Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 539.375

ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Е. М. Рудой

Аннотация: Рассматривается задача о равновесии пластины с трещиной. Равновесие пластины описывается бигармоническим уравнением. На берегах трещины задаются естественные краевые условия. Вводится возмущение области с целью получения инвариантного интеграла типа Черепанова — Райса, который вычисляет скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины. Получена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области, которая полезна при прогнозировании развития трещины (например, при исследовании локальной устойчивости трещины). Производная функционала энергии допускает представление в виде инвариантного интеграла по достаточно гладкому замкнутому контуру. Построены инвариантные интегралы для конкретных возмущений области: сдвиг всего разреза и локальный сдвиг вдоль разреза.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, трещина, негладкая область, производная функционала энергии, инвариантный интеграл.

1. Введение

В работе рассматривается бигармоническое уравнение в области с разрезом (трещиной), которое описывает равновесие упругой пластины. На берегах трещины задаются естественные краевые условия. Задача о равновесии пластины формулируется в виде минимизации функционала энергии в пространстве допустимых смещений, которая, в свою очередь, эквивалентна вариационному равенству.

Для получения инвариантных интегралов рассматривается общее возмущение области. Классическим примером инвариантного интеграла служит интеграл Черепанова — Райса, который определяет скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины и используется в механике разрушения при описании роста трещины.

В [1] был определен не зависящий от пути интеграл в собственно нелинейных задачах о нелинейно-упругом и неупругом деформировании материалов с трещинами. В [2] представлено математическое обоснование инвариантного интеграла для линейных задач. Результаты, связанные с дифференцированием функционалов энергии для линейных краевых задач в областях с негладкой границей, можно найти в [3, 4]. В работе [5] впервые получена формула для производной интеграла энергии для нелинейной задачи. При этом метод

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00124).

получения позволяет избежать вычисления краевых условий для материальной производной от решения. Затем были найдены формулы для производных функционалов энергии и соответствующие инвариантные интегралы для ряда случаев [6–9].

Опишем кратко содержание статьи. В разд. 2 исследуется общая постановка задачи о произвольном возмущении области с малым параметром. При этом не конкретизируется геометрия разреза. Сформулирована задача о равновесии пластины в невозмущенной области в виде минимизации функционала энергии; построена возмущенная область, в которой рассмотрена задача о равновесии пластины; выписаны вспомогательные утверждения и формулы.

В разд. 3 доказана теорема о сильной сходимости решений задач равновесия в возмущенной области к решению задачи равновесия в невозмущенной области в подходящем пространстве, характеризующая устойчивость решения. На основе этой теоремы выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области.

Разд. 4 посвящен инвариантным интегралам, которые строятся на основе формулы для производной функционала энергии из разд. 3. Получены общий вид инвариантного интеграла и достаточные условия его существования; на основе общей формулы построены конкретные примеры инвариантных интегралов при помощи возмущения всего разреза и возмущения вершины разреза. В последнем случае инвариантный интеграл является интегралом типа Черепанова — Райса.

2. Общее возмущение области с трещиной

2.1. Постановка невозмущенной задачи. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$ класса $C^{4,1}$. Пусть строго внутри области расположена трещина, которая задается кривой $\Gamma_0 \in C^{4,1}$, $\overline{\Gamma}_0 \subset \Omega$. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор единичной нормали к Γ_0. Считаем, что трещина имеет два берега Γ_0^+ и Γ_0^-, соответствующие положительному и отрицательному направлениям нормали ν. Тогда множество $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \overline{\Gamma}_0^+ \cup \overline{\Gamma}_0^-$ является границей области Ω_0. Считаем, что кривая Γ_0 может быть продолжена до пересечения с внешней границей $\partial\Omega$ под ненулевым углом.

Введем пространство Соболева

$$H^{2,0}(\Omega_0) = \left\{ u \in H^2(\Omega_0),\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega \right\},$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Введем следующее обозначение:

$$b(u, \bar{u}) = u_{x_1x_1}\bar{u}_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\bar{u}_{x_2x_2} + ku_{x_1x_1}\bar{u}_{x_2x_2} + ku_{x_2x_2}\bar{u}_{x_1x_1} + 2(1-k)u_{x_1x_2}\bar{u}_{x_1x_2},$$

где k — коэффициент Пуассона, $k = \text{const}$, $0 < k < \frac{1}{2}$.

