Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.552.7

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОДНОГО РАДИКАЛА ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ПОЛЯМИ

А. И. Корнев, Т. В. Павлова

Аннотация: Изучаются полные и редуцированные (в смысле Л. М. Мартынова) ассоциативные кольца. Доказывается необходимый и достаточный признак полноты полугруппового кольца, вычисляется наибольшее полное подкольцо (оно является идеалом) группового кольца над конечными простыми полями, а также характеризуются редуцированные групповые кольца конечных групп над конечными простыми полями.

Ключевые слова: групповое кольцо, полугрупповое кольцо, полное кольцо, радикал Куроша — Амицура.

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. Оказывается, к этим понятиям возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Это обстоятельство позволило Л. М. Мартынову определить их аналоги в общей универсально-алгебраической ситуации [1]. Проблемы, которые при этом возникают, интересны как для универсальных, так и для «классических» алгебр (групп, полугрупп, модулей, колец и др.). Понятия полноты и редуцированности изучались для модулей в [2–4], для линейных алгебр в [5], для полугрупп в [6, 7], для колец в [8].

Следуя [9], определение полного ассоциативного кольца можно сформулировать следующим образом: ассоциативное кольцо называется *полным,* если оно не имеет ненулевых гомоморфизмов на кольца из атомов решетки многообразий ассоциативных колец. Напомним, последние исчерпываются следующими сериями многообразий: многообразиями $\mathbf{Z}_p$, задаваемыми тождествами $xy = 0$, $px = 0$, и многообразиями $\mathbf{F}_p$ с тождествами $px = 0$, $x^p - x = 0$ по всем простым p. Ассоциативное кольцо называется *редуцированным*, если оно не содержит ненулевых полных подколец. Условимся в дальнейшем под кольцом понимать ассоциативное кольцо.

Как заметил Л. М. Мартынов в [10], в любом кольце R существует наибольшее полное подкольцо $C(R)$, которое является идеалом, и отображение $R \to C(R)$ в абстрактном классе колец будет идемпотентным радикалом в смысле Куроша [11].

Хорошо известно, что атомы решетки многообразий групп исчерпываются серией многообразий $\mathbf{A}_p = [x^p = e, xy = yx]$ по всем простым p. Согласно [9] группа G называется $\mathbf{A}_p$-полной, если из нее нет неединичных гомоморфизмов на группы из $\mathbf{A}_p$. Легко понять, что группа G является $\mathbf{A}_p$-полной тогда и только тогда, когда $[G, G]G^p = G$. Как было показано Л. М. Мартыновым, во всякой группе существует наибольшая $\mathbf{A}_p$-полная подгруппа, являющаяся нормальным делителем.

Основные результаты статьи составляют следующие теоремы.

Теорема 1. *Для кольца R с единицей и полугруппы S выполняются следующие условия:*

1) если аддитивная группа R^+ кольца R делимая, то полугрупповое кольцо RS является полным.

2) если R^+ не является делимой группой, то кольцо RS будет полным тогда и только тогда, когда будет полным кольцо R и $S^2 = S$.

Теорема 2. *Пусть H — наибольшая $\mathbf{A}_p$-полная подгруппа группы $[G,G]G^{(p-1)}$. Для группового кольца KG, где $K \cong GF(p)$, наибольшее полное подкольцо равно wH (пополняющий идеал подгруппы H).*

Теорема 3. *Для группового кольца KG, где $K \cong GF(p)$, G — конечная группа, следующие условия эквивалентны:*

1) KG редуцировано;

2) $KG/J(KG) \cong \prod\limits_{i\in I} K_i$, где $K_i \cong K$;

3) $[G,G]G^{(p-1)}$ является p-группой.

Некоторые результаты работы анонсированы в [12].

Пусть $\mathbf{Z}_p(R) = pR + R^2$, $\mathbf{F}_p(R) = pR + (r^p - r \mid r \in R)$. Кольцо R является $\mathbf{Z}_p$-полным, если $\mathbf{Z}_p(R) = R$, и $\mathbf{F}_p$-полным, если $\mathbf{F}_p(R) = R$. Кольцо R полное, если и только если оно $\mathbf{Z}_p$-полное и $\mathbf{F}_p$-полное.

Если RS — полугрупповое кольцо, то легко проверяется, что множество $R\bar{0} = \{r\bar{0} \mid r \in R,\ \bar{0}$ — нуль в $\overline{S}\}$ будет идеалом в $R\overline{S}$ и $RS/R\bar{0}$ называется сжатым полугрупповым кольцом.

