Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.946

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ТОНКОЙ ПЕРЕМЫЧКИ

С. А. Назаров, Я. Соколовски

Аннотация: Построена и обоснована асимптотика решения и соответствующего энергетического функционала смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в области с перемычкой, т. е. тонкой криволинейной полоской, соединяющей вне области два малых участка на ее границе. Поскольку асимптотический анализ инициирован запросами теории оптимизации форм, в отличие от других публикаций не вводятся упрощающие предположения об уплощенности границы вблизи зон присоединения.

Ключевые слова: асимптотика, тонкая перемычка, энергетический функционал, оптимизация формы.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и компактным замыканием $\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$. Пусть еще Γ — простая гладкая дуга, пересекающая $\partial\Omega$ в двух точках $P^{\pm}$ под ненулевыми углами и имеющая концы внутри Ω. В окрестности дуги Γ введем естественные криволинейные координаты (ν, τ), где τ — длина дуги вдоль Γ, а $|\nu|$ — расстояние до Γ. Будем считать, что точкам P^+ и P^- соответствуют значения $\tau = l$ и $\tau = -l$; здесь $2l$ — длина отрезка дуги Γ, расположенного вне Ω. Далее, допуская некоторую вольность, мы не будем различать точку и ее координату на Γ. Для функций $H_{\pm} \in C^{\infty}(\overline{\Gamma})$ таких, что $H := H_+ + H_- > 0$, определим криволинейную полоску

$$\Lambda_h = \{x : \tau \in \Gamma,\ \zeta := h^{-1}\nu \in \omega(\tau) := (-H_-(\tau), H_+(\tau))\} \tag{1}$$

и область

$$\Omega(h) = \Omega \cup \Lambda_h, \tag{2}$$

зависящие от малого геометрического параметра $h \in (0, h_0]$ (верхнюю грань $h_0 > 0$ фиксируем так, чтобы при $h \le h_0$ торцы полоски (1) содержались в Ω). Часть полоски Λ_h, расположенную вне Ω, называем *перемычкой* и обозначаем через $\Lambda(h) = \Lambda_h \setminus \overline{\Omega}$.

В сингулярно возмущенной области (2) — сочленении множеств с различными предельными размерностями — рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\begin{gathered} -\Delta_x u(h,x) = f(h,x), \quad x \in \Omega(h), \\ \partial_n u(h,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega(h) \setminus \overline{\Sigma}, \\ u(h,x) = 0, \quad x \in \Sigma, \end{gathered} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00835) и франко-русского центра по прикладной математике и информатике им. А. М. Ляпунова (проект 00–01).

в которой ∂_n — производная вдоль внешней нормали, а Σ — открытая дуга на $\partial\Omega$, причем $\operatorname{mes}_1 \Sigma > 0$ и замкнутая дуга $\overline{\Sigma}$ не содержит точек $P^{\pm}$, т. е. $\overline{\Sigma} \cap \overline{\Lambda}_h$ — пустое множество при $h \in (0, h_0]$ и достаточно малом $h_0 > 0$. Задача (3) имеет единственное решение $u(h,\cdot) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega(h); \Sigma)$ при любой правой части $f(h,\cdot) \in L_2(\Omega(h))$. На самом деле речь следует вести о семействе задач и соответствующем семействе решений, параметризованных «относительной толщиной» $h \in (0, h_0]$ перемычки $\Lambda(h)$. Тем не менее, занимаясь построением асимптотики при $h \to +0$, параметр $h > 0$ можно считать малым, но *фиксированным* и говорить о задаче и ее решении в единственном числе.

Асимптотическое поведение решения $u(h,x)$ определяется, в частности, зависимостью правой части уравнения $(3)_1$ от параметра h. Предположим, что

$$f(h,x) = \tilde{f}(h,x) + \begin{cases} f_\Omega(x), & x \in \Omega; \\ f_\Lambda(\tau), & x \in \Lambda(h). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь f_Ω и f_Λ — некоторые заданные функции на «теле» Ω и на «оси перемычки» $\Upsilon = (-l, l) \ni \tau$, а $\tilde{f}$ — малый остаток, который можно не принимать во внимание при асимптотическом анализе. Точные требования к f_Ω, f_Λ и $\tilde{f}$ предъявляются по мере необходимости. Подчеркнем особо, что все ограничения выполняются в наиболее разумной ситуации (ср. с замечанием 1 и с примером 1): функция f из $(3)_1$ вообще не зависит от параметра h и является гладкой в окрестности множества $\overline{\Omega}$, содержащей перемычку $\overline{\Lambda(h)}$.

Основной целью работы помимо построения и обоснования асимптотики решения $u(h,x)$ при $h \to +0$ является определение главного члена разложения энергетического функционала (или, что то же, интеграла Дирихле от функции u) при образовании тонкой перемычки $\Lambda(h)$. Подобный вопрос тесно связан с теорией оптимизации форм (см. [1, 2] и др.). Обычно условие оптимальности и соответствующие производные функционалов по Фреше находятся при учете лишь малых *регулярных* возмущений границы области (контур $\partial\Omega$ сдвигается вдоль нормали на расстояния $hH_0(s)$, а функция H_0 гладко зависит от точки $s \in \partial\Omega$). Понятно, что в некоторых ситуациях более выгодным оказывается *сингулярное* возмущение границы — внутри области вырезается малое отверстие или область наращивается множеством с диаметром $O(h^{1/2})$. Поскольку появление отверстия изменяет *число компонент связности* границы, в [3] производные функционалов относительно подходящей геометрической характеристики отверстия названы *топологическими.* Для вычисления таких топологических производных применяется асимптотический анализ решений краевых задач в областях с сингулярно возмущенными границами (ср. [4, 3] с [5–7] и др.).

В случае наращивания простейшим приемом, переделывающим односвязную область в многосвязную, является образование *перемычки*, т. е. как раз соединение двух точек на границе области при помощи тонкой полоски (1) (в пространственном случае правильнее говорить о *ручке*). В результате возникает сочленение сингулярно вырождающихся областей с различными предельными размерностями, асимптотический анализ которых проводился в [8–14] и др. Для таких сочленений характерно многообразие предельных и результирующих задач, из решений которых конструируется глобальное асимптотическое приближение к решению исходной задачи. Ввиду общей направленности статьи на вычисление асимптотики энергетического функционала явление пограничного слоя вблизи зон присоединения перемычки отходит на второй план, и основное внимание уделяется представлениям решения $u(h,x)$ внутри исходной области

Ω и на самой перемычке $\Lambda(h)$ (см. пп. 2 и 3 соответственно). В п. 4 производится сращивание асимптотических разложений и обсуждаются младшие члены асимптотики. В п. 5 выводится весовая априорная оценка решения задачи (3) в области $\Omega(h)$, вычисляются невязки, оставленные построенным двучленным асимптотическим приближением, и доказывается основная теорема 1 об асимптотике решения $u(h,x)$. Ее следствия, касающиеся энергетического функционала, приведены в п. 6, где и вычисляется соответствующая *топологическая производная.*

Подчеркнем, что в предшествующих исследованиях при построении и оправдании асимптотики, включающей пограничные слои, использовалось упрощающее предположение об уплощенности границы $\partial\Omega$ вблизи оснований отростков. Процедура, применяемая для оптимизации форм, приводит к искривленным границам, и в настоящей статье рассмотрение общей ситуации существенно усложнило конструкцию глобального асимптотического приближения за счет привлечения разнообразных срезок и спрямляющих диффеоморфизмов.

2. Первая предельная задача. Пусть $v_0 \in \mathring{H}^1(\Omega(h);\Sigma)$ — решение предельной задачи, получающейся из задачи (3) переходом к $h=0$, т. е. удалением перемычки из сочленения (2) и остатка $\tilde f$ из формулы $(4)_1$:

$$\begin{gathered} -\Delta_x v_0(x) = f_\Omega(x), \quad x \in \Omega, \\ \partial_n v_0(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \setminus \overline{\Sigma}; \quad v_0(x) = 0,\ x \in \Sigma. \end{gathered} \tag{5}$$

При этом предполагается, что правая часть уравнения $(5)_1$, фигурирующая в (4), принадлежит по крайней мере пространству $L_2(\Omega)$. Поскольку граница $\partial\Omega$ гладкая, решение v_0 попадает в класс H^2 всюду, кроме концов $Q^\pm$ дуги Σ, в которых происходит смена типа краевого условия. Известно (см., например, вводную главу книги [15]), что для решения $v_0 \in H^1(\Omega)$ задачи (5) справедливы включение $d_Q\nabla_x^2 v_0 \in L_2(\Omega)$ и оценка

$$\big\|d_Q\nabla_x^2 v_0; L_2(\Omega)\big\| + \|v_0; H^1(\Omega)\| \le c\|f_\Omega; L_2(\Omega)\|,$$

