Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ

А. Л. Бухгейм, Г. В. Дятлов,
В. Б. Кардаков, Е. В. Танцерев

Аннотация: Рассматривается обратная задача для стационарной системы уравнений теории упругости с постоянными коэффициентами Ламе и переменным матричным коэффициентом, зависящим от пространственных переменных и частоты. Правая часть содержит дельта-функцию, носитель которой (источник) меняется в некоторой области, не пересекающейся с носителем переменного коэффициента. Обратная задача состоит в нахождении коэффициента по рассеянной волне, измеренной в той же точке, из которой исходит возмущение. Доказана теорема единственности. Доказательство основано на сведении обратной задачи к семейству уравнений с потенциалом М. Рисса.

Ключевые слова: обратная задача, система уравнений упругости, память, потенциал Рисса, интегральное уравнение первого рода, низкочастотные данные.

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Мы рассматриваем обратную задачу для системы уравнений теории упругости. Подобные задачи естественно рассматривать во временно́й области, т. е. в терминах перемещений $\mathbf{u}(x,t)$, зависящих от пространственной и временно́й переменных. Однако основные рассуждения относятся к соответствующей задаче в частотной области, которую мы и будем рассматривать в первую очередь. Ниже приведем соответствующую постановку во временно́й области.

Рассмотрим систему уравнений

$$\omega^2 \boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u} + \omega\boldsymbol{q}(x,\omega)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{f}(x,z), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ — вектор перемещений, зависящий от $x\in\mathbb{R}^3$, а также от положения источника $z\in\mathbb{R}^3$ и частоты $\omega\in\mathbb{C}$. Для краткости мы не указываем зависимость от частоты: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,z)$. Операции grad, div, Δ действуют по переменной x. Предполагается, что коэффициенты Ламе λ и μ постоянны, а $\boldsymbol{q}(x,\omega)=\operatorname{diag}(q_1,q_2,q_3)$ — диагональная матричная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(q) компоненты $q_k(x,\omega)$, $k=1,2,3$, обращаются в нуль, когда x лежит вне некоторой ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, непрерывны в $\mathbb{R}^3\times\{\omega\in\mathbb{C}\mid |\omega|<\omega_0\}$, где $\omega_0>0$, и аналитичны по ω при $|\omega|<\omega_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00540, 02–01–00296).

© 2004 Бухгейм А. Л., Дятлов Г. В., Кардаков В. Б., Танцерев Е. В.

В качестве правой части $\boldsymbol{f}(x,z)$ мы будем брать $\operatorname{grad}\delta(x-z)$, $a\times\operatorname{grad}\delta(x-z)$ либо просто $a\delta(x-z)$. Предполагается, что источник z пробегает некоторую область $\Omega_0\subset\mathbb{R}^3$, не пересекающуюся с Ω. Для простоты будем считать, что Ω_0 ограничена.

Прямая задача состоит в нахождении решения $\boldsymbol{u}(x,z)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего условиям излучения (3.1), при условии, что $\boldsymbol{q}(x,\omega)$ известна. Прямой задаче посвящен § 3. Решение прямой задачи представляется в виде суммы падающей и рассеянной волн: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{(i)}+\boldsymbol{u}^{(s)}$, где $\boldsymbol{u}^{(i)}$ — решение (1.1), (3.1) с $\boldsymbol{q}\equiv 0$.

Обратная задача состоит в нахождении $\boldsymbol{u}(x,z)$ и $\boldsymbol{q}(x,\omega)$, удовлетворяющих (1.1), (3.1), по информации

$$\boldsymbol{u}^{(s)}(x,x),\quad x\in\Omega_0,\quad 0<\omega<\omega_0,$$

т. е. по данным рассеяния в обратном направлении. Основным результатом работы является следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{q}^{(1)}$ и $\boldsymbol{q}^{(2)}$ — две матрицы, удовлетворяющие условию (q), а $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и $\boldsymbol{u}^{(2)}$ — соответствующие решения. Тогда для каждого вида правой части $\boldsymbol{f}(x,z)$ справедливо соответствующее утверждение.*

1. *Пусть $\boldsymbol{f}(x,z)=\operatorname{grad}_x\delta(x-z)$. Тогда равенство*

$$\boldsymbol{u}^{(1s)}(x,x)=\boldsymbol{u}^{(2s)}(x,x),\quad x\in\Omega_0,\quad 0<\omega<\omega_0,$$

влечет $\boldsymbol{q}^{(1)}\equiv\boldsymbol{q}^{(2)}$.