Пусть внешняя нагрузка задана гладкой функцией $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Определим функционал энергии пластины:

$$\Pi(\Omega; \bar{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} b(\bar{u}, \bar{u}) - \int\limits_{\Omega_0} f\bar{u}.$$

Тогда задача о равновесии пластины формулируется как задача минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega; \bar{u})$ в пространстве допустимых смещений $H^{2,0}(\Omega_0)$, т. е. требуется найти такую функцию $u_0 \in H^{2,0}(\Omega_0)$, что

$$\Pi(\Omega; u_0) = \min_{\bar{u} \in H^{2,0}(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \bar{u}). \tag{1}$$

Так как функционал $\Pi(\Omega_0; \bar{u})$ выпуклый, коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу [10, 11], существует единственное решение задачи (1). Учитывая дифференцируемость функционала энергии, можно заключить, что задача (1) эквивалентна вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega_0} b(u_0, \bar{u}) = \int\limits_{\Omega_0} f\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in H^{2,0}(\Omega_0). \tag{2}$$

Заметим, что решение задачи (1) характеризуется следующими соотношениями:

$$\Delta^2 u_0 = f \quad \text{п. в. в } \Omega_0, \tag{3}$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega, \tag{4}$$

$$M(u_0) = 0,\ R(u_0) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0^{\pm}. \tag{5}$$

Операторы $M(v)$ и $R(v)$ определяют изгибающий момент и перерезывающую силу соответственно на обоих берегах трещины Γ_0 и задаются формулами

$$M(v) = k\Delta v + (1-k)\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}, \quad R(v) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta v + (1-k)\frac{\partial^3 v}{\partial \nu \partial \tau^2},$$

где $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ — касательный вектор к кривой Γ_0.

Соотношениям (5) на разрезе можно придать точный смысл в пространствах $\big(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\big)^*$ и $\big(H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)\big)^*$, где $\big(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)\big)^*$ и $\big(H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)\big)^*$ — двойственные пространства пространств $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ и $H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0)$ соответственно.

Замечание. Так как Γ_0 принадлежит классу $C^{4,1}$, решение задачи (1) обладает H^4-гладкостью внутри области Ω_0 вплоть до берегов разреза $\Gamma_0^{\pm}$, исключая вершины разреза [10, 12].

2.2. Постановка возмущенной задачи. Для малого параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon = \big(\Phi_\varepsilon^1(x), \Phi_\varepsilon^2(x)\big)$, которое задается гладкими функциями $\Phi^i \in C^2\big(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$ и $\Phi_0(x) = x$.

Зафиксируем ε и применим координатное преобразование

$$y = \Phi_\varepsilon(x) \tag{6}$$

для $x \in \Omega_0$, $x \in \partial\Omega$ и $x \in \Gamma_0$. В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Будем считать, что внешняя граница области остается неизменной, т. е. $\Phi_\varepsilon(\partial\Omega) = \partial\Omega$, кроме того, для всех допустимых ε выполнено $n(x) = n^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$ п. в. на $\partial\Omega$, где n^ε — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, записанная в новых координатах. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon$.

Так как $\Phi \in C^2\big(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$, справедливо разложение по ε:

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + o(\varepsilon)(x) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

где через вектор $V = (V_1, V_2)$ обозначены значения $\partial\Phi_\varepsilon/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$. Следовательно, из (7) вытекает, что якобиан преобразования (6) допускает представление

$$J_\varepsilon(x) \equiv \left| \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} \right| = 1 + \varepsilon \operatorname{div} V(x) + o(\varepsilon)(x) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^2.$$

Для достаточно малых ε якобиан $J_\varepsilon(x)$ строго положителен, поэтому координатное преобразование (6) задает взаимно однозначное соответствие между областями Ω_0 и Ω_ε. Пусть

$$x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y), \quad x \in \Omega_0,\ y \in \Omega_\varepsilon,$$

задает обратное преобразование к Φ, при этом справедливы включение $\Phi_\varepsilon^{-1} \in W^{2,\infty}(R^2)$ и тождество $\Phi_\varepsilon^{-1}(\overline{\Omega}_\varepsilon) = \overline{\Omega}_0$.