где $d_Q(x) = \min\{\operatorname{dist}(x, Q^\pm)\}$ — весовой множитель и $\nabla_x^2 v_0$ — совокупность вторых производных функции v_0. Так как по предположению $P^\pm \notin \overline{\Sigma}$, соболевская теорема вложения $H^2(\Omega) \subset C(\Omega)$ устанавливает непрерывность решения v_0 в точках $P^\pm$, а также оценки

$$|v_0(P^\pm)| \le c\|f_\Omega; L_2(\Omega)\|. \tag{6}$$

Тем не менее, далее понадобится более точная информация о поведении функции v_0 вблизи концов перемычки $\Lambda(h)$. Предположим, что при некотором $\mu \in (0,1)$ справедливо включение

$$d_P^{-\mu} f_\Omega \in L_2(\Omega), \tag{7}$$

где $d_P(x) = \min\{\operatorname{dist}(x, P^\pm)\}$ — новый весовой множитель. Известные результаты о поведении решений эллиптических краевых задач вблизи границы (см. ту же вводную главу в [15]) доставляют формулы

$$\begin{gathered} v_0(x) = \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm)\{v_0(P^\pm) + (s - s^\pm)\partial_s v_0(P^\pm)\} + \tilde v_0(x), \\ |v_0(P^\pm)| + |\partial_s v_0(P^\pm)| + \sum_{j=0}^{2}\big\|d_P^{-\mu-2+j} d_Q^{\delta_{j,2}}\nabla_x^j \tilde v_0; L_2(\Omega)\big\| \le cN_\Omega, \end{gathered} \tag{8}$$

в которых $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, s — длина дуги на $\partial\Omega$, $s^{\pm}$ — координаты точек $P^{\pm} \in \partial\Omega$, χ_Ω — срезающая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная единице при $r < r_0/2$ и нулю при $r > r_0$. Наконец, $r_\pm = \operatorname{dist}(x, P^{\pm})$ и

$$N_\Omega := \left\| d_P^{-\mu} f_\Omega; L_2(\Omega) \right\|. \tag{9}$$

Подчеркнем, что при гладкой функции f_Ω включение (7) выполняется, а норма (9) конечна.

3. Результирующая задача для перемычки. Для решения $u(h,x)$ задачи (3), суженного на тонкую перемычку $\Lambda(h)$, примем обычный асимптотический анзац

$$u(h,x) \sim w_0(\tau) + h w_1(\zeta,\tau) + h^2 w_2(\zeta,\tau) + \ldots \tag{10}$$

(см. [16; 17; 6, гл. 15; 18, гл. 1] и др.). Здесь w_j — функции, подлежащие определению, а τ — медленная продольная и $\zeta = h^{-1}\nu$ — быстрая поперечная переменные на перемычке. Оператор Лапласа, записанный в криволинейных координатах ν и τ, выглядит так:

$$\Delta_{(\nu,\tau)} = (1+\nu k(\tau))^{-1}\{\partial_\nu(1+\nu k(\tau))\partial_\nu + \partial_\tau(1+\nu k(\tau))^{-1}\partial_\tau\}. \tag{11}$$

Здесь $k(\tau)$ — кривизна дуги Γ в точке τ. После растяжения координаты ν оператор Лапласа допускает расщепление

$$\Delta_{(\nu,\tau)} \sim h^{-2}\partial_\zeta^2 + h^{-1}L_1(\zeta,\tau,\partial_\zeta) + h^0 L_2(\zeta,\tau,\partial_\zeta,\partial_\tau) + \ldots, \tag{12}$$

причем

$$L_1(\zeta,\tau,\partial_\zeta) = k(\tau)\partial_\zeta, \quad L_2(\zeta,\tau,\partial_\zeta,\partial_\tau) = \partial_\tau^2 - \zeta k(\tau)^2\partial_\zeta. \tag{13}$$

Кроме того, на верхнем и нижнем краях $\Upsilon_h^{\pm} = \{x : \tau \in (-l,l),\, \nu = \pm h H_\pm(\tau)\}$ полоски (1) производная $\partial_{n^\pm} = \partial/\partial n^{\pm}$ вдоль внешней нормали удовлетворяет соотношению

$$(1+h^2 H'_\pm(\tau)^2)^{1/2}\partial_{n^\pm} = \pm\partial_\nu - (1+\nu k(\tau))^{-1} h H'_\pm(\tau)\partial_\tau \sim \pm h^{-1}\partial_\zeta - h H'_\pm(\tau)\partial_\tau; \tag{14}$$

здесь $H'_\pm(\tau) = \partial_\tau H_\pm(\tau)$.

Подставим формулы (10) и (12)–(14) в уравнение $(3)_1$ на перемычке и краевое условие $(3)_2$ на ее краях, а затем соберем коэффициенты при одинаковых степенях параметра h. В результате получится рекуррентная последовательность задач Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $\omega(\tau)$ (см. (1)). Равенства

$$-\partial_\zeta^2 w_0(\tau) = 0,\ \zeta \in \omega(\tau); \quad \pm\partial_\zeta w_0(\tau) = 0,\ \zeta = \pm H_\pm(\tau),$$

составляющие первую из этих задач, выполняются автоматически, поскольку функция w_0 не зависит от ζ. Рассматривая вторую из задач,

$$-\partial_\zeta^2 w_1(\zeta,\tau) = -k(\tau)\partial_\zeta w_0(\tau) = 0,\ \zeta \in \omega(\tau); \quad \pm\partial_\zeta w_1(\pm H_\pm(\tau),\tau) = 0,$$

получающуюся согласно (13) и (14), обнаруживаем, что второй член w_1 анзаца (10) также не зависит от ζ. Наконец, третья задача, сформированная при учете предположения $(4)_2$ о правой части $f(h,x)$,

$$-\partial_\zeta^2 w_2(\zeta,\tau) = f_\Lambda(\tau) + \partial_\tau^2 w_0(\tau), \quad \zeta \in \omega(\tau),$$

$$\pm\partial_\zeta w_2(\pm H_\pm(\tau),\tau) = H'_\pm(\tau)\partial_\tau w_0(\tau),$$

имеет решение в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\int\limits_{\omega(\tau)} \big\{f_\Lambda(\tau)+\partial_\tau^2 w_0(\tau)\big\}d\zeta + H'_+(\tau)\partial_\tau w_0(\tau)+H'_-(\tau)\partial_\tau w_0(\tau)=0,$$

которое следует интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение на отрезке $\Upsilon=(-l,l)$ для функции w_0. Дополним это уравнение

$$-\partial_\tau H(\tau)\partial_\tau w_0(\tau)=H(\tau)f_\Lambda(\tau), \quad \tau\in\Upsilon, \tag{15}$$

граничными условиями Дирихле

$$w_0(\pm l)=v_0(P^\pm), \tag{16}$$

возникающими в результате сравнения анзаца (10) с элементарным анзацем $u(h,x)\sim v_0(x)$, использованным в предыдущем разделе. При

$$f_\Lambda\in L_2(\Upsilon) \tag{17}$$

существует единственное решение $w_0\in H^2(\Upsilon)$ задачи (15), (16) и согласно (6) верна оценка

$$\|w_0;H^2(\Upsilon)\|\le c(\|f_\Lambda;L_2(\Upsilon)\|+\|f_\Omega;L_2(\Omega)\|)\le c(N_\Lambda+N_\Omega),$$

где N_Ω — величина (9), превосходящая норму $\|f_\Omega;L_2(\Omega)\|$, а также

$$N_\Lambda:=\|f_\Lambda;L_2(\Upsilon)\|. \tag{18}$$

Кроме того, благодаря элементарным теоремам вложения выполняется представление

$$w_0(\tau)=\sum_\pm \chi_\Lambda(\tau\mp l)\{v_0(P^\pm)+(\tau\mp l)\partial_\tau w_0(\pm l)\}+\widetilde{w}_0(\tau), \tag{19}$$

причем при учете неравенств Харди имеем

$$|\partial_\tau w_0(\pm l)|+\sum_{j=0}^{2}\big\|d_P^{-2+j}\partial_\tau^j\widetilde{w}_0;L_2(\Upsilon)\big\|\le c\|w_0;H^2(\Upsilon)\|\le c(N_\Omega+N_\Lambda). \tag{20}$$

В (19) $\chi_\Lambda\in C^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, равная единице вблизи точки $t=0$ и нулю при $t>l/2$.