Будем использовать следующие обозначения: R^+ — аддитивная группа кольца R; радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$; если подгруппа H группы G нормальна в G, то $H \lhd G$. Конечное поле Галуа $GF(p^m)$ будем обозначать через K, через $\mathrm{Hom}(G, K^*)$ обозначается множество всех характеров χ конечной группы G в поле K, т. е. гомоморфизмов группы G в мультипликативную группу K^* поля K. Далее,

$$H(G) = \{g \in G \mid \forall\chi \in \mathrm{Hom}(G,K^*),\ \chi(g) = 1\} = \bigcap_{\chi\in\mathrm{Hom}(G,K^*)} \ker\chi.$$

Если $r = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g g$ принадлежит KG, то $\mathrm{supp}(r) = \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$. Если H — подгруппа группы G, то wH — правый идеал группового кольца KG, порожденный элементами вида $(e - h)$, где $h \in H$, причем если $H \lhd G$, то wH будет идеалом кольца KG [13]. Кроме того,

$$w_g H = \{r \in KG \mid \mathrm{supp}(r) \subset Hg\}, \quad w_g^0 H = \Big\{r \in w_g H \mid \sum_{g\in\mathrm{supp}(r)} \alpha_g = 0\Big\}.$$

Если γ — произвольный ординал и R — кольцо, то через R^γ будем обозначать соответствующую степень γ кольца R ($R^1 = R$, $R^{i+1} = R \cdot R^i$, и если β — предельный ординал, то $R^\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} R^\alpha$). Для правого идеала A кольца KG через AG будем обозначать правый идеал

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i g_i \mid r_i \in A,\ g_i \in G,\ n \in \mathbf{N}\right\}$$

кольца KG.

Легко проверяется справедливость следующих лемм.

Лемма 1. *Если аддитивная группа кольца делимая, то кольцо полное.*

Лемма 2. *Пусть $\varphi\colon R_1 \to R_2$ — сюръективный гомоморфизм колец с единицей, $\psi\colon S_1 \to S_2$ — сюръективный гомоморфизм полугрупп. Тогда отображение $\xi\colon R_1S_1 \to R_2S_2$, где $\xi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i s_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(r_i)\psi(s_i)$, будет сюръективным гомоморфизмом полугрупповых колец.*

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что $(RS)^+ \cong \bigoplus\limits_{s\in S} R^+$. Если группа R^+ делимая, то группа $(RS)^+$ также делимая как прямая сумма делимых групп. По лемме 1 кольцо RS полное.

2. По лемме 2 отображение $\varphi\colon RS \to R$, где $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i s_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, будет гомоморфизмом кольца RS на кольцо R. Кольцо R полное как гомоморфный образ полного кольца (см. [9]). Покажем, что $S^2 = S$. Если $S^2 \neq S$, то $\overline{S} = S/S^2$ — ненулевая полугруппа с нулевым умножением. Для сюръективного гомоморфизма полугруппы S на полугруппу $\overline{S}$ по лемме 2 существует сюръективный гомоморфизм $\alpha\colon RS \to R\overline{S}$. Пусть β есть естественный гомоморфизм кольца $R\overline{S}$ на сжатое полугрупповое кольцо $\overline{R} = R\overline{S}/R\bar{0}$. Кольцо $\overline{R}$ — ненулевое кольцо с нулевым умножением, причем $\overline{R}^+ \cong \bigoplus\limits_{i\in I} R^+$. Так как R^+ не является делимой группой, то для некоторого простого p выполняется $(pR)^+ \neq R^+$ и, следовательно, $(p\overline{R})^+ \neq \overline{R}^+$. Очевидно, что ненулевое кольцо $R_1 = \overline{R}/p\overline{R}$ принадлежит многообразию $\mathbf{Z}_p$, т. е. в случае, когда $S^2 \neq S$, существует гомоморфизм φ кольца RS на ненулевое кольцо R_1 из многообразия $\mathbf{Z}_p$, являющееся композицией гомоморфизмов α, β и γ (где γ — естественный гомоморфизм кольца $\overline{R}$ на кольцо R_1).

Возьмем произвольный элемент a из RS, т. е. $a = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i s_i$, где r_i из R, s_i из S по всем i. Кольцо R полное, следовательно, по любому простому p элементы r_i можно представить в виде $r_i = ph_i + \sum\limits_{j=1}^{m} k_j l_j$, где h_i, k_j, l_j из R по всем i, j. Тогда

$$a = \sum_{i=1}^{n}\left(ph_i + \sum_{j=1}^{m} k_j l_j\right)s_i = p\left(\sum_{i=1}^{n} h_i s_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} k_j l_j\right)s_i.$$

Так как $S^2 = S$, для каждого s_i найдутся такие s_i', s_i'' из S, что $s_i = s_i' \cdot s_i''$. Получаем, что

$$a = p\left(\sum_{i=1}^{n} h_i s_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{m} k_j l_j\right)s_i'\right]s_i''.$$

Элемент s_i'' принадлежит RS, так как R — кольцо с единицей, следовательно, a лежит в $\mathbf{Z}_p(RS)$, т. е. кольцо RS будет $\mathbf{Z}_p$-полным.