2. *Пусть $\boldsymbol{f}(x,z)=a\times\operatorname{grad}_x\delta(x-z)$, где $a\in\mathbb{R}^3$. Тогда равенства*

$$\begin{gathered}u_k^{(1s)}(x,x)=u_k^{(2s)}(x,x),\ x\in\Omega_0,\ 0<\omega<\omega_0,\ k=1,2,\quad \text{при } a=e_1,\\ u_2^{(1s)}(x,x)=u_2^{(2s)}(x,x),\ x\in\Omega_0,\ 0<\omega<\omega_0,\quad \text{при } a=e_2\end{gathered}$$

влекут $\boldsymbol{q}^{(1)}\equiv\boldsymbol{q}^{(2)}$. Здесь e_k — базисный вектор.

3. *Пусть $\boldsymbol{f}(x,z)=a\delta(x-z)$, где $a\in\mathbb{R}^3$, и $q_1^{(j)}=q_2^{(j)}=q_3^{(j)}$, $j=1,2$. Если равенство*

$$\langle b,\boldsymbol{u}^{(1s)}(x,x)\rangle=\langle b,\boldsymbol{u}^{(2s)}(x,x)\rangle,\quad x\in\Omega_0,\ 0<\omega<\omega_0,$$

выполнено хотя бы для одного ненулевого $b\in\mathbb{R}^3$, ортогонального a, то $\boldsymbol{q}^{(1)}\equiv\boldsymbol{q}^{(2)}$.

Замечание. Отметим, что рассматриваемая обратная задача не переопределена.

Приведем соответствующую постановку во временнóй области. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{u}_{tt}-(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\mu\Delta\mathbf{u}+\boldsymbol{\sigma}(x)\mathbf{u}_t+\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{h}(x,t-\tau)\mathbf{u}_{\tau\tau}(x,\tau;z)\,d\tau = \boldsymbol{f}(x,z)\delta(t),\quad x\in\mathbb{R}^3,\ t\in\mathbb{R},\tag{1.2}$$

с начальным условием

$$\mathbf{u}|_{t<0}=0.\tag{1.3}$$

Предполагается, что $\boldsymbol{\sigma}(x) = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $\mathbf{h}(x,t) = \operatorname{diag}(h_1, h_2, h_3)$ — диагональные матрицы, обращающиеся в нуль при $x \notin \Omega$ и $t < 0$ и непрерывные соответственно в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, кроме того, $\mathbf{h}(x,t)$ удовлетворяет оценке

$$|h_k(x,t)| \le Ce^{-\omega_0 t}, \quad x \in \overline{\Omega},\ t > 0,\ k = 1, 2, 3,$$

с положительными константами C и ω_0. В этих предположениях задача Коши (1.2), (1.3) имеет единственное решение, которое представляется в виде

$$\mathbf{u}(x,t;z) = \mathbf{u}^{(i)}(x,t;z) + \mathbf{u}^{(s)}(x,t;z),$$

где $\mathbf{u}^{(i)}$ — решение (1.2), (1.3) с $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ и $\mathbf{h} \equiv 0$.

Обратная задача состоит в нахождении $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{h}$ по данным рассеяния

$$\mathbf{u}^{(s)}(x,t;x), \quad x \in \Omega_0,\ t > 0.$$

Чтобы осознать связь постановок в частотной и временно́й областях, применим преобразование Фурье по времени к (1.2). В результате получается уравнение (1.1) с $q_k(x,\omega) = -i\sigma_k(x) + \omega\hat{h}_k(x,\omega)$, где $\hat{h}_k(x,\omega) = \int e^{-i\omega t} h_k(x,t)\,dt$. Причем решение (1.2), (1.3) переходит в решение (1.1), (3.1), поскольку фундаментальное решение оператора $\partial_t^2 - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} - \mu\Delta$, обращающееся в нуль при $t < 0$, переходит в фундаментальное решение $\Gamma(x,y)$ оператора $-\omega^2 - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} - \mu\Delta$.