4. Пограничные слои и последующие члены асимптотики. При определении граничных условий (16) неявно использовался тот факт, что главный член разложения, описывающего явление пограничного слоя вблизи точки $P^\pm$:

$$u(h,x)\sim z_0^\pm+hz_1^\pm(\xi^\pm)+\dots, \tag{21}$$

оказывается постоянной $z_0^\pm=v_0(P^\pm)$. Здесь понадобились быстрые переменные $\xi^\pm=h^{-1}(x-P^\pm)$, а область $\Xi^\pm$, в которой решаются задачи для определения функций $z_j^\pm$ из (21), является объединением полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ и полосы $\Pi^\pm$ шириной $H(\pm l)$. Угол $\theta_\pm$ между осью полосы $\Pi^\pm$ и прямой $\partial\mathbb{R}^2_+$ совпадает с углом между дугами Γ и $\partial\Omega$ в точке $P^\pm$. Через $\eta_\pm\in[0,\infty)$ обозначаем координату на полуоси, лежащей в $\mathbb{R}^2_+$, а через $(\rho_\pm,\varphi_\pm)$ — полярные координаты на $\mathbb{R}^2_+$, причем $\rho_\pm=|\xi^\pm|$, $\varphi_\pm\in(0,\pi)$. Отметим, что $\rho_\pm\sim h^{-1}r_\pm$ и $\eta_\pm\sim h^{-1}(l\mp\tau)$, но точный смысл приведенным соотношениям будет придан в п. 5.

Для целей данной статьи нужна лишь примитивная информация о структуре решения $u(h,x)$ в зонах присоединения перемычки $\Lambda(h)$. Тем не менее, второй член разложения (21) удается построить полностью при помощи двух гармонических в $\Xi^\pm$ функций $\mathbf{z}_0^\pm$ и $\mathbf{z}_1^\pm$ с нулевыми данными Неймана на $\partial\Xi^\pm$, обладающих следующим асимптотическим поведением в двумерных цилиндрическом и коническом выходах области $\Xi^\pm$ на бесконечность:

$$\begin{gathered}\mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm) = \mp H(\pm l)^{-1}\eta_\pm + a_0^\pm + O(\exp[-\pi H(\pm l)^{-1}\eta_\pm]), \quad \xi^\pm \in \Pi^\pm \setminus \mathbb{R}^2_+,\\ \mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm) = \pi^{-1}\ln\rho_\pm + O\big(\rho_\pm^{-1}\big), \quad \xi^\pm \in \mathbb{R}^2_+;\\ \mathbf{z}_1^\pm(\xi^\pm) = a_1^\pm + O(\exp[-\pi H(\pm l)^{-1}\eta_\pm]), \quad \xi^\pm \in \Pi^\pm \setminus \mathbb{R}^2_+,\\ \mathbf{z}_1^\pm(\xi^\pm) = \rho_\pm\cos\varphi_\pm + O\big(\rho_\pm^{-1}\big), \quad \xi^\pm \in \mathbb{R}^2_+.\end{gathered} \tag{22}$$

В $(22)_{1,3}$ $a_i^\pm$ — некоторые постоянные, зависящие от $H(\pm l)$ и $\theta_\pm$. Слагаемые из правых частей формул $(22)_{1,3}$ и $(22)_{2,4}$ удовлетворяют однородным задачам Неймана в полосе и развернутом угле соответственно (см. [15, гл. 2]). Растущие на бесконечности решения $\mathbf{z}_i^\pm$ однородной задачи Неймана в $\Xi^\pm$, как обычно, отыскиваются в виде сумм упомянутых слагаемых, умноженных на подходящие срезки (см. далее (39)), и решений $\hat{\mathbf{z}}_i^\pm$, компенсирующих образовавшиеся невязки и имеющих конечные интегралы Дирихле. Предписанные асимптотики в двух выходах на бесконечность согласованы: в обоих случаях $(22)_{1,2}$ и $(22)_{3,4}$ суммарный поток через усекающие поверхности равен нулю. «Энергетические» составляющие $\hat{\mathbf{z}}_i^\pm$ определены с точностью до аддитивной постоянной, и именно поэтому стало возможным удалить постоянное слагаемое из представлений $(22)_{2,4}$ в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$.

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [19, 5, 7] и др.). Так как

$$w_0(\tau) \sim v_0(P^\pm) + (\tau \mp l)\partial_\tau w_0(\pm l) \sim v_0(P^\pm) \mp h\eta_\pm\partial_\tau w_0(\pm l) \quad \text{в } \Lambda(h),$$

при учете $(22)_1$ видим, что член $z_1^\pm(\xi^\pm)$ анзаца (21) должен содержать выражение $\pm H(\pm l)\mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm)\partial_\tau w_0(\pm l)$. Теперь, обращаясь к формуле $(22)_2$ в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, обнаруживаем, что ввиду соотношения

$$\pm hH(\pm l)\mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm)\partial_\tau w_0(\pm l) \sim \pm hH(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\pi^{-1}\{\ln r_\pm - \ln h\} \quad \text{в } \Omega$$

второе слагаемое из анзаца

$$u(h,x) = v_0(x) + hv_1(x) + \ldots, \tag{23}$$

по сути дела принятого в п. 2 внутри области Ω, обязано иметь логарифмические особенности в точках $P^\pm$. Более точно, v_1 — решение задачи

$$\begin{gathered}-\Delta_x v_1(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad v_1(x) = 0,\ x \in \Sigma,\\ \partial_n v_1(x) = \sum_\pm \mp H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\delta(s - s^\pm), \quad x \in \partial\Omega \setminus \overline{\Sigma},\end{gathered} \tag{24}$$

допускающее представление

$$v_1(x) = \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm)\left\{\pm\frac{1}{\pi}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\ln r_\pm + b_1^\pm\right\} + \tilde{v}_1(x). \tag{25}$$

Здесь δ — функция Дирака; $-\pi^{-1}\ln r_\pm$ — ядро Пуассона; $b_1^\pm$ — постоянные, зависящие от H, w_0 и Ω, а $\tilde v_1 \in H^1(\Omega)$ — регулярная часть, причем $\tilde v_1(P^\pm) = 0$. Выполняются оценки

$$\begin{aligned}\left|b_1^\pm\right| + \sum_{j=0}^{2}\left\|d_P^{-1-\mu+j} d_Q^{\delta_{j,2}} \nabla_x^j \tilde v_1; L_2(\Omega)\right\| \le c\sum_\pm |\partial_\tau w_0(\pm l)| \\ \le c\|w_0; H^2(\Upsilon)\| \le c(N_\Lambda + N_\Omega), \quad (26)\end{aligned}$$

в которых μ — произвольное число из интервала $(0,1)$ (берем μ таким же, как и в (7)).

Итак, можно закончить построение пары членов разложения (21). Поскольку в силу $(8)_1$ и (25) справедлива формула

$$\begin{aligned}v_0(x)+hv_1(x) \sim v_0(P^\pm)+(s-s^\pm)\partial_s v_0(P^\pm)+h\bigl\{\pm\pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\ln r_\pm + b_1^\pm\bigr\} \\ \sim v_0(P^\pm) + h\bigl\{\rho_\pm \cos\varphi_\pm \partial_s v_0(P^\pm) \pm \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)[\ln\rho_\pm + \ln h] + b_1^\pm\bigr\} \quad \text{в } \Omega, \\ (27)\end{aligned}$$

при учете представлений $(22)_{4,2}$ положим

$$z_1^\pm(\xi^\pm) = \mathbf{z}_1^\pm(\xi^\pm)\partial_s v_0(P^\pm) \pm \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\bigl[\mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm) + \ln h\bigr] + b_1^\pm. \quad (28)$$

Подчеркнем, что на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ отклонение суммы (28) от последней фигурной скобки из (27) составляет $O\bigl(\rho_\pm^{-1}\bigr)$ при $\rho_\pm \to +\infty$.

Постоянная $v_0(P^\pm)$ из (27) послужила правой частью граничного условия (16), а значит, и главным членом асимптотики $w_0(\tau)$ при $\tau \to \pm l$. Точно так же, выделяя постоянную в разложении функции (28) при $\Pi^\pm \ni \eta \to +\infty$, осуществляем сращивание и формируем граничное условие для второго слагаемого в анзаце (10):

$$w_1(\ln h, \pm l) = a_1^\pm \partial_s v_0(P^\pm) \pm \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\bigl[a_0^\pm + \ln h\bigr] + b_1^\pm. \quad (29)$$

Можно было бы продолжить описанную в п. 3 процедуру и вывести аналогичное (15) обыкновенное дифференциальное уравнение для w_1, однако оно далее не понадобится. Подчеркнем, что из-за присутствия $\ln h$ в правой части (29) функция w_1 линейно зависит от этого большого параметра.