Далее будем считать, что кривую Γ_ε можно продолжить до пересечения с границей области Ω под ненулевым углом. При этом область Ω разбивается на две подобласти с границами класса $C^{4,1}$. Это необходимо, во-первых, для того чтобы мы могли почти всюду определить вектор нормали к Γ_ε, во-вторых, для справедливости формулы Грина.

Введем пространство Соболева

$$H^{2,0}(\Omega_\varepsilon) = \left\{ u \in H^2(\Omega_\varepsilon),\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega \right\}$$

и определим функционал энергии пластины, занимаемой область Ω_ε, по формуле

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; \bar{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(\bar{u}, \bar{u}) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\bar{u}.$$

Тогда задача о равновесии пластины в возмущенной области Ω_ε формулируется в виде минимизации функционала энергии в пространстве допустимых смещений $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$, т. е.

$$\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) = \min_{\bar{u} \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \bar{u}), \quad u^\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon). \tag{8}$$

В силу тех же соображений, что и для задачи (1), существует единственное решение $u^\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$, которое удовлетворяет вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(u^\varepsilon, \bar{u}) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon). \tag{9}$$

Таким образом, для каждого фиксированного $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ построено семейство задач (8), характеризующееся функцией Φ_ε. Заметим, что задача (1) является частным случаем задачи (8).

2.3. Вспомогательные утверждения и формулы. Введем обозначения для функциональной матрицы преобразования (6):

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{\varepsilon,1} & \Phi^2_{\varepsilon,1} \\ \Phi^1_{\varepsilon,2} & \Phi^2_{\varepsilon,2} \end{pmatrix}.$$

Здесь нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате.

Введем вспомогательные обозначения, которые позволят выписывать преобразования производных при отображении (6) в матричном виде.

Определим следующие векторы, соответствующие частным производным первого и второго порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^t, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^t,$$

где знак ^{t} означает транспонирование матрицы. Аналогично определяются векторы $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Введем функциональные матрицы A и $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \Phi^1_{\varepsilon,11} & \Phi^2_{\varepsilon,11} \\ \Phi^1_{\varepsilon,12} & \Phi^2_{\varepsilon,12} \\ \Phi^1_{\varepsilon,22} & \Phi^2_{\varepsilon,22} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \left(\Phi^1_{\varepsilon,1}\right)^2 & 2\Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,1} & \left(\Phi^2_{\varepsilon,1}\right)^2 \\ \Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^1_{\varepsilon,2} & \Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,2} + \Phi^1_{\varepsilon,2}\Phi^2_{\varepsilon,1} & \Phi^2_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,2} \\ \left(\Phi^1_{\varepsilon,2}\right)^2 & 2\Phi^1_{\varepsilon,2}\Phi^2_{\varepsilon,2} & \left(\Phi^2_{\varepsilon,2}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные выше обозначения, можно преобразование производных при отображении (6) записать в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y} + A\frac{\partial}{\partial y}. \tag{10}$$

В силу предполагаемой гладкости функции Φ_ε функциональные матрицы A и $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ допускают представление

$$\begin{gathered} A = \varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + o(\varepsilon), \\ \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = I + \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + o(\varepsilon) \quad \text{п. в. в } \Omega_0, \end{gathered} \tag{11}$$

где I — единичная матрица. Определитель матрицы $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ может быть разложен в ряд по ε:

$$j_\varepsilon(x) = \left|\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\right| = 1 + 3\varepsilon \operatorname{div} V(x) + o(\varepsilon)(x) \quad \text{п. в. в } \Omega_0.$$

Для достаточно малых ε определитель $j_\varepsilon(x)$ строго положителен, следовательно, существует обратная функциональная матрица $\psi = \left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^{-1}$. В силу (10) и того, что $J_\varepsilon(x) > 0$, $j_\varepsilon(x) > 0$, мы можем выписать обратное преобразование производных в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \Psi\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \psi\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial x}, \tag{12}$$

где $\Psi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{-1}$, $a = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)^{-1} A \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{-1}$. В силу формул (11) справедливо разложение в ряд по ε матриц a и ψ:

$$\begin{gathered} a = -\varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + o(\varepsilon), \\ \psi = \left(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\right)^{-1} = I - \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + o(\varepsilon) \text{ п. в. в } \Omega_0. \end{gathered} \tag{13}$$

Обозначим матрицы в формулах (13), стоящие при $-\varepsilon$, через $\bar{a}(V)$ и $\bar{\psi}(V)$ соответственно.