Покажем, что кольцо RS является $\mathbf{F}_p$-полным. Единицу $\mathbf{F}_p$-полного кольца R можно представить в виде

$$1 = pr + \sum_{i=1}^{n} r_i\bigl(x_i^p - x_i\bigr)h_i,$$

где r, r_i, x_i, h_i из R по всем i. Тогда для произвольного s из S выполняется

$$s = 1 \cdot s = prs + \sum_{i=1}^{n} r_i\bigl(x_i^p - x_i\bigr)h_i s.$$

Поскольку $S^2 = S$, найдутся s_1, s_2, s_3 из S такие, что $s = s_1s_2s_3$. Получаем, что

$$s = prs + \sum_{i=1}^{n}(r_is_1)\big((x_i^p - x_i)s_2\big)(h_is_3)$$

принадлежит $\mathbf{F}_p(RS)$, так как для каждого i элемент

$$\big(x_i^p - x_i\big)s_2 = x_i^p s_2 - x_is_2 + x_i^p s_2^p - x_i^p s_2 = ((x_is)^p - (x_is)) + x_i^p\big(s_2^p - s_2\big)$$

лежит в $\mathbf{F}_p(RS)$. Тогда и всякий x из RS, где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i$, лежит в $\mathbf{F}_p(RS)$, т. е. $RS = \mathbf{F}_p(RS)$. Кольцо RS полное. $\square$

Лемма 3. *Для произвольной группы G выполняются условия:*

1) *$H(G_1 \times G_2) = H(G_1) \times H(G_2)$;*

2) *Если $A \triangleleft G$, $A \le H(G) \le G$, то $H(G/A) = H(G)/A$. В частности, $H(G/H(G)) = \{\bar{e}\}$;*

3) *$H(G) = [G,G]G^{(p^m-1)}$, где $G^{(p^m-1)} = \langle x^{p^m-1} \mid x \in G\rangle$.*

Доказательство. 1. Для всякого гомоморфизма $\alpha : G_1 \to K^*$ отображение $\varphi_\alpha : G_1 \times G_2 \to K^*$, $\varphi_\alpha((x,y)) = \alpha(x)$, также будет гомоморфизмом. Если (x,y) из $H(G_1 \times G_2)$, то $\varphi_\alpha((x,y)) = 1$, тогда и $\varphi_\alpha((x,y)) = \alpha(x) = 1$, т. е. x лежит в $H(G_1)$. Аналогично если (x,y) из $H(G_1 \times G_2)$, то y лежит в $H(G_2)$, т. е. $H(G_1 \times G_2) \subseteq H(G_1) \times H(G_2)$.

С другой стороны, если x из $H(G_1)$, y из $H(G_2)$, то очевидно, что для всякого гомоморфизма $\varphi : G_1 \times G_2 \to K^*$ выполняются $\varphi((x,e)) = 1$ и $\varphi((e,y)) = 1$, тогда $\varphi((x,y)) = \varphi((x,e)(e,y)) = \varphi((x,e))\varphi((e,y)) = 1 \cdot 1 = 1$, т. е. (x,y) из $H(G_1 \times G_2)$ и $H(G_1) \times H(G_2) \subseteq H(G_1 \times G_2)$.

2. Пусть x из $H(G)$, тогда xA из $H(G)/A$. Для всякого гомоморфизма $\bar{\alpha} : G/A \to K^*$ отображение $\alpha : G \to K^*$, где $\alpha(g) = \bar{\alpha}(gA)$, будет гомоморфизмом. Если $\bar{\alpha}(xA) \ne 1$, то $\alpha(x) \ne 1$, что противоречит выбору x.

Таким образом, $H(G)/A \subseteq H(G/A)$. Обратно, для любого гомоморфизма $\alpha : G \to K^*$ рассмотрим отображение $\bar{\alpha} : G/A \to K^*$, где $\bar{\alpha}(gA) = \alpha(g)$. Отображение $\bar{\alpha}$ определено корректно: если $g_1A = g_2A$, т. е. существует a из A такой, что $g_1 = g_2a$, то

$$\bar{\alpha}(g_1A) = \alpha(g_1) = \alpha(g_2a) = \alpha(g_2)\alpha(a) = \alpha(g_2) = 1.$$

Возьмем gA из $H(G/A)$. Если найдется гомоморфизм $\alpha : G \to K^*$ такой, что $\alpha(g) \ne 1$, то и $\bar{\alpha}(gA) \ne 1$, или gA не принадлежит $H(G/A)$. Следовательно, g из $H(G)$, т. е. gA из $H(G)/A$.