5. Обоснование асимптотики. Для любой функции $u \in \mathring{H}^1(\Omega(h);\Sigma)$ имеем

$$\|u; L_2(\Omega)\| \le c\|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|.$$

Отсюда и из одномерного неравенства Харди с логарифмом

$$\int_0^1 |U(r)|^2 r^{-1}|\ln r|^{-2}dr \le 4\int_0^1 |U'(r)|^2 r\,dr \quad \forall U \in C_0^\infty[0,1)$$

вытекает, что

$$\left\|d_P^{-1}(1+|\ln d_P|)^{-1}u; L_2(\Omega)\right\| \le c\|u; H^1(\Omega)\| \le c\|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|. \quad (30)$$

Рассмотрим часть

$$\Lambda_h^\bullet = \{x \in \Lambda_h : |\tau| < l + 2\lambda h\}$$

криволинейной полоски (1), причем длину $\lambda > 0$ выберем так, чтобы концевые зоны $\Lambda_h^\pm = \{x \in \Lambda_h^\bullet : \pm\tau \in (l + \lambda h, l + 2\lambda h)\}$ попали внутрь области Ω. Так как $d_P(x)^{-1} \geq ch^{-1}$ при $x \in \Lambda_h^\pm$ и $c > 0$, выводим из (30) соотношение

$$h^{-1}(1 + |\ln h|)^{-1}\|u; L_2(\Lambda_h^\pm)\| \leq c\|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|. \tag{31}$$

Пусть $\mathscr{X} \in C_0^\infty(-l - 2\lambda h, l + 2\lambda h)$ — срезающая функция, равная единице при $|\tau| < l + \lambda h$; ясно, что ее можно подчинить неравенствам

$$\left|\partial_\tau^k \mathscr{X}(h, \tau)\right| \leq c_k h^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{32}$$

В силу (32) и (31)

$$\begin{aligned}\|\nabla_x(\mathscr{X} u); L_2(\Lambda_h^\bullet)\| \leq c\Big\{\|\nabla_x u; L_2(\Lambda_h^\bullet)\| + h^{-1}\sum_\pm \|u; L_2(\Lambda_h^\pm)\|\Big\}\\ \leq c(1 + |\ln h|)\|\nabla_x u; L_2(\Omega(h))\|.\end{aligned}$$

Для оценки нормы u на перемычке осталось применить известное весовое неравенство Фридрихса — Пуанкаре к произведению $\mathscr{X} u$, аннулирующемуся на торцах тонкой полоски $\Lambda_h^\bullet$:

$$\|(h + d_P)^{-1}\mathscr{X} u; L_2(\Lambda_h^\bullet)\| \leq c\|\nabla_x(\mathscr{X} u); L_2(\Lambda_h^\bullet)\|.$$

Эта формула получается повторением процедуры вывода весового анизотропного неравенства Корна для тонких искривленных пластин и стержней (см. [20; 18, § 3.3, 3.4] и др.). Поскольку здесь рассматривается скалярное поле, общая процедура претерпевает существенные упрощения и мы лишь формулируем результат.

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$\|du; L_2(\Omega)\| \leq c\|\nabla_x u; L_2(\Omega)\|,$$

в котором постоянная c не зависит от функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega(h); \Sigma)$ и параметра $h \in (0, h_0]$, а весовой множитель d определен следующим образом:

$$d(h, x) = \begin{cases} d_P(x)^{-1}(1 + |\ln d_P(x)|)^{-1}, & x \in \Omega;\\ (h + d_P(x))^{-1}(1 + |\ln h|)^{-1}, & x \in \Lambda(h).\end{cases} \tag{33}$$

Составим глобальное асимптотическое приближение $\mathscr{U}(h, x)$ к решению $u(h, x)$ задачи (3). С этой целью введем срезающие функции

$$\mathscr{X}_\Omega(h, x) = 1 - \sum_\pm \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm), \quad \mathscr{X}_\Lambda(h, x) = 1 - \sum_\pm \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau \mp l)), \tag{34}$$

соответственно равные единице всюду на Ω и $\Lambda(h)$, за исключением малых окрестностей точек $P^\pm$. Ясно, что срезки (34) подчиняются подобным (32) неравенствам. Пусть еще $x \mapsto \varkappa_\pm(h, x)$ — диффеоморфизм, переводящий множество

$$\Omega^\pm(h) = \{x \in \Omega(h) : r_\pm < r_0,\ x \in \Omega;\ l \mp \tau < r_0,\ x \in \Lambda(h)\} \cup (\partial\Omega \cap \Lambda_h)$$

в часть области $\Xi^\pm$, возникшей в п. 4 при исследовании явления пограничного слоя. По построению диффеоморфизм $\varkappa_\pm$ в непосредственной близости от $P^\pm$

мало отличается от растяжения координат в h раз. Более того, так как включение $\varkappa_\pm \in H^1_\infty(\Omega(h))$ достаточно для дальнейших целей, упомянутый диффеоморфизм можно соорудить следующим образом: сначала спрямить контур $\partial\Omega$, рассматривая координаты (n, s) как декартовы (размер r_0 берем достаточно малым), затем сделать замену переменной $s \mapsto a(h,n,s)s + b(h,n,s)$, выравнивая ширину криволинейной полоски, но считая непрерывные кусочно гладкие коэффициенты a и b постоянными при $n < 0$, и, наконец, растянуть координаты в h раз. Такие действия обеспечивают оценки

$$\begin{gathered}
|\varkappa_\pm(h,x) - h^{-1}(x - P^\pm)| \leq c \cdot \begin{cases} (h + r_\pm), & x \in \Omega, \\ (h + l \mp \tau), & x \in \Lambda(h), \end{cases} \\
|\nabla_x \varkappa_\pm(h,x) - h^{-1}\mathbb{I}_2| \leq c \cdot \begin{cases} (h + r_\pm), & x \in \Omega, \\ (h + l \mp \tau), & x \in \Lambda(h), \end{cases}
\end{gathered} \tag{35}$$

здесь $\mathbb{I}_2$ — единичная матрица размером 2×2.

В соответствии с анзацами (10), (23) и (21) асимптотическое решение $\mathscr{U}$ определяется по формулам

$$\begin{gathered}
\mathscr{U}(h,x) = \mathscr{V}(h,x) + h \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm) \tilde{z}_1^\pm(\varkappa_\pm(h,x)), \quad x \in \Omega, \\
\mathscr{U}(h,x) = \mathscr{W}(h,x) + h \sum_\pm \chi_\Lambda(\tau \mp l) \tilde{z}_1^\pm(\varkappa_\pm(h,x)), \quad x \in \Lambda,
\end{gathered} \tag{36}$$

в которых основные составляющие имеют вид

$$\begin{gathered}
\mathscr{V}(h,x) = \mathscr{X}_\Omega(h,x)\{\tilde{v}_0(x) + h\tilde{v}_1(x)\} \\
+ \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm)\bigl\{v_0(P^\pm) + h\bigl(b_1^\pm + \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\ln h\bigr) + (1 - \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm))\mathscr{Y}^\pm(x)\bigr\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathscr{W}(h,x) = \mathscr{X}_\Lambda(h,x)\{\widetilde{w}_0(\tau) + h\widetilde{w}_1(\ln h, \tau)\} \\
+ \sum_\pm \chi_\Lambda(\tau \mp l)\{w_0(\pm l) + hw_1(\ln h, \pm l) + (1 - \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau \mp l)))\mathscr{Z}^\pm(\tau)\},
\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}
\mathscr{Y}^\pm(x) := (s - s_\pm)\partial_s v_0(P^\pm) + \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)(\ln r_\pm - \ln h), \\
\mathscr{Z}^\pm(\tau) := (\tau \mp l)\partial_\tau w_0(\pm l).
\end{gathered}$$

Здесь $\tilde{v}_0$, $\tilde{v}_1$ и $\widetilde{w}_0$ — остатки в представлениях $(8)_1$, (25) и (19), а w_1 — произвольная (далее берем ее линейной) функция переменной τ, удовлетворяющая граничным условиям (29), причем

$$w_1(\ln h, \tau) = \widetilde{w}_1(\ln h, \tau) + \sum_\pm \chi_\Lambda(\tau \mp l) w_1(\ln h, \pm l).$$

Обращаем внимание на то, что в $(37)_1$ постоянные, взятые из (8) и (25), не умножаются на срезающие функции, поскольку согласованы со значениями w_0 и w_1 в точках $\tau = \pm l$, а появление множителя $\mathscr{X}_\Omega$ при функциях $\tilde{v}_0$ и $\tilde{v}_1$, исчезающих в точках $P^\pm$, не привносит существенных погрешностей. В то же время остальные слагаемые, выделенные в (8) и (25), умножены на срезку $1 - \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm)$, которая отличается от единицы лишь в зоне $\{x \in \Omega : r_\pm < r_0 h\}$ действия пограничного слоя (сказанное касается и формулы $(37)_2$). Все это сделано для того, чтобы, во-первых, приближение $\mathscr{U}$ было достаточно гладким и, во-вторых, слагаемые, не убывающие на бесконечности, исчезли из составляющих $\mathbf{z}_0^\pm$ и $\mathbf{z}_1^\pm$ в формуле (28). Таким образом, вместо (28) следует взять сумму

$$\tilde{z}_1^\pm(\xi^\pm) = \tilde{\mathbf{z}}_1^\pm(\xi^\pm)\partial_s v_0(P^\pm) \pm \pi^{-1}H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)\tilde{\mathbf{z}}_0^\pm(\xi^\pm), \tag{38}$$

где в соответствии с разложениями (22)