Из формулы (7) следует разложение в ряд по ε функции внешней нагрузки:

$$f_\varepsilon = f + \varepsilon(V\nabla f) + o(\varepsilon) \quad \text{п. в. в } \Omega_0.$$

Согласно взаимной однозначности отображения областей (6), дифференцируемости Φ_ε и сделанных предположений отображение (6) задает также взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{2,0}(\Omega_0)$ и $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$. Это означает, что из включения $v \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$ вытекает включение $v(\Phi_\varepsilon) \in H^{2,0}(\Omega_0)$ и, обратно, $v \in H^{2,0}(\Omega_0)$ влечет $v(\Phi_\varepsilon^{-1}) \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$.

Определим невырожденную постоянную матрицу K следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2(1-k) & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k — коэффициент Пуассона. Тогда билинейную форму $b(u, \bar{u})$ можно переписать в матричном виде:

$$b(u, \bar{u}) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t K \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}.$$

3. Формула для производной функционала энергии

3.1. Устойчивость решения при возмущении области. Применим координатное преобразование (6) к функциям и интегралам в (9). Используя формулы (12) для обратного преобразования производных $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, получим, что вариационное равенство (9) эквивалентно вариационному равенству

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\psi \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + a \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^t K \left(\psi \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) = \int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon \tilde{u}, \tag{14}$$

где $u_\varepsilon = u^\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$, $f_\varepsilon = f(\Phi_\varepsilon)$. Так как отображение (6) задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{2,0}(\Omega_0)$ и $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$, то вариационное равенство (14) справедливо для всех $\tilde{u} \in H^{2,0}(\Omega_0)$.

Таким образом, доказана

Лемма 1. *При достаточно малых ε решение $u^\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$ возмущенной задачи* (8), *отображенное на исходную область Ω_0 с помощью преобразования независимых переменных* (6), *является единственным решением $u_\varepsilon \in H^{2,0}(\Omega_0)$ вариационного равенства* (14).

Используя лемму 1, можно доказать, что решение u^ε задачи равновесия пластины в возмущенной области сходится к решению u_0 задачи равновесия в невозмущенной области в подходящем смысле. Заметим, что билинейная форма $\int\limits_{\Omega_0} b(u, \bar{u})$ является скалярным произведением в пространстве $H^{2,0}(\Omega_0)$ [10, 11]. Справедлива следующая теорема, характеризующая устойчивость решения задачи равновесия пластины при возмущении области.

Теорема 1. *Пусть u^ε — решение задачи* (8), $u_\varepsilon = u^\varepsilon(\Phi_\varepsilon)$, *а u_0 — решение задачи* (1). *Тогда*

$$u_\varepsilon \to u_0 \quad \textit{сильно в } H^{2,0}(\Omega_0)$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Функции u_0 и u_ε удовлетворяют вариационным равенствам (2) и (14) соответственно. Подставим формулы (13) в равенство (14).

Получим, что оператор в левой части (14) допускает представление

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon\left(\psi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t K\left(\psi\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\int\limits_{\Omega_0}(b(u,v)+\varepsilon A_1(V;u,v)+o(\varepsilon)r_1(u,v)) \tag{15}$$

с билинейной формой

$$A_1(V;u,v)=b(u,v)\operatorname{div}V-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t(K\bar{\psi}(V)+\bar{\psi}^t(V)K)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t K\bar{a}(V)\frac{\partial v}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t\bar{a}^t(V)K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

и некоторой непрерывной формой r_1. Оператор в правой части равенства (14) можно представить в виде

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon u=\int\limits_{\Omega_0}(fu+\varepsilon u\operatorname{div}(Vf)+o(\varepsilon)r_2(u)), \tag{16}$$

где r_2 — непрерывная форма.

Подставим $\tilde{u}=u_\varepsilon$ в равенство (14) в качестве пробной функции и воспользуемся разложением (15) и (16) по ε. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\Omega_0} b(u_\varepsilon,u_\varepsilon)=\int\limits_{\Omega}(fu_\varepsilon+\varepsilon u_\varepsilon\operatorname{div}(Vf)-\varepsilon A_1(V;u_\varepsilon,u_\varepsilon)+o(\varepsilon)r_2(u_\varepsilon)),$$

где r_4 — некоторая непрерывная форма. После применения «неравенства Коши с ε» приходим к равномерной по ε оценке

$$\|u_\varepsilon\|_{H^{2,0}(\Omega_0)}\le c, \tag{17}$$

где $c=\mathrm{const}$.