§ 2. Метод уравнения Рисса

В основе доказательства теоремы 1 лежит cведе́ние обратной задачи к уравнению

$$\int\limits_{\Omega} \frac{b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy = f(x), \tag{2.1}$$

впервые рассмотренному М. Риссом [1]. Здесь n — размерность пространства, α — число такое, что $\alpha \ne 2 + 2m$, $\alpha \ne n + 2m$, $m = 0, 1, 2 \dots$, b — интегрируемая функция с носителем в ограниченной области Ω, а точка x пробегает область Ω_0, не пересекающуюся с Ω. В доказательстве теоремы 1 будет $n = 3$, $\alpha = 1$, т. е. $n - \alpha = 2$. Единственность решения уравнения (2.1) хорошо известна (см. [1–7]). Для дальнейших ссылок сформулируем соответствующее утверждение в виде леммы.

Лемма 1. *Если $f(x) = 0$ при $x \in \Omega_0$, то $b \equiv 0$.*

Уравнение (2.1) естественным образом возникает при решении обратных задач для гиперболических уравнений. Впервые такая связь была обнаружена М. М. Лаврентьевым [2, 3]. В качестве примера (см. [5]) рассмотрим обратную задачу нахождения коэффициента $b(x)$ в приведенном волновом уравнении

$$\Delta u + \omega^2(1 + b(x))u = -\delta(x - z), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $\omega > 0$ — частота, $b(x)$ — непрерывная функция с носителем в ограниченной области Ω, источник z пробегает область Ω_0, $\Omega_0 \cap \Omega = \varnothing$, а решение удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда. При этих условиях решение имеет вид

$$u(x,z) = \frac{e^{i\omega|x-z|}}{4\pi|x-z|} + u^{(s)}(x,z).$$

Обратная задача — найти $b(x)$ по данным рассеяния $u^{(s)}(x,x)$, $x \in \Omega_0$, $\omega > 0$.

Обращая оператор $\Delta+\omega^2$ с учетом условий излучения, получаем следующее уравнение для $u^{(s)}$:

$$u^{(s)}(x,z) = \omega^2 \int\limits_\Omega b(y) \frac{e^{i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left(\frac{e^{i\omega|y-z|}}{4\pi|y-z|} + u^{(s)}(y,z) \right) dy,$$

откуда видно, что $u^{(s)} \to 0$ при $\omega \to 0$. Положим $z = x$, разделим уравнение на ω^2 и перейдем к пределу при $\omega \to 0$:

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{u^{(s)}(x,x)}{\omega^2} = \int\limits_\Omega \frac{b(y)}{16\pi^2|x-y|^2}\, dy.$$

Применение леммы 1 дает единственность решения обратной задачи.

В работе [8] был рассмотрен случай, когда b (аналитически) зависит от ω, т. е. $b = b(x,\omega)$, что соответствует гиперболическому уравнению со сверточным членом:

$$u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t h(x,t-\tau) u_{\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau = \delta(x-z,t).$$

В этом случае также удается решить обратную задачу. Для этого мы раскладываем все функции в ряд Тейлора по ω и приравниваем соответствующие коэффициенты. В результате получаем серию уравнений Рисса для определения коэффициентов в разложении $b(x,\omega) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x)\omega^n$.

Собственно, последние два абзаца представляют идею и план доказательства теоремы 1. Дополнительную информацию по этому методу можно найти в [4, 6, 7].

§ 3. Прямая задача

Введем необходимые понятия и обозначения:

$\Delta^* \boldsymbol{u} = (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\Delta\boldsymbol{u}$;

$c_1 = \sqrt{\lambda+2\mu}$ и $c_2 = \sqrt{\mu}$ — скорости распространения продольных и поперечных колебаний;

$k_1 = \omega/c_1$ и $k_2 = \omega/c_2$ — соответствующие волновые числа;

$\Phi^{(j)}(x,y) = \frac{e^{ik_j|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$-\big(\Delta_x + k_j^2\big)\Phi^{(j)}(x,y) = \delta(x-y),$$

удовлетворяющее условиям излучения Зоммерфельда.

Поскольку мы рассматриваем решения системы уравнений упругости в неограниченной области, нам потребуются соответствующие условия излучения. Как известно, любое векторное поле единственным образом раскладывается на потенциальную и соленоидальную составляющие: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{(\mathrm{pot})} + \boldsymbol{u}^{(\mathrm{sol})}$, где $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{pot})} = \operatorname{grad}\varphi$ и $\boldsymbol{u}^{(\mathrm{sol})} = \operatorname{rot}\psi$ с некоторыми подходящими φ и ψ. Будем говорить, что $\boldsymbol{u}$ *удовлетворяет условиям излучения*, если $\boldsymbol{u}$ непрерывно дифференцируемо при достаточно больших $|x|$ и

$$\begin{gathered} \lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{pot})} = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x| \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^{(\mathrm{pot})}}{\partial |x|} - ik_1 \boldsymbol{u}^{(\mathrm{pot})} \right) = 0, \\ \lim_{|x|\to\infty} \boldsymbol{u}^{(\mathrm{sol})} = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |x| \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^{(\mathrm{sol})}}{\partial |x|} - ik_2 \boldsymbol{u}^{(\mathrm{sol})} \right) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Фундаментальным решением оператора $-(\Delta^* + \omega^2)$ будем называть матричную функцию $\Gamma(x,y)$ с компонентами

$$\Gamma_{kj}(x,y) = \frac{1}{c_2^2}\delta_{jk}\Phi^{(2)}(x,y) - \frac{1}{\omega^2}\partial^2_{x_k x_j}(\Phi^{(1)}(x,y) - \Phi^{(2)}(x,y)), \quad k,j = 1,2,3,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Известно (см. [9]), что $\Gamma(x,y)$ как функция от x удовлетворяет системе уравнений

$$-(\Delta^* + \omega^2)\Gamma(x,y) = \delta(x-y)I$$

и условиям излучения (3.1), здесь I — тождественная матрица. Таким образом, если $\boldsymbol{f}(x)$ — вектор-функция, компоненты которой суть финитные распределения, то решение системы

$$-(\Delta^* + \omega^2)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

удовлетворяющее условиям излучения (3.1), представляется при помощи объемного потенциала

$$\boldsymbol{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x,y)\boldsymbol{f}(y)\,dy. \tag{3.2}$$

В частности, при $\boldsymbol{f}(x) = \operatorname{grad}_x \delta(x-z)$, что соответствует источнику типа центра мгновенного объемного расширения, расположенному в точке z, получаем следующее решение:

$$\begin{aligned}
&u_k^{(i)}(x,z) \\
&= \int \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\left(\frac{1}{c_2^2}\delta_{jk}\Phi^{(2)}(x,y) - \frac{1}{\omega^2}\partial^2_{x_k x_j}(\Phi^{(1)}(x,y) - \Phi^{(2)}(x,y))\right)\delta(y-z)\,dy \\
&\qquad = \frac{1}{c_2^2}\partial_{x_k}\Phi^{(2)}(x,y) - \frac{1}{\omega^2}\partial_{x_k}\Delta_x(\Phi^{(1)}(x,y) - \Phi^{(2)}(x,y)) \\
&\quad = \partial_{x_k}\left(\frac{\Phi^{(2)}(x,z)}{c_2^2} + \frac{1}{\omega^2}\big(k_1^2\Phi^{(1)}(x,z) - k_2^2\Phi^{(2)}(x,z)\big)\right) = \frac{1}{c_1^2}\partial_{x_k}\Phi^{(1)}(x,z).
\end{aligned}$$

Для правой части $\boldsymbol{f}(x,z) = a \times \operatorname{grad}\delta(x-z)$ получается решение

$$\boldsymbol{u}^{(i)}(x,z) = \frac{1}{c_2^2} a \times \operatorname{grad}_x \Phi^{(2)}(x,z).$$

Действительно, k-я компонента $\Gamma(x,y)(a \times \operatorname{grad}_y \delta(y-z))$ представляет собой смешанное произведение и может быть записана как

$$\langle a \times