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{z}}_0^\pm(\xi^\pm) = \mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm) - a_0^\pm \pm (1-\chi_\Lambda(\eta_\pm))H(\pm l)^{-1}\eta_\pm, \quad \xi^\pm \in \Pi^\pm \setminus \mathbb{R}^2_+, \\
\tilde{\mathbf{z}}_0^\pm(\xi^\pm) = \mathbf{z}_0^\pm(\xi^\pm) - (1-\chi_\Omega(\rho_\pm))\pi^{-1}\ln\rho_\pm, \quad \xi^\pm \in \mathbb{R}^2_+; \\
\tilde{\mathbf{z}}_1^\pm(\xi^\pm) = \mathbf{z}_1^\pm(\xi^\pm) - a_1^\pm, \quad \xi^\pm \in \Pi^\pm \setminus \mathbb{R}^2_+, \\
\tilde{\mathbf{z}}_1^\pm(\xi^\pm) = \mathbf{z}_1^\pm(\xi^\pm) - (1-\chi_\Omega(\rho_\pm))\rho_\pm \cos\varphi_\pm, \quad \xi^\pm \in \mathbb{R}^2_+.
\end{gathered} \tag{39}$$

Подчеркнем, наконец, что функции (39) отличаются от введенных в п. 3 «энергетических решений» $\hat{\mathbf{z}}_i^\pm$ лишь постоянными, вычтенными на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$. Сами $\tilde{\mathbf{z}}_i^\pm$ не являются непрерывными, однако комбинации (36) сохраняют необходимую гладкость ввиду осуществленного сращивания асимптотических разложений.

Вычислим невязки, порождаемые приближением $\mathscr{U} \in \mathring{H}^1(\Omega(h);\Sigma)$ в уравнении $(3)_1$ и краевом условии $(3)_2$. Для разности $\mathscr{R} = u - \mathscr{U}$ получаем соотношения

$$\begin{aligned}
-\Delta_x\mathscr{R} &= f - \mathscr{X}_\Omega f_\Omega + [\Delta_x, \mathscr{X}_\Omega](\tilde{v}_0 + h\tilde{v}_1) \\
&+ h\sum_\pm [\Delta_x, \chi_\Omega(r_\pm)]\,\tilde{z}_1^\pm + \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm)\big\{h\Delta_x\tilde{z}_1^\pm - [\Delta_x, \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm)]\mathscr{Y}^\pm\big\} \quad \text{в } \Omega(h),
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta_x\mathscr{R} = f + \mathscr{X}_\Lambda\Delta_x(w_0 + hw_1) + [\Delta_x, \mathscr{X}_\Lambda](\widetilde{w}_0 + h\widetilde{w}_1) + h\sum_\pm [\Delta_x, \chi_\Lambda(\tau \mp l)]\tilde{z}_1^\pm \\
+ \sum_\pm \chi_\Lambda(\tau \mp l)\big\{h\Delta_x\tilde{z}_1^\pm - [\Delta_x, \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau \mp l))]\mathscr{Z}^\pm\big\} \quad \text{в } \Lambda(h).
\end{aligned}$$

Здесь $[A,B] = AB - BA$ — коммутатор операторов A и B, величины $\mathscr{Y}^\pm$ и $\mathscr{Z}^\pm$ введены в $(37)_3$, а при преобразовании членов учтено расположение носителей срезок и их производных. Аналогично

$$\begin{aligned}
\partial_n\mathscr{R} &= -[\partial_n, \mathscr{X}_\Omega](\tilde{v}_0 + h\tilde{v}_1) \\
&- h\sum_\pm [\partial_n, \chi_\Omega(r_\pm)]\tilde{z}_1^\pm - \sum_\pm \chi_\Omega(r_\pm)\big\{h\partial_n\tilde{z}_1^\pm - [\partial_n, \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm)]\mathscr{Y}^\pm\big\} \quad \text{в } \partial\Omega \setminus \overline{\Lambda}_h,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\partial_n\mathscr{R} = -\mathscr{X}_\Lambda\partial_n(w_0 + hw_1) - [\partial_n, \mathscr{X}_\Lambda](\widetilde{w}_0 + h\widetilde{w}_1) - h\sum_\pm [\partial_n, \chi_\Lambda(\tau \mp l)]\tilde{z}_1^\pm \\
- \sum_\pm \chi_\Lambda(\tau \mp l)\big\{h\partial_n\tilde{z}_1^\pm - [\partial_n, \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau \mp l))]\mathscr{Z}^\pm\big\} \quad \text{на } \Upsilon_h^\pm \setminus \overline{\Omega}.
\end{aligned}$$

Умножив уравнения (40) на $\mathscr{R} \in \mathring{H}^1(\Omega(h);\Sigma)$ и проинтегрировав по частям в $\Omega(h)$ при учете краевых условий (41), приходим к формуле

$$(\nabla_x\mathscr{R}, \nabla_x\mathscr{R})_{\Omega(h)} = \ldots, \tag{42}$$

где $(\ ,\ )_\Xi$ — скалярное произведение в $L_2(\Xi)$, а многоточие обозначает линейно зависящие от $\mathscr{R}$ интегралы, которые будут уточнены и обработаны поочередно. Начнем с оценки

$$\begin{aligned}|(f-\mathscr{X}_\Omega f_\Omega,\mathscr{R})_\Omega| &\le c(\|d_P(1+|\ln d_P|)(1-\mathscr{X}_\Omega)f_\Omega;L_2(\Omega)\| \\ &\quad+\|d_P(1+|\ln d_P|)\tilde f;L_2(\Omega)\|)\big\|d_P^{-1}(1+|\ln d_P|)^{-1}\mathscr{R};L_2(\Omega)\big\| \\ &\le ch^{1+\mu}(1+|\ln h|)(N_\Omega+\widetilde N_\Omega)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega)\|,\end{aligned}$$

Здесь использованы предложение 1, определение (9) и соотношение $d_P(x)\le ch$ на носителе разности $1-\mathscr{X}_\Omega$ (см. (34)), а также введено следующее условие малости остатка в представлении (4): величина

$$\widetilde N_\Omega := h^{-1-\mu}(1+|\ln h|)^{-1}\|d_P(1+|\ln d_P|)\tilde f;L_2(\Omega)\| \tag{43}$$

имеет порядок $1=h^0$.

Помимо прежних соображений, очередные две оценки опираются на неравенства $(8)_2$, (26) и (20), относящиеся к остаткам $\tilde v_i$ и коэффициентам комбинации (28):

$$\begin{aligned}&|([\Delta_x,\mathscr{X}_\Omega](\tilde v_0+h\tilde v_1),\mathscr{R})_\Omega-([\partial_n,\mathscr{X}_\Omega](\tilde v_0+h\tilde v_1),\mathscr{R}\big)_{\partial\Omega}| \\ &\qquad\le ch^{1+\mu}(1+|\ln h|)(N_\Omega+(1+|\ln h|)N_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega(h))\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&h\big|\big([\Delta_x,\chi_\Omega(r_\pm)]\tilde z_1^\pm,\mathscr{R}\big)_\Omega-([\partial_n,\chi_\Omega(r_\pm)]\tilde z_1^\pm,\mathscr{R})_{\partial\Omega\setminus\Lambda_h}\big| \\ &\qquad\le ch^2(1+|\ln h|)(N_\Omega+N_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega(h))\|.\end{aligned}$$

Подчеркнем, что во втором случае учтена скорость убывания $O\big(\rho_\pm^{-1}\big)=O\big(hr_\pm^{-1}\big)$ остатков в разложениях $(22)_{2,4}$, а в первом — формулы (32) для производных срезки $\mathscr{X}_\Omega$ и элементарные следовые неравенства

$$\big\|d_P^{i-\mu-3/2}\tilde v_i;L_2(\partial\Omega)\big\|\le c\sum_{j=0}^{1}\big\|d_P^{i-\mu-2+j}\nabla_x^j\tilde v_i;L_2(\Omega)\big\|,\quad i=0,1.$$

Отложив рассмотрение последних слагаемых в (40) и (41), заметим, что аналогично предыдущему оценки

$$\begin{aligned}&|([\Delta_x,\mathscr{X}_\Lambda](\widetilde w_0+h\widetilde w_1),\mathscr{R})_{\Lambda(h)}-([\partial_n,\mathscr{X}_\Lambda](\widetilde w_0+h\widetilde w_1),\mathscr{R})_{\partial\Lambda(h)}| \\ &\qquad\le c\{h^{3/2}(1+|\ln h|)+h^2(1+|\ln h|)^2\}(N_\Omega+N_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega(h))\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&h\big|\big([\Delta_x,\chi_\Lambda(\tau\mp l)]\tilde z_1^\pm,\mathscr{R}\big)_{\Lambda(h)}-\big([\partial_n,\chi_\Lambda(\tau\mp l)]\tilde z_1^\pm,\mathscr{R}\big)_{\partial\Lambda(h)}\big| \\ &\qquad\le ch^{1/2}(1+|\ln h|)\exp\{-\delta/h\}(N_\Omega+N_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega(h))\|\end{aligned}$$

обеспечиваются формулами (20), (29) и $(22)_{1,3}$. При этом возникшие степени величины $(1+|\ln h|)$ обусловлены аналогичными множителями из (29) и $(33)_2$, а экспонента $\exp\{-\delta/h\}$ с $\delta=2^{-1}\pi r_0\max\{H_\pm(\pm l)^{-1}\}>0$ — экспоненциальным затуханием остатков в представлениях $(22)_{1,3}$ и равенством $\partial_t\chi_\Lambda(t)=0$ при $t\in[0,r_0/2]$. Так как функция w_1 зависит лишь от медленной переменной τ, прямые вычисления нормы показывают, что в силу формул (33) и (29), содержащих $\ln h$, выполняется соотношение

$$h|I(w_1,\mathscr{R})|\le ch^{3/2}(1+|\ln h|)^2(N_\Omega+N_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R};L_2(\Omega(h))\|,$$

где $I(w, \mathscr{R}) := (\mathscr{X}_\Lambda \Delta_x w, \mathscr{R})_{\Lambda(h)} - (\mathscr{X}_\Lambda \partial_n w, \mathscr{R})_{\partial\Lambda(h)}$.