Возьмем теперь $\bar{u}=u_\varepsilon-u_0$, $\tilde{u}=u_0-u_\varepsilon$ и подставим в (2) и (14) соответственно. С учетом разложений (15) и (16) по ε будет

$$\int\limits_{\Omega_0} b(u_\varepsilon-u_0,u_\varepsilon-u_0)=\int\limits_{\Omega_0}\varepsilon(A_1(V;u_\varepsilon,u_\varepsilon-u_0)+(u_\varepsilon-u_0)\operatorname{div}(Vf))+o(\varepsilon)r_5(u_\varepsilon,u_0)$$

с некоторой непрерывной формой r_5. Применяя здесь неравенство Коши и учитывая (17) и непрерывность формы A_1, получим оценку

$$\|u_\varepsilon-u_0\|_{H^{2,0}(\Omega_0)}\le c\varepsilon,$$

где константа c не зависит от ε. Теорема доказана.

3.2. Вывод формулы для производной функционала энергии. Для отыскания формулы для производной функционала энергии пластины по параметру возмущения области будем использовать вариационные свойства решения задачи равновесия. Для начала введем обозначение

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0;u)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon\left(\psi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t K\left(\psi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon u.$$

Используя формулы (15) и (16), можно получить асимптотическое разложение по ε для $\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u)$:

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u) = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2}(b(u,u) + \varepsilon A_1(V; u, u)) - fu - \varepsilon u \operatorname{div}(Vf) \right) + o(\varepsilon) r_6(u)$$

с некоторой непрерывной формой r_6.

Далее, так как имеется взаимно однозначное соответствие между пространствами $H^{2,0}(\Omega_0)$ и $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$, справедливо равенство

$$\min_{\bar u \in H^{2,0}(\Omega_0)} \Pi_\varepsilon(\Omega_0; \bar u) = \min_{\bar u \in H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon; \bar u) \tag{18}$$

для всех допустимых ε.

Для того чтобы вычислить производную функционала энергии по параметру возмущения области, необходимо доказать, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \tag{19}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Итак, в силу (18) и взаимной однозначности соответствия между пространствами $H^{2,0}(\Omega_\varepsilon)$ и $H^{2,0}(\Omega_0)$ имеем

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \le \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon}. \tag{20}$$

В то же время справедливы соотношения

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \ge \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_\varepsilon)}{\varepsilon}$$

и поэтому верно неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} \ge \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{21}$$

Сейчас покажем, что правые части (20) и (21) совпадают, откуда будет следовать существование предела (19).

Сначала найдем правую часть (20). В силу ограниченности билинейной формы $A_1(V; u, v)$ получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_0) - \Pi(\Omega_0; u_0)}{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} A_1(V; u_0, u_0) - u_0 \operatorname{div}(Vf) \right).$$

Далее, найдем правую часть (21). Ввиду леммы 1 и ограниченности билинейной формы $A_1(V; u, v)$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0; u_\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; u_\varepsilon)}{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} A_1(V; u_0, u_0) - u_0 \operatorname{div}(Vf) \right).$$

Правые части (20) и (21) совпадают. Следовательно, предел (19) существует.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 2. *Для каждого допустимого возмущения Φ_ε существует первая производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon)$ по параметру возмущения ε при $\varepsilon = 0$, которая задается формулой*

$$\Pi'(\Phi_0) = \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} A_1(V; u_0, u_0) - u_0 \operatorname{div}(Vf)\right), \tag{22}$$

где u_0 — решение невозмущенной задачи (1), *$A_1(V; u_0, u_0)$ определяется следующим образом:*

$$A_1(V; u_0, u_0) = b(u_0, u_0) \operatorname{div} V \\ - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^t (K\bar{\psi}(V) + \bar{\psi}^t(V)K) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^t K\bar{a}(V) \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Замечание. Если два разных возмущения $\Phi_{\varepsilon 1}$ и $\Phi_{\varepsilon 2}$ переводят область Ω_0 в одну и ту же возмущенную область Ω_ε при всех допустимых ε, то $\Pi'(\Phi_{01}) = \Pi'(\Phi_{02})$.

Действительно, решение u^ε возмущенной задачи (8) и энергия $\Phi(\Omega_\varepsilon; u^\varepsilon)$ не зависят от выбора функции возмущения Φ, а зависят лишь от возмущенной области Ω_ε. Поэтому и производная (22) тоже не будет зависеть от выбора функции возмущения.

4. Инвариантные интегралы

4.1. Общий вид инвариантного интеграла. Используя обозначения для A_1 и значения матриц $\bar{\psi}(V)$ и $\bar{a}(V)$, перепишем (22) в эквивалентном виде:

$$\Pi'(\Phi_0) = \int\limits_{\Omega_0} \bigg(\frac{1}{2} b(u_0, u_0) \operatorname{div} V - u_0 \operatorname{div}(Vf) - 2\big(V_{1,1} u_{0,11}^2 + k \operatorname{div} V u_{0,11} u_{0,22} \\ + (1-k) \operatorname{div} V u_{0,12}^2 + V_{2,2} u_{0,22}^2 + (V_{1,2} + V_{2,1}) u_{0,12}(u_{0,11} + u_{0,22})\big) \\ - \big((u_{0,11} + k u_{0,22})(V_{1,11} u_{0,1} + V_{2,11} u_{0,2}) + (k u_{0,11} + u_{0,22})(V_{1,22} u_{0,1} + V_{2,22} u_{0,2}) \\ + 2(1-k)(V_{1,12} u_{0,1} + V_{2,12} u_{0,2}) u_{0,12}\big)\bigg). \tag{23}$$

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂D такова, что $\operatorname{meas} D > 0$, $\overline{D} \subseteq \overline{\Omega}_0$, и решение u_0 задачи (1) имеет H^4-гладкость в области D вплоть до границы ∂D. Такая область существует [12]. При этих предположениях интеграл из формулы (23) можно дифференцировать по частям в области D. Обозначим через $q = (q_1, q_2)$ единичный вектор внешней нормали к ∂D. Тогда функционал (23) можно представить в виде суммы интегралов $\Pi'(\Phi_0) = I(V) + I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = -\int\limits_D (\Delta^2 u_0 - f)(V\nabla u_0), \quad I_2 = \int\limits_{\Omega_0 \setminus D} f(V\nabla u_0),$$

$$I_3 = \int\limits_{\Omega_0 \setminus D} \frac{1}{2}\bigg(\operatorname{div} V b(u_0, u_0) - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^t (K\bar{\psi}(V) + \bar{\psi}^t(V)K) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ - 2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)^t K\bar{a}(V) \frac{\partial u_0}{\partial x}\bigg),$$

$$I(V)=\int\limits_{\partial D}\biggl(\frac{1}{2}(V_2q_2-V_1q_1)\bigl(u_{0,11}^2-u_{0,22}^2\bigr)-(1-k)u_{0,12}^2(Vq)$$
$$-u_{0,12}(V_2q_1M_1(u_0)+V_1q_2M_2(u_0))-M_1(u_0)\biggl(\frac{\partial V}{\partial x_1}\nabla u_0\biggr)q_1-M_2(u_0)\biggl(\frac{\partial V}{\partial x_2}\nabla u_0\biggr)q_2$$
$$-2(1-k)u_{0,12}(V_{1,2}u_{0,1}q_1+V_{2,1}u_{0,2}q_2)+(M_{1,1}(u_0)q_1+M_{2,2}(u_0)q_2)(V\nabla u_0)$$
$$+2(1-k)(V_1u_{0,1}u_{0,112}q_2+V_2u_{0,2}u_{0,122}q_2)\biggr). \quad (24)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M_1(u)=u_{,11}+ku_{,22},\quad M_2(u)=ku_{,11}+u_{,22}.$$

Дальнейшая цель — представить производную функционала энергии только интегралом по границе (24). В силу уравнения (3) интеграл в I_1 равен нулю. Найдем достаточные условия, когда $I_2=I_3=0$. Очевидно, что эти интегралы обращаются в нуль, когда $V=0$ п. в. в $\Omega_0\setminus\overline{D}$.

Пусть $f=0$ в $\Omega_0\setminus\overline{D}$, тогда $I_2=0$, а условия

$$\xi^t(K\operatorname{div}V-K\bar{\psi}(V)-\bar{\psi}^t(V)K)\xi=0,\quad \xi^tK\bar{a}(V)\zeta=0\quad \text{п. в. в } \Omega_0\setminus\overline{D}, \quad (25)$$

выполненные для всех $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, обеспечивают равенство нулю интеграла I_3.

Соотношения (25) выполняются, например, для вектора $V=(-bx_2+c_1,bx_1+c_2)$ с произвольными постоянными b, c_1, c_2 из $\mathbb{R}^2$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы* 2 *подобласти $D\subseteq\Omega_0$ с достаточно гладкой границей ∂D удовлетворяют следующим предположениям:*

(а) *решение u_0 задачи* (1) *принадлежит классу H^4 в D;*

(б) *в области $\Omega_0\setminus D$ выполнено $V=0$ или $f=0$;*

(в) *вектор-функция V такова, что выполнены соотношения* (25) *п. в. в $\Omega_0\setminus\overline{D}$.*

Тогда первая производная функционала энергии $\Pi'(\Phi_0)$ представляется инвариантным интегралом $I(V)$ вида (24) *по границам ∂D.*

В следующих пунктах на основе формулы (24) построены инвариантные интегралы для конкретных примеров возмущения области.

4.2. Возмущение всего разреза. Выберем срезающую функцию $\theta\in W^{2,\infty}(R^2)$, финитную в области Ω и равную 1 в некоторой окрестности $\overline{\mathscr{O}}(\Gamma_0)\subset\mathbb{R}^2$ всего разреза Γ_0. При этом предполагаем, что $\Gamma_0\subset\overline{\mathscr{O}}(\Gamma_0)\subset\operatorname{supp}\theta\subset\Omega$. Для выбранного вектора $p=(p_1,p_2)$ рассмотрим сдвиг разреза в направлении p при помощи возмущения $\Phi_\varepsilon=I+\varepsilon p\theta$. Применим координатное преобразование (6). В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$, которая в силу финитности θ совпадает с Ω, возмущенный разрез Γ_ε и возмущенную область с разрезом $\Omega\setminus\overline{\Gamma}_\varepsilon$. Все предположения на функцию Φ_ε, сформулированные в п. 2.1, выполнены. Будем считать, что $f\equiv0$ п. в. в окрестности $\overline{\mathscr{O}}(\Gamma_0)$. Тогда можно воспользоваться теоремой 3 с $\overline{D}=\operatorname{supp}\theta\setminus\mathscr{O}(\Gamma_0)$. Действительно, решение u_0 задачи (1) обладает дополнительной H^4-гладкостью вне окрестности вершин $\partial\Gamma_0$ разреза Γ_0 и, следовательно, в $\overline{D}$. Поэтому условие (а) теоремы 3 выполнено. Вне $\operatorname{supp}\theta$ имеем $V\equiv0$, в $\overline{\mathscr{O}}(\Gamma_0)$ будет $f\equiv0$, и, значит, условие (б) тоже выполняется. В окрестности $\overline{\mathscr{O}}(\Gamma_0)$ функция θ тождественно равна единице, тем самым поле $V\equiv p$ постоянно, следовательно, условие (25) выполняется.

Таким образом, приходим к инвариантному интегралу вида (24) по границе ∂D, где $\partial D = \partial(\operatorname{supp}\theta) \cup \partial\mathscr{O}(\Gamma_0)$. Но интеграл по $\partial(\operatorname{supp}\theta)$ равен нулю в силу предположения гладкости отображения Φ_ε и того, что $V \equiv 0$ вне $\operatorname{supp}\theta$. С другой стороны, $\theta \equiv 1$ в окрестности $\mathscr{O}(\Gamma_0)$, поэтому для $i, j = 1, 2$ справедливы соотношения

$$V_{i,j} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\mathscr{O}(\Gamma_0).$$

Согласно замечанию к теореме 2 производная функционала энергии $\frac{d\Pi(I+\varepsilon\theta)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ не зависит от выбора срезающей функции θ, значит, и от $\partial\mathscr{O}(\Gamma_0)$. Поэтому получаем инвариантный интеграл

$$I(p\theta) = \int\limits_{\partial D} \Big(\frac{1}{2}(p_2q_2 - p_1q_1)\big(u_{0,11}^2 - u_{0,22}^2\big) \\ - (1-k)u_{0,12}^2(pq) - u_{0,12}(p_2q_1M_1(u_0) + p_1q_2M_2(u_0)) \\ - (M_{1,1}(u_0)q_1 + M_{2,2}(u_0)q_2)\frac{\partial u_0}{\partial p} + 2(1-k)(p_1u_{0,1}u_{0,112}q_2 + p_2u_{0,2}u_{0,122}q_1)\Big)$$

по любому достаточно гладкому замкнутому контуру ∂D вокруг всего разреза Γ_0 из окрестности $\mathscr{O}(\Gamma_0)$, где $f \equiv 0$, и для произвольного вектора p.

