от подмногообразия равновесий в системе с мультикосимметрией // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 2. С. 317–320.
27. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. V. 10, N 2. P. 311–330.
28. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 1. С. 29–33.
29. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* On the branching of 2D-tori off an equilibrium of a cosymmetric system (codimension-1 bifurcation) // Chaos. 2001. V. 11, N 4. P. 780–794.
30. *Куракин Л. Г.* Об устойчивости граничных равновесий в системах с косимметрией // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1324–1334.
31. *Куракин Л. Г., Юдович В. И.* Бифуркация коразмерности 1 ответвления двумерных инвариантных торов от семейства равновесий в системах с косимметрией // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 796–800.
32. *Bratsun D. A., Lyubimov D. V., Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Physica D. 1995. V. 82. P. 398–417.
33. *Гурниковская Р. Ю.* О бифуркации цикла равновесий в модели плоской фильтрационной конвекции при возмущении, разрушающем косимметрию // Тр. конф. «Симметрия и косимметрия и их приложение в теории бифуркаций и фазовых переходов», Сочи, 18–23 сентября 2001 г. SCDS-2001. Сочи, 2001. С. 48–52.
34. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
35. *Юдович В. И.* Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 2. С. 313–317.
36. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
37. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

Статья поступила 14 мая 2003 г.

Куракин Леонид Геннадиевич, *Юдович Виктор Иосифович*
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
`kurakin@math.rsu.ru`, `yudovich@math.rsu.ru`