Теперь обработаем выражение $I(w_0, \mathscr{R})$. Положим

$$\overline{\mathscr{R}}(\tau) := h^{-1} H(\tau)^{-1} \int\limits_{\omega(\tau)} \mathscr{R}(\nu, \tau)\, d\nu.$$

Ввиду одномерного неравенства Пуанкаре справедливо соотношение

$$\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}}); L_2(\Lambda(h))\| \leq ch\|\mathscr{X}_\Lambda \partial_\nu \mathscr{R}; L_2(\Lambda(h))\| \leq Ch\|\nabla_x \mathscr{R}; L_2(\Lambda(h))\|.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} h^{-1/2}&\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}}); L_2(\partial\Lambda(h))\| \\ &\leq c\{h^{-1}\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}}); L_2(\Lambda(h))\| + \|\mathscr{X}_\Lambda \partial_\nu \mathscr{R}; L_2(\Lambda(h))\|\}, \end{aligned}$$

$$\|\mathscr{X}_\Lambda \overline{\mathscr{R}}; L_2(\Upsilon)\| \leq ch^{-1/2}\|\mathscr{X}_\Lambda \mathscr{R}; L_2(\Lambda(h))\|.$$

Заметим, что $\|\Delta_x w_0; L_2(\Upsilon)\| \leq c(N_\Omega + N_\Lambda)$ и $\|\partial_n w_0; L_2(\Upsilon)\| \leq ch(N_\Omega + N_\Lambda)$ в силу (12) и (14), и продолжим преобразования при помощи указанных выше неравенств:

$$\begin{aligned} |I(w_0, \mathscr{R}) - I(w_0, \overline{\mathscr{R}})| &= |I(w_0, \mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}})| \\ &\leq c\{\|\Delta w_0; L_2(\Lambda(h))\|\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}}); L_2(\Lambda(h))\| \\ &\quad + \|\partial_\nu w_0; L_2(\partial\Lambda(h) \setminus \Omega)\|\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R} - \overline{\mathscr{R}}); L_2(\partial\Lambda(h))\|\} \\ &\leq c\{h^{1/2}h + h^1 h^{1/2}\}(N_\Omega + N_\Lambda)\|\nabla_x \mathscr{R}; L_2(\Omega(h))\|. \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание уравнение (15) и формулы (11) и (14) для лапласиана в $\Lambda(h)$ и производной по нормали на $\Upsilon_h^\pm$, обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} &\left| I(w_0, \overline{\mathscr{R}}) + h\int\limits_{-l}^{l} \mathscr{X}_\Lambda(\tau) H(\tau) f_\Lambda(\tau) \overline{\mathscr{R}}(\tau)\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{-l}^{l} \left\{ \int\limits_{-H_-(\tau)}^{H_+(\tau)} \mathscr{X}_\Lambda(\tau)\overline{\mathscr{R}}(\tau)(-\partial_\tau(1 + \nu k(\tau))^{-1}\partial_\tau w_0(\tau) - (1 + \nu k(\tau)) f_\Lambda(\tau))\, d\nu \right\} d\tau \right. \\ &\qquad + h\sum_\pm \int\limits_{-l}^{l} \mathscr{X}_\Lambda(\tau)\overline{\mathscr{R}}(\tau)\big(1 + h^2 H_\pm'(\tau)^2\big)^{-1/2} \\ &\qquad \left. \times (1 \pm hH_\pm(\tau)k(\tau))H_\pm'(\tau)\partial_\tau w_0(\tau)(1 + h^2 H_\pm'(\tau)^2)^{1/2}\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{-l}^{l} \mathscr{X}_\Lambda(\tau)\overline{\mathscr{R}}(\tau)(-\partial_\tau H(\tau)\partial_\tau w_0(\tau) - f_\Lambda(\tau))\, d\tau \right| \\ &\quad + c\|w_0; H^2(\Upsilon)\|(h^{1/2}\|\nu\mathscr{X}_\Lambda\overline{\mathscr{R}}; L_2(\Lambda(h))\| + h^2\|\mathscr{X}_\Lambda\overline{\mathscr{R}}; L_2(\Upsilon)\|) \\ &\qquad \leq ch^{3/2}(1 + |\ln h|)(N_\Omega + N_\Lambda)\|\nabla_x \mathscr{R}; L_2(\Omega(h))\|. \end{aligned}$$

Конкретизируем условие малости остатка в представлении $(4)_2$, предположив, что

$$\tilde{f}(h,x) = \tilde{f}_0(h,x) + \tilde{f}_\perp(h,\nu,\tau),$$
$$\int\limits_{-hH_-(\tau)}^{hH_+(\tau)} \tilde{f}_\perp(h,\nu,\tau)d\nu = 0, \quad \tau \in (-l-2h\lambda, l+2h\lambda), \tag{44}$$
$$\widetilde{N}_\Lambda := (1+|\ln h|)^{-1}\{h^{-3/2}\|\tilde{f}_0; L_2(\Lambda(h))\| + h^{-1/2}\|\tilde{f}_\perp; L_2(\Lambda(h))\|\};$$

при этом величина $\widetilde{N}_\Lambda$ имеет первый порядок, а введение в $(44)_2$ длины $\lambda > 0$ преследует те же цели, что и ранее в (31).

Замечание 1. Для гладкой в окрестности перемычки $\overline{\Lambda(h)}$ функции f, записанной при помощи переменных ν и τ, имеем

$$\tilde{f}_\perp = 0, \quad \tilde{f}_0(\nu,\tau) = f(\nu,\tau) - f(0,\tau),$$
$$\|\tilde{f}_0; L_2(\Lambda(h))\| \le ch^{3/2}\max\{|\nabla_x f(\nu,\tau)| : x \in \overline{\Lambda}_h\}.$$

Основываясь на предположениях (44), получаем еще одну оценку

$$\begin{aligned}
&\left|(f,\mathscr{R})_{\Lambda(h)} - h\int\limits_{-l}^{l}\mathscr{X}_\Lambda(\tau)H(\tau)f_\Lambda(\tau)\overline{\mathscr{R}}(\tau)\,d\tau\right| \\
&\quad = |((1-\mathscr{X}_\Lambda)f,\mathscr{R})_{\Lambda(h)} + (\mathscr{X}_\Lambda\tilde{f}_0,\mathscr{R})_{\Lambda(h)} + (\mathscr{X}_\Lambda f_\Lambda, \mathscr{R} - (1+\nu k)^{-1}\overline{\mathscr{R}})_{\Lambda(h)} \\
&\qquad + (\tilde{f}_\perp, \mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R}-\overline{\mathscr{R}})(1+\nu k)^{-1})_{\Lambda(h)} + (\tilde{f}_\perp, \mathscr{X}_\Lambda\overline{\mathscr{R}}\nu k(1+\nu k)^{-1})_{\Lambda(h)}| \\
&\qquad \le c(N_\Lambda + (1+|\ln h|)\widetilde{N}_\Lambda)\{h^{3/2}\|d_p^{-1}\mathscr{R}; L_2(\Lambda(h))\| \\
&\qquad + h^{1/2}\|\mathscr{X}_\Lambda(\mathscr{R}-\overline{\mathscr{R}}); L_2(\Lambda(h))\| + h^2\|\overline{\mathscr{R}}; L_2(\Upsilon)\|\} \\
&\qquad \le ch^{3/2}(1+|\ln h|)(N_\Lambda + (1+|\ln h|)\widetilde{N}_\Lambda)\|\nabla_x\mathscr{R}; L_2(\Omega(h))\|.
\end{aligned}$$