Из условий 1 и 2 следует, что $H(G) = [G,G]G^{(p^m-1)}$. $\square$

Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 4. *Каждый характер χ из $\mathrm{Hom}(G,K^*)$ можно продолжить до гомоморфизма K-алгебр $\Phi_\chi : KG \to K$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между характерами χ из $\mathrm{Hom}(G,K^*)$ и ненулевыми гомоморфизмами $\Phi_\chi : KG \to K$.*

Лемма 5. *Нильпотентное кольцо R полно, если и только если его аддитивная группа делимая.*

Доказательство. Если $R^2 = \{0\}$, то R есть полное кольцо с нулевым умножением. Очевидно, что его аддитивная группа делимая. Если $R^2 \ne \{0\}$, то найдется такое $t \geq 0$, что $R^{2^{t+1}} = \{0\}$ и $R^{2^t} \neq \{0\}$. По условию кольцо R является $\mathbf{Z}_p$-полным, значит, $R = R^2 + pR$. Получаем

$$R^2 = (R^2 + pR)(R^2 + pR) = R^4 + pR^3 + pR^3 + p^2R^2$$
$$= R^4 + pR^3 + p^2R^2 = R^4 + pR(R^2 + pR) = R^4 + pR^2,$$

т. е. R^2 также $\mathbf{Z}_p$-полное кольцо. Рассуждая аналогично, получим, что кольца $R^4, R^8, \dots, R^{2^t}$ будут $\mathbf{Z}_p$-полными.

Ненулевое кольцо R^{2^t} есть $\mathbf{Z}_p$-полное кольцо с нулевым умножением, поэтому его аддитивная группа делимая. Кольца $R^4, R^8, \dots, R^{2^t}$ являются $\mathbf{Z}_p$-полными, тогда и все их факторы $\mathbf{Z}_p$-полные (см. [9]), в частности, фактор-кольца $R/R^2, R^2/R^4, \dots, R^{2^{t-1}}/R^{2^t}$ суть $\mathbf{Z}_p$-полные кольца с нулевым умножением. Следовательно, их аддитивные группы делимые.

Известно (см. [9]), что расширение делимой абелевой группы с помощью делимой также делимая группа. Группы $(R^{2^{t-1}}/R^{2^t})^+$ и $(R^{2^t})^+$ делимые, следовательно, $(R^{2^{t-1}})^+$ также делимая. Аналогично группы $(R^{2^{t-2}}/R^{2^{t-1}})^+$ и $(R^{2^{t-1}})^+$ делимые, тогда и $(R^{2^{t-2}})^+$ делимая. Поднимаясь выше, на t шаге получим, что R^+ будет делимой группой. $\square$

Лемма 6. *Для произвольной группы G и поля $K = GF(p^m)$ имеет место равенство*

$$\bigcap_{\chi \in \mathrm{Hom}(G,K^*)} \ker \Phi_\chi = w[G,G]G^{(p^m-1)}.$$

Доказательство. Возьмем любой гомоморфизм Φ_χ. Для каждого g из $H(G)$ выполняется $\Phi_\chi(e-g) = \Phi_\chi(e) - \Phi_\chi(g) = 1 - 1 = 0$, т. е. $(e-g)$ из $\ker \Phi_\chi$. Порождающие правого идеала wH принадлежат $\ker \Phi_\chi$ для произвольного Φ_χ, следовательно, они принадлежат $\bigcap\limits_\chi \ker \Phi_\chi$, т. е.

$$wH(G) \subseteq \bigcap_\chi \ker \Phi_\chi. \tag{1}$$

Хорошо известно, что

$$KG/wH(G) \cong K(G/H(G)).$$

С другой стороны,

$$\bigcap_{\chi \in \mathrm{Hom}(G,K^*)} \ker \Phi_\chi = f^{-1}\Big(\bigcap_{\tau \in \mathrm{Hom}(G_1,K^*)} \ker \Phi_\tau\Big),$$

где f — канонический гомоморфизм $KG \to K(G/H(G)) = KG_1$. Поэтому для доказательства включения $\bigcap\limits_\chi \ker \Phi_\chi \subseteq wH(G)$ в кольце KG достаточно показать, что если $H(G_1) = e$, то в кольце KG_1 выполняется

$$\bigcap_{\tau \in \mathrm{Hom}(G_1,K^*)} \ker \Phi_\tau = 0. \tag{2}$$

Пусть a из KG_1 и $a = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_s g_s$, где $\alpha_i \neq 0$ хотя бы для одного i из $1, \dots, s$. Рассмотрим подгруппу $\langle g_1, \dots, g_s \rangle$. Так как $H(G_1) = e$, то G_1 — прямое произведение конечных циклических групп, поэтому $\langle g_1, \dots, g_s \rangle$ конечна и найдется конечная подгруппа G_2 группы G_1, являющаяся прямым множителем в G_1 и содержащая $\langle g_1, \dots, g_s\rangle$. Пусть $|G_2| = n$. Покажем, что $|\operatorname{Hom}(G_2, K^*)| = n$. Действительно, из леммы 3 следует, что $G_2/H(G_2)$ — абелева группа и $(G_2/H(G_2))^{p^m-1} = \{\bar{e}\}$. Тогда (см. [14, гл. 1, теорема 9]) $G_2/H(G_2) \cong \operatorname{Hom}(G_2/H(G_2), K^*)$, причем очевидно, что $\operatorname{Hom}(G_2/H(G_2), K^*) \cong \operatorname{Hom}(G_2, K^*)$.