4.3. Возмущение вершины разреза. Рассмотрим возмущение одной из вершин разреза. Пусть C^1, C^2 — вершины разреза Γ_0. Выберем срезающую функцию $\theta \in W^{2,\infty}(R^2)$ в окрестности вершины C^1. Предположим, что θ финитна и $\theta \equiv 1$ в некоторой окрестности $\overline{\mathscr{O}}(C^1)$ вершины C^1. Также предполагаем, что $C^1 \in \overline{\mathscr{O}}(C^1) \subset \operatorname{supp}\theta \subset \Omega$ и $C^2 \cap \operatorname{supp}\theta = \varnothing$.

Пусть $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ — касательный вектор к разрезу Γ_0, т. е. $\nu\tau = 0$. Применим возмущение сдвига $\Phi_\varepsilon = I + \varepsilon\tau\theta$ в направлении τ. В силу сделанных предположений можно применить теорему 3 с $D = \operatorname{supp}\theta \setminus \overline{\mathscr{O}}(C^1)$, пользуясь теми же рассуждениями, что и в предыдущем пункте. При этом граница ∂D будет состоять из трех частей: $\partial D_1 = \partial(\operatorname{supp}\theta)$, $\partial D_2 = (\operatorname{supp}\theta \setminus \mathscr{O}(C^1)) \cap \Gamma_0$, $\partial D_3 = \partial\mathscr{O}(C^1)$. Также будем предполагать, что в окрестности $\overline{\mathscr{O}}(C^1)$ выполняется $f \equiv 0$.

Часть интеграла из формулы (24) по границе ∂D_1 равна нулю, так как $V \equiv 0$ на ∂D_1. В то же время подынтегральное выражение в $I(\tau\theta)$ по границе ∂D_2 ограничено в силу дополнительной локальной гладкости решения u_0 задачи (1). Поэтому можно перейти к пределу в $I(\tau\theta)$ при $\operatorname{meas}(\partial D_2) \to 0$, который равен нулю. В результате останется интеграл только по части границы ∂D_3, который в силу замечания к теореме 2 не зависит от выбора $\mathscr{O}(C^1)$.

Таким образом, имеем инвариантный интеграл при возмущении вершины трещины:

$$I(\tau\theta) = \int\limits_{\partial D} \Big(\frac{1}{2}(\tau_2q_2 - \tau_1q_1)\big(u_{0,11}^2 - u_{0,22}^2\big) - (1-k)u_{0,12}^2(\tau q) \\ - u_{0,12}(\tau_2q_1M_1(u_0) + \tau_1q_2M_2(u_0)) - (M_{1,1}(u_0)q_1 + M_{2,2}(u_0)q_2)\frac{\partial u_0}{\partial \tau} \\ + 2(1-k)(\tau_1u_{0,1}u_{0,112}q_2 + \tau_2u_{0,2}u_{0,122}q_1)\Big) \tag{26}$$

по любому достаточно гладкому замкнутому контуру ∂D вокруг вершины трещины при $f \equiv 0$ в окрестности $\overline{\mathscr{O}}(C^1)$.

Формула (26) является интегралом типа Черепанова — Райса, который не зависит от пути интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. *Назаров С. А., Полякова О. Р.* Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 104–119.
3. *Grisvard P.* Singularities in boundary value problems. Berlin: Springer-Verl.; Paris: Masson, 1992.
4. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. С. 79–129.
5. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* The Griffith formula and the Rice-Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // European J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.
6. *Ковтуненко В. А.* Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 1. С. 109–123.
7. *Соколовски Я., Хлуднев А. М.* О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.
8. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.
9. *Рудой Е. М.* Асимптотика интеграла энергии при возмущении границы // Динамика сплошных сред. 2000. № 116. С. 97–103.
10. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. (Adv. in Fracture Mech.; 6).
11. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Наука, 1991.
12. *Browder F. E.* On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9, N 3. P. 351–361.

Статья поступила 7 августа 2003 г.

Рудой Евгений Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
rem@hydro.nsc.ru