Итак, осталось разобраться с последними членами в $(40)_{1,2}$ и $(41)_{1,2}$. Поскольку на $\mathbb{R}^2_+$ к функции $\tilde{z}_1^\pm(\varkappa_\pm(h,\cdot))$ можно без каких-либо последствий прибавить постоянную и, значит, сделать ее непрерывной (см. комментарии к формулам (39)), после интегрирования по частям соответствующие слагаемые из правой части (42) превращаются в сумму

$$\begin{aligned}
&h\big(\nabla_x\tilde{z}_1^\pm(\varkappa_\pm(h,\cdot)), \nabla_x(\chi^\pm\mathscr{R})\big)_{\Omega(h)} \\
&\quad - ([\Delta_x, \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm)]\mathscr{Y}^\pm, \chi^\pm\mathscr{R})_\Omega + ([\partial_n, \chi_\Omega(h^{-1}r_\pm)]\mathscr{Y}^\pm, \chi^\pm\mathscr{R})_{\partial\Omega\setminus\Lambda_h} \\
&- ([\Delta_x, \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau\mp l))]\mathscr{Z}^\pm, \chi^\pm\mathscr{R})_{\Lambda(h)} + ([\partial_n, \chi_\Lambda(h^{-1}(\tau\mp l))]\mathscr{Z}^\pm, \chi^\pm\mathscr{R})_{\partial\Lambda_h\setminus\Omega};
\end{aligned} \tag{45}$$

здесь $\chi^\pm(x) = \chi^\pm(r_\pm)$ в Ω и $\chi^\pm(x) = \chi^\pm(\tau\mp l)$ на $\Lambda(h)$, а $\mathscr{Y}^\pm$ и $\mathscr{Z}^\pm$ указаны в $(37)_3$. Перейдем в (45) к координатам $\xi^\pm = \varkappa_\pm(h,x)$. В результате получим интегралы по области $\Xi^\pm$ и ее границе с «пробной» функцией $\xi^\pm \mapsto \chi^\pm(\varkappa_\pm^{-1}(h,\xi^\pm))\mathscr{R}(\varkappa_\pm^{-1}(h,\xi^\pm))$. Так как величина $\tilde{z}_1^\pm(\xi^\pm)$ убывает при $|\xi^\pm| \to +\infty$ не медленнее $O(|\xi^\pm|^{-1})$ (см. (22) и (39)), а остальные подынтегральные выражения имеют носители на множестве $\{x : r_\pm < ch\}$, в силу соотношений (35) ошибки, совершаемые при удалении якобиана и при заменах

$$\nabla_x \mapsto h^{-1}\nabla_{\xi^\pm}, \quad \partial_n \mapsto h^{-1}\partial_{n(\xi^\pm)};$$

$$h^{-1}(\tau \mp l) \mapsto \mp\xi^{\pm} \text{ на } \Pi^{\pm} \setminus \mathbb{R}^2_+, \quad h^{-1}r_{\pm} \mapsto \rho^{\pm} \text{ на } \mathbb{R}^2_+,$$

оцениваются сверху выражением

$$ch^2(1+|\ln h|)\big(N_\Omega + N_\Lambda\big)\|\nabla_x \mathscr{R}; L_2(\Omega(h))\|.$$

Получающаяся в результате замен сумма интегралов равна нулю, так как представляет собой фрагмент интегрального тождества, которому удовлетворяет функция $\tilde z_1^{\pm}$ (ср. с определениями (38) и (39)). Проверим упомянутые оценки на примере первого скалярного произведения в (45):

$$\begin{aligned} h\Big|\big(\nabla_x \tilde z_1^{\pm}(\varkappa_{\pm}(h,\cdot)), \nabla_x(\chi^{\pm}\mathscr{R})\big)_{\Omega(h)} - \sum_{\pm}\big(\nabla_\xi \tilde z_1^{\pm}, \nabla_\xi \mathscr{R}^{\pm}\big)_{\Xi^{\pm}}\Big| \\ \le h\Big|\sum_{\pm}\big(\big\{|\det X_{\pm}|^{-1}X_{\pm}^{\top}X_{\pm} - \mathbb{I}_2\big\}\big(\nabla_\xi \tilde z_1^{\pm}, \nabla_\xi \mathscr{R}^{\pm}\big)_{\Xi^{\pm}}\Big|. \end{aligned} \tag{46}$$

При этом $\top$ — знак транспонирования, $X_{\pm}(h,\xi^{\pm})$ — матрица Якоби для замены $x \mapsto \xi^{\pm}$, $\det X_{\pm}(h,\xi^{\pm})$ — соответствующий якобиан и $\mathscr{R}^{\pm}(\xi^{\pm}) = \chi^{\pm}(x)\mathscr{R}(x)$. Благодаря формулам $(35)_2$ и (22), (38), (39) имеем

$$\big||\det X_{\pm}(h,\xi^{\pm})|^{-1}X_{\pm}(h,\xi^{\pm})^{\top}X_{\pm}(h,\xi^{\pm}) - \mathbb{I}_2\big| \le ch^2(1+|\xi^{\pm}|)^2,$$
$$\big|\nabla_\xi \tilde z_1^{\pm}(\xi^{\pm})\big| \le c(1+|\ln h|)(N_\Omega + N_\Lambda)(1+|\xi^{\pm}|)^{-2},$$

а значит, выражение (46) не превосходит

$$\begin{aligned} ch^3\Big|\sum_{\pm}\int_{\Xi^{\pm}}(1+|\xi^{\pm}|)^2\big|\nabla_\xi \tilde z_1^{\pm}(\xi^{\pm})\big|\big|\nabla_\xi \mathscr{R}^{\pm}(\xi^{\pm})\big|\,d\xi^{\pm}\Big| \\ \le ch^2(1+|\ln h|)\big(N_\Omega + N_\Lambda\big)\sum_{\pm}\|\nabla_\xi \mathscr{R}^{\pm}; L_2(\Xi^{\pm})\|. \end{aligned}$$

Теперь искомая оценка выводится при учете обратных замен $\xi^{\pm} \mapsto x$ в последних нормах.

Итак, найдены мажоранты для всех членов, составляющих правую часть равенства (42). Нетрудно усмотреть, что при $\mu = 1/2$ порядки малости в целом выравниваются, но наихудшим остается $h^{3/2}(1+|\ln h|)^2$. Вспоминая, что $\mathscr{R} = u - \mathscr{U}$, формулируем результат при учете предложения 1.

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям (4), (17), $(44)_{1,2}$ и (7) при $\mu = 1/2$. Тогда решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega(h);\Sigma)$ задачи (3) и его асимптотическое приближение (36) связаны неравенством*

$$\|d(u-\mathscr{U}); L_2(\Omega)\| + \|\nabla_x(u-\mathscr{U}); L_2(\Omega)\| \le Ch^{3/2}(1+|\ln h|)^2\{N_\Omega + \widetilde N_\Omega + N_\Lambda + \widetilde N_\Lambda\}, \tag{47}$$

в котором d — весовой множитель (33), N_Ω и $\widetilde N_\Omega$ — величины (9) и (43) при $\mu = 1/2$, а N_Λ и $\widetilde N_\Lambda$ определены согласно (18) и $(44)_3$. Постоянная C не зависит ни от параметра $h \in (0, h_0]$, ни от составляющих в разложениях (4) и $(44)_1$ правой части f.

Замечание 2. Если число μ из (7) и (26) оказалось меньше 1/2, то множитель при фигурной скобке в (47) становится равным $Ch^{\mu}(1+|\ln h|)$.

6. Асимптотика энергетического функционала. В силу формулы Грина энергетический функционал

$$E_h(u) = \int_{\Omega(h)}\{|\nabla_x u(h,x)|^2 - 2u(h,x)f(h,x)\}\,dx, \tag{48}$$

вычисленный на решении u задачи (3), удовлетворяет равенствам

$$E_h(u) = -\int\limits_{\Omega(h)} |\nabla_x u(h,x)|^2\,dx = -\int\limits_{\Omega(h)} u(h,x) f(h,x)\,dx. \tag{49}$$

Опираясь на оценку (47), заменим u на $\mathscr{U}$ в последнем интеграле из (49) и устраним из асимптотического решения (36) и его составляющих $(37)_1$ и $(37)_2$ пограничный слой $\tilde{z}_1^{\pm}$ и все срезающие функции. Совершаемая при этом ошибка не превышает точности асимптотического приближения. Убедимся в сказанном на примере пограничного слоя, заметив, что ввиду неравенства $\left|\tilde{z}_1^{\pm}(\xi^{\pm})\right| \le c|\xi^{\pm}|^{-1}$ (см. (22)) верна оценка

$$\left|\int\limits_{\Omega(h)} f\chi^{\pm} h\tilde{z}_1^{\pm}\,dx\right| \le h\left|\int\limits_{\Omega(h)} \chi^{\pm}(h+d_P)^{-1}|f|^2\,dx\right|^{1/2}\left|\int\limits_{\Omega(h)} \chi^{\pm}(h+d_P)\left|\tilde{z}_1^{\pm}\right|^2 dx\right|^{1/2}$$
$$\le ch^2(1+|\ln h|)^2\{N_\Omega + \widetilde{N}_\Omega + N_\Lambda + \widetilde{N}_\Lambda\}^2.$$