Каждый элемент x из

$$\bigcap_{\chi} \ker \Phi_\chi = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid \forall \chi \in \operatorname{Hom}(G_2, K^*) \sum_{i=1}^{n} a_i \chi(g_i) = 0 \right\},$$

где $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i g_i$, есть решение системы n однородных линейных уравнений с коэффициентами $\chi_j(g_i)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, при неизвестных a_i, $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} a_1\chi_1(g_1) + a_2\chi_1(g_2) + \dots + a_n\chi_1(g_n) = 0, \\ a_1\chi_2(g_1) + a_2\chi_2(g_2) + \dots + a_n\chi_2(g_n) = 0, \\ \qquad \dots \\ a_1\chi_n(g_1) + a_2\chi_n(g_2) + \dots + a_n\chi_n(g_n) = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

А так как различные характеры G_2 в K линейно независимы над K (см. [14, гл. 8, теорема 7]), то система $(*)$ не имеет ненулевых решений. Таким образом, в кольце KG_2 выполняется

$$\bigcap_{\chi \in \operatorname{Hom}(G_2, K^*)} \ker \Phi_\chi = 0,$$

и так как $a \neq 0$, то найдется χ_0 из $\operatorname{Hom}(G_2, K^*)$ такой, что $\Phi_{\chi_0}(a) \neq 0$. С другой стороны, так как G_2 — прямой множитель в G_1, гомоморфизм $\chi_0 : G_2 \to K$ можно продолжить до гомоморфизма $\tilde{\chi}_0 : G_1 \to K$, причем $\Phi_{\tilde{\chi}_0}(a) = \Phi_{\chi_0}(a) \neq 0$, т. е. a не принадлежит $\bigcap\limits_{\chi \in \operatorname{Hom}(G_1, K^*)} \ker \Phi_\chi$. Из произвольности выбора a следует равенство (2), а значит, и искомое включение. $\square$

Лемма 7. *Если $H \triangleleft G$, то в кольце KG идеал wH представим в виде $\bigoplus\limits_{g \in G} w_g^0 H$ и для любого полного множества $A = \{g_i \mid i \in I\}$ представителей, попарно несравнимых по H, каждый элемент r из wH можно представить единственным образом в виде $r = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i g_i$, где $g_i \in A$, $a_i \in w_e^0 H$.*

Доказательство. Если

$$r = \left(\alpha_1 e + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k h_k \right) g$$

принадлежит $w_g^0 H$, то $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k = 0$. Поэтому

$$r = \left(\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \right) e - \sum_{k=2}^{m} \alpha_k (e - h_k) \right) g = -\sum_{k=2}^{m} \alpha_k (e - h_k) g$$

принадлежит wH, т. е. $w_g^0 H \subseteq wH$ для каждого g из G. С другой стороны, очевидно, что $KG = \bigoplus\limits_{g \in G} w_g H$. Пусть $r = \sum\limits_{k} r_{g_k}$ принадлежит wH, где r_{g_k} из $w_k H$.

Понятно, что g_k в этом разложении можно выбрать такими, что $g_k g_l^{-1}$ не принадлежит H при $k \neq l$. Если $f : KG \to K(G/H)$ — канонический гомоморфизм, то

$$f(r) = \sum_k f(r_{g_k}) = \sum_k \Big(\sum_i \alpha_{i,k}\Big)\bar{g}_k = 0.$$

Из линейной независимости векторов $\bar{g}_k$ в пространстве $K(G/H)$ получаем, что $\sum_i \alpha_{i,k} = 0$ для всех k, т. е. r_{g_k} принадлежит $w^0_{g_k}H$ для любого k. Вторая часть утверждения очевидным образом следует из первой. $\square$

Необходимость изучения полных $GF(p)$-алгебр над конечными полями вытекает из следующего утверждения.

Предложение 1. *Для того чтобы кольцо R было полным, необходимо и достаточно, чтобы для любого простого числа p кольцо R/pR было полным.*

Доказательство. Из утверждения [9] следует, что R/pR есть полное кольцо как гомоморфный образ полного кольца. Обратно, если R/pR есть полное кольцо для любого простого p, то

$$\mathbf{Z}_p(R/pR) = (R^2 + pR)/pR + (R/pR)^2 = R/pR$$

и $R^2 + pR = pR$, т. е. $\mathbf{Z}_p(R) = R$. Аналогично $\mathbf{F}_p(R) = R$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Покажем, что wH является полным подкольцом в KG. Очевидно, wH порождается множеством $\{(e-h)g \mid h \in H,\ g \in G\}$ как абелева группа. Так как $[H,H]H^p = H$, для каждого h из H найдутся $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots, h_l$ из H такие, что $h = [h_1,h_2]\dots[h_{k-1},h_k]h^p_{k+1}\dots h^p_l$ и

$$\begin{aligned}(e-h)g = ((e-[h_1,h_2]) + [h_1,h_2](e-[h_2,h_3]) + [h_1,h_2][h_2,h_3](e-[h_4,h_5])\\ + \dots + [h_1,h_2]\dots[h_{k-1},h_k]\big(e-h^p_{k+1}\big) + [h_1,h_2]\dots[h_{k-1},h_k]h^p_{k+1}(e-h^p_{k+2})\\ + \dots + [h_1,h_2]\dots[h_{k-1},h_k]h^p_{k+1}\dots h^p_{l-1}\big(e-h^p_l\big))g.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}e-[h_i,h_{i+1}] = e - h_ih_{i+1}h_i^{-1}h_{i+1}^{-1} = (h_{i+1}h_i - h_ih_{i+1})h_i^{-1}h_{i+1}^{-1}\\ = ((e-h_{i+1})(e-h_i) - (e-h_i)(e-h_{i+1}))h_i^{-1}h_{i+1}^{-1}\end{aligned}$$

принадлежит $\mathbf{Z}_p(wH) = (wH)^2$ и для любого r из KG элемент

$$(e-h_i^p)r = (e-h_i)^p r = (e-h_i)(e-h_i)^{p-1}r$$

принадлежит $\mathbf{Z}_p(wH) = (wH)^2$. Таким образом, $(e-h)g$ принадлежит $\mathbf{Z}_p(wH)$, и $\mathbf{Z}_p(wH) = wH$.

Покажем $\mathbf{F}_p$-полноту кольца wH. Пусть $f : wH \to K$ — ненулевой гомоморфизм колец. Существует h из H такой, что $f(e-h) \neq 0$. Иначе для любых h_1, h_2 из H и g_1, g_2 из G выполняется

$$f((e-h_1)g_1)f((e-h_2)g_2) = f((e-h_1)g_1(e-h_2)g_2) = f(e-h_1)f(g_1(e-h_2)g_2) = 0.$$

Поэтому $(\operatorname{Im} f)^2 = K^2 = 0$.

Пусть $f(e-h) \neq 0$. Покажем, что $f((e-h)g) = f(g(e-h))$. Действительно,

$$\begin{aligned}f(e-h)f((e-h)g - g(e-h)) = f((e-h)(e-h)g - (e-h)g(e-h))\\ = f((e-h)^2g) - f((e-h)g(e-h)) = f((e-h)^2g) - f((e-h)g)f(e-h)\\ = f((e-h)^2g) - f(e-h)f((e-h)g) = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi : G \to K, \quad \varphi(g) = \frac{f((e-h)g)}{f(e-h)}.$$

Заметим, что

$$\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \frac{f((e-h)g_1)f((e-h)g_2)}{(f(e-h))^2} = \frac{f((e-h)g_1)f(g_2(e-h))}{(f(e-h))^2}$$
$$= \frac{f((e-h)g_1g_2(e-h))}{(f(e-h))^2} = \frac{f(e-h)f(g_1g_2(e-h))}{(f(e-h))^2} = \frac{f((e-h)g_1g_2)}{f(e-h)} = \varphi(g_1g_2),$$

причем

$$\varphi(e) = \frac{f(e-h)}{f(e-h)} = 1 \neq 0.$$

Таким образом, φ есть характер группы G, и

$$\Phi_\varphi(e-h) = \varphi(e) - \varphi(h) = \frac{f(e-h)}{f(e-h)} - \frac{f((e-h)h)}{f(e-h)} = f(e-h).$$

С другой стороны, из леммы 6 следует, что $\varphi(H) = e$ и $\Phi_\varphi(e-h) = \Phi_\varphi(e) - \Phi_\varphi(h) = 1 - 1 = 0$, что противоречит выбору $(e-h)$. Полученное противоречие доказывает $\mathbf{F}_p$-полноту кольца wH. Таким образом, $wH \subseteq C(KG)$.

Для доказательства включения $C(KG) \subseteq wH$ достаточно показать, что $KG/wH \cong K(G/H)$ не имеет ненулевых полных подколец. Из того, что H является наибольшей $\mathbf{A}_p$-полной подгруппой в $[G,G]G^{(p-1)}$, следует, что в группе $G_1 = G/H$ подгруппа $[G_1,G_1]G_1^{(p-1)} = ([G,G]G^{(p-1)})/H$ не имеет неединичных подгрупп A со свойством $[A,A]A^p = A$. Поэтому существует нормальный ряд $[G_1,G_1]G_1^{(p-1)} = H_1 \triangleright H_2 \triangleright H_3 \cdots \triangleright H_\sigma = \{e\}$, в котором $H_{i+1} = [H_i,H_i]H_i^p$ и $H_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} H_\beta$, т. е. факторы H_{i+1}/H_i являются коммутативными, причем $(H_{i+1}/H_i)^p = \{\bar{e}\}$. Рассмотрим соответствующую убывающую цепь идеалов кольца KG_1: $wH_1 \supset wH_2 \supset \cdots \supset wH_\sigma = \{0\}$. Покажем, что $C(KG_1) \subseteq wH_\alpha$ для любого $\alpha < \sigma$, отсюда будет ясно, что $C(KG_1) = \{0\}$. Доказательство проведем индукцией по α. Пусть $\alpha = 1$. По лемме 6

$$wH_1 = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Hom}(G_1,K^*)} \ker \Phi_\chi$$

и так как $C(KG_1)$ не имеет ненулевых гомоморфизмов в K, то $C(KG_1) \subseteq wH_1$. Пусть $C(KG_1) \subseteq wH_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Если α есть предельный ординал, то из леммы 6 следует, что $wH_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} wH_\beta$. Поэтому $C(KG_1) \subseteq wH_\alpha$. Пусть α не является предельным. Покажем, что кольцо $KG_1/wH_\alpha \cong K(G_1/H_\alpha)$ редуцированно. В группе $G_1/H_\alpha = \overline{G}_1$ нормальная подгруппа $H_{\alpha-1}/H_\alpha = \overline{H}_{\alpha-1}$ коммутативна и $(H_{\alpha-1})^p = \{e\}$. Докажем равенство

$$(w\overline{H}_{\alpha-1})^\delta = \big(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\big)^\delta \overline{G}_1 \tag{3}$$

для любого ординала δ. Доказательство проведем индукцией по δ. При $\delta = 1$ получаем очевидное равенство $(w\overline{H}_{\alpha-1}) = \big(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\big)\overline{G}_1$. Пусть для всех $\alpha < \delta$ равенство (3) верно и δ не является предельным:

$$(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta-1} = \big(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\big)\overline{G}_1.$$

Допустим, x принадлежит $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta}$, т. е.

$$x = \sum_{i=1}^{n}(e-h_i)g_ir_i,$$

где h_i из $\overline{H}_{\alpha-1}$, g_i из $\overline{G}_1$, r_i из $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta-1}$, или $x = \sum\limits_{i=1}^{n}(e-h_i)r_i'$ для $r_i' = g_ir_i$ из $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta-1}$. Таким образом, x принадлежит $\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\delta}\overline{G}_1$ и $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta} \subseteq \bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\delta}\overline{G}_1$. Обратное включение очевидно. Пусть теперь δ есть предельный ординал и

$$(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta} = \bigcap_{\beta<\delta}(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\beta} = \bigcap_{\alpha<\delta}\bigl(\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\beta}\overline{G}_1\bigr).$$

Предположим, что x из $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta}$. Это значит, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n_\beta} r_{\beta,i}g_{\beta,i}$ для каждого $\beta<\delta$, где $r_{\beta,i}$ из $\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\beta}$. Так как x из $w\overline{H}_{\alpha-1}$, из леммы 7 следует, что, не теряя общности, для каждого i можно предположить, что $n_\beta = n_\gamma$, $g_{\beta,i} = g_{\gamma,i}$, $r_{\beta,i}g_{\beta,i} = r_{\gamma,i}g_{\gamma,i}$ для всех β и γ, меньших δ, а поэтому $(r_{\beta,i}-r_{\gamma,i})g_i = 0$, где $g_i = g_{\beta,i} = g_{\gamma,i}$ и $r_{\beta,i} = r_{\gamma,i}$. Обозначив $r_{\beta,i} = r_{\gamma,i} = r_i$, получим $x = \sum\limits_{i=1}^{n} r_ig_i$, где r_i из $\bigcap\limits_{\beta<\delta}\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\beta}$. Таким образом, x принадлежит

$$\Bigl(\bigcap_{\beta<\delta} w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}^{\beta}\Bigr)\overline{G}_1 = \bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\delta}\overline{G}_1,$$

и $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta} \subseteq (w_e^0\overline{H}_{\alpha-1})^{\delta}\overline{G}_1$. Очевидное обратное включение и доказывает равенство (3).

Покажем теперь, что найдется ординал γ такой, что $\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\gamma} = 0$. Так как группа $\overline{H}_{\alpha-1}$ коммутативная и $(\overline{H}_{\alpha-1})^p = \{e\}$, то $\overline{H}_{\alpha-1}$ есть прямое произведение циклических подгрупп,

$$\overline{H}_{\alpha-1} = \prod_{i\in I} A_i,$$

где I вполне упорядочено. Пусть $B_i = \prod\limits_{j>i} A_j$. Понятно, что $B_i = A_{i+1}\times B_{i+1}$ и $B_i/B_{i+1} \cong \langle a_{i+1}\rangle$. Очевидно, $w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}$ можно отождествить с идеалом $w\overline{H}_{\alpha-1}$ кольца $K\overline{H}_{\alpha-1}$. Рассмотрим в нем убывающую цепь идеалов $wB_0 \supset wB_1 \supset \dots \supset wB_\delta = 0$. Легко показать, что $(wB_\alpha)^p \subset wB_{\alpha+1}$ для всех α. Действительно, если $x_1, x_2, \dots, x_p$ принадлежат wB_α, то $x_i = \alpha_i(e-\bar{a}_{\alpha+1})h_i + b_i$ и

$$x_1x_2\dots x_p = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p\bigl(e-\bar{a}_{\alpha-1}^{p}\bigr) + r = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p(e-\bar{a}_{\alpha-1})^p + r = r,$$

где r принадлежит $wB_{\alpha+1}$. Из этого следует, что $w\overline{H}_{\alpha-1}$ не имеет подколец, совпадающих со своим квадратом, а значит, найдется ординал γ такой, что $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\gamma} = 0$ и $\bigl(w_e^0\overline{H}_{\alpha-1}\bigr)^{\gamma} = 0$ в кольце $K\overline{G}_1$. Воспользовавшись равенством (3), получим, что $(w\overline{H}_{\alpha-1})^{\gamma} = 0$ и $C(KG_1) \subseteq wH_\alpha$. $\square$

Доказательство теоремы 3. (1$\Leftrightarrow$2) Для удобства через H будем обозначать подгруппу $[G,G]G^{(p-1)}$. Пусть кольцо KG редуцировано. Так как $KG/J(KG)$ — конечное кольцо с нулевым радикалом Джекобсона, то

$$KG/J(KG) \cong \prod_{i\in I} K_i,$$

где K_i — кольца матриц над конечными полями. Если найдется i_0 такое, что K_{i_0} не изоморфно K, то кольцо K_{i_0} будет полным (см. [8]). Пусть теперь

$$f : KG \to \prod_{i \in I} K_i$$

— канонический сюръективный гомоморфизм. Покажем, что $A = f^{-1}(K_{i_0})$ — полное подкольцо в KG. Действительно, A является идеалом в KG и $J(KG) \subseteq A$, тогда (см. [15, теорема 1.2.5, с. 21])

$$J(A) = A \cap J(KG) = J(KG),$$

значит,

$$A/J(A) = A/J(KG) \cong K_{i_0}$$

есть полное кольцо. Следовательно (см. [8]), кольцо A полное. Обратно, пусть C — полное подкольцо в KG. Очевидно, $C \subseteq J(KG)$, иначе существует ненулевой гомоморфизм из C в K, что противоречит полноте кольца C. Поэтому C — нильпотентное полное кольцо. По лемме 5 группа C^+ делимая, причем $pC^+ = \{0\}$, т. е. $C^+ = \{0\}$.

Для того чтобы показать эквивалентность условий 1 и 3, достаточно заметить, что из конечности подгруппы $[G, G]G^{(p-1)}$ следует, что она не имеет неединичных $\mathbf{A}_p$-полных подгрупп тогда и только тогда, когда она является p-группой. Поэтому из теоремы 2 следует нужное утверждение. $\square$

В заключение авторы выражают благодарность профессору Л. М. Мартынову за постановку задачи и полезное обсуждение, а также профессору А. Н. Зубкову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martynov L. M.* On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras // Intern. conf. on modern algebra and its applications. Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee May 14–18, 1996. (Schedule and abstracts, P. 79–80).
2. *Корнев А. И.* О полных модулях // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 30–37.
3. *Мартынов Л. М.* О примарных и редуцированных многообразиях модулей // Вестн. ОмГУ. 1999. Вып. 4. С. 29–31.
4. *Овчинников В. В.* О кольцах, над которыми каждый модуль является редуцированным // Абелевы группы и модули. Томск, 2000. Вып. 15. С. 46–54.
5. *Мартынов Л. М.* О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 103–112.
6. *Финк Т. Ю.* Конечные полные полугруппы // Естественные науки и экология: Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. Вып. 4. С. 8–14.
7. *Финк Т. Ю.* Вложимость и минимальная полнота конечных полугрупп // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. Вып. 1. С. 20–25.
8. *Корнев А. И., Павлова Т. В.* Конечные полные ассоциативные кольца // Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сб. науч. тр. Ежегодник. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2002. Вып. 2. С. 43–45.
9. *Мартынов Л. М.* О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Тр. междунар. сем. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.
10. *Мартынов Л. М.* Об одном радикале алгебр со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям // Вестн. ОмГУ. 2004. Вып. 2. С. 20–22.
11. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979.

12. *Корнев А. И., Павлова Т. В.* О полных и редуцированных ассоциативных кольцах // Междунар. конф. по математике и механике: Тез. докл. / Под общ. ред. Н. Р. Щербакова. Томск: ТГУ, 2003. С. 48.
13. *Общая алгебра* / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1990. Т. 1.
14. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
15. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 14 ноября 2003 г.

Корнев Александр Иванович, Павлова Татьяна Вениаминовна
Омский гос. педагогический университет, кафедра алгебры
наб. Тухачевского, 14, каб. 207, Омск 644099
kornev_omsk@mail.ru