Здесь использованы формулы (4), (7), (17), (44) и (9), (18), (43) для правой части f. Остальные погрешности оцениваются при помощи тех же приемов, что и в предыдущем разделе. Итак,

$$E_h(u) = -\int\limits_{\Omega}\{v_0(x)+hv_1(x)\}f_\Omega(x)\,dx - \int\limits_{\Lambda(h)} w_0(\tau)f_\Lambda(\tau)\,dx + O(h^{3/2}(1+|\ln h|)^2)$$
$$= E_0(v_0) - h\int\limits_{\Omega} v_1(x)f_\Omega(x)\,dx - h\int\limits_{\Upsilon} H(\tau)w_0(\tau)f_\Lambda(\tau)\,d\tau + O(h^{3/2}(1+|\ln h|)^2). \tag{50}$$

Поскольку функции w_0 и v_1 удовлетворяют задачам (15), (16) и (24) соответственно, имеем

$$-\int\limits_{\Upsilon} w_0 H f_\Lambda\,d\tau$$
$$= \int\limits_{\Upsilon} w_0\partial_\tau H\partial_\tau w_0\,d\tau = -\int\limits_{\Upsilon} H(\tau)|\partial_\tau w_0(\tau)|^2 d\tau + \sum_{\pm} \pm v_0(P^{\pm})H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l),$$

$$-\int\limits_{\Omega} v_1 f_\Omega\,dx = \int\limits_{\Omega} v_1\Delta_x v_0\,dx = -\sum_{\pm} \pm H(\pm l)\partial_\tau w_0(\pm l)v_0(P^{\pm}).$$

Из-за присутствия δ-функций в краевом условии $(24)_2$ последнее равенство следует интерпретировать в рамках теории распределений; альтернативой являются интегрирование по частям в области $\{x\in\Omega : r_{\pm} > \delta\}$ и предельный переход при $\delta \to +0$. Осталось подставить полученные формулы в соотношение (50).

Предложение 2. *При ограничениях, наложенных в теореме* 1 *на правую часть* f *задачи* (3), *для энергетического функционала* (48) *справедливо асимптотическое разложение*

$$E_h(u) = E_0(v_0) - h\int\limits_{\Upsilon} H(\tau)|\partial_\tau w_0(\tau)|^2\,d\tau + \widetilde{E}_h(u), \tag{51}$$

в котором

$$|\widetilde{E}_h(u)| \le ch^{3/2}(1+|\ln h|)^2\{N_\Omega + \widetilde{N}_\Omega + N_\Lambda + \widetilde{N}_\Lambda\}^2,$$

постоянная c *не зависит от* h *и* f, *а выражение*

$$E_0(v_0) = \int\limits_{\Omega} \{|\nabla_x v_0(x)|^2 - 2v_0(x) f_\Omega(x)\}\, dx = -\int\limits_{\Omega} |\nabla_x v_0(x)|^2\, dx \tag{52}$$

является энергетическим функционалом для предельной задачи (5).

Замечание 3. В асимптотической формуле (51) отсутствуют какие-либо характеристики пограничного слоя. Эта формула сохраняется и в случае малых, размером $O(h)$, возмущений границы вблизи зон присоединения перемычки $\Lambda(h)$ к области Ω (ср. с сингулярными возмущениями границ, изученными в [6]). В частности, можно сгладить углы, образовавшиеся при пересечении границы $\partial\Omega$ криволинейной полоской (1).

Обращаем внимание на то, что ввиду разложения (10) вычитаемое в правой части формулы (51) есть не что иное, как главный член интеграла Дирихле от решения $u(h,x)$, суженного на перемычку. Аналогичный интеграл по области Ω фигурирует в главном члене (52) асимптотики (51). Формулу (51) можно переписать в виде

$$\frac{dE_h}{dh}(u)\bigg|_{h=0} = -\int\limits_{\Upsilon} H(\tau)|\partial_\tau w_0(\tau)|^2\, d\tau, \tag{53}$$

и в согласии с предшествующими исследованиями (см. [3, 4] и др.) выражение (53) следует интерпретировать как *топологическую производную* функционала (48) при образовании перемычки шириной $hH(\tau)$.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{x : x_1^2 + x_2^2 \in (1,4)\}$ — кольцо, а на его большей окружности $\Sigma = \mathbb{S}_2^1 := \{x : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ назначены условия Дирихле $(3)_3$. Правая часть

$$f(x) = x_2\{5 + 2(x_1^2+x_2^2)^2 - 7(x_1^2+x_2^2)\}$$

не зависит от параметра h и подобрана так, что решение предельной задачи (5),

$$v_0(x) = \frac{x_2}{24}\left\{13 - \frac{4}{x_1^2+x_2^2} - 15(x_1^2+x_2^2) + 7(x_1^2+x_2^2)^2 - (x_1^2+x_2^2)^3\right\},$$

обращается в нуль на меньшей окружности $\mathbb{S}_1^1$ вместе со своими первыми и вторыми производными. При учете такого свойства функции v_0 результаты [1] устанавливают, что энергетический функционал (48) в области

$$\widehat{\Omega}(h) = \{x : (x_1^2+x_2^2)^{1/2} \in (1 - hR(s), 2)\},$$

полученной гладким возмущением внутренней части границы (т. е. $R \in C^\infty(\mathbb{S}_1^1)$ и $R > 0$), отличается от предельного функционала (52) на величину $O(h^3)$. Кроме того, согласно [6, гл. 2] функционал (52) также увеличивается на $O(h^3)$ в случае сингулярного возмущения границы вблизи произвольной точки на $\mathbb{S}_1^1$, когда к внутренней окружности кольца Ω «приклеивается» бугорок с диаметром $h^{1/2}$ и с площадью $O(h)$ того же порядка, что и $\mathrm{mes}_2(\widehat{\Omega}(h) \setminus \Omega)$ или $\mathrm{mes}_2\,\Lambda(h)$. Тем не менее, при образовании прямолинейной перемычки $\Lambda(h) = \Lambda_h \setminus \overline{\Omega}$,

$$\Lambda_h = \{x : |x_1| < h/2, |x_2| < 3/2\},$$

приращение функционала имеет порядок h^1 (предложение 2), поскольку для рассматриваемого случая в результирующей задаче (15), (16)

$$l = 1, \quad \tau = x_2, \quad f_\Lambda(x_2) = x_2\{5 + 2x_2^4 - 7x_2^2\}, \quad v_0(P^\pm) = 0,$$

а значит,

$$w_0(x_2) = \frac{x_2}{420}\{223 - 350x_2^2 + 147x_2^4 - 20x_2^6\}$$

и топологическая производная (53) отлична от нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sokolowski J., Zolesio J.-P.* Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis. Berlin: Springer Verl., 1992.

2. *Delfour M. C., Zolésio J.-P.* Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus, and Optimization. Philadelphia: SIAM Ser. Adv. Design Control, 2001.

3. *Sokolowski J., Żochowski A.* On the topological derivative in shape optimization // SIAM J. Control Optimization. 1999. V. 37, N 4. P. 1251–1272.

4. *Nazarov S. A., Sokolowski J.* Asymptotic analysis of shape functionals // J. Math. Pures Appl. 2003. V. 82, N 2. P. 125–196.

5. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

6. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.

7. *Назаров С. А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. 1998. Т. 5. С. 112–183.

8. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Задача Дирихле в областях с тонкими перемычками // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 1. С. 161–179.

9. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures: An asymptotic analysis. Paris: Masson, 1988.

10. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multistructure // Asymptotic Anal. 1994. V. 8. P. 105–143.

11. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // **1.** Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. Вып. 18. С. 3–78; **2.** Там же. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. Вып. 20. С. 155–195.

12. *Nazarov S. A.* Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 320, N 11. P. 1419–1424.

13. *Аргатов И. И., Назаров С. А.* Асимптотический анализ на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 1. С. 3–36.

14. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999.

15. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

16. *Джавадов М. Г.* Асимптотика решения краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях // Дифференц. уравнения. 1968 Т. 4, № 10. С. 1901–1909.

17. *Назаров С. А.* Об особенностях градиента решения задачи Неймана в вершине тонкого конуса // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 1. С. 79–93.

18. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.

19. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.

20. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки) // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 77. С. 129–159.

Статья поступила 21 января 2003 г.

Назаров Сергей Александрович
ИПМаш РАН, В. О. Большой пр., 61, Санкт-Петербург 199178
`serna@snark.ipme.ru`

Соколовски Ян (Sokolowski Jan)
Institut Elie Cartan, Laboratoire de Mathematiques
Universite Henri Poincare Nancy I, BP 239, 54506 Vandoeuvre-Les-Nancy Cedex, France
`sokolows@iecn.u-nancy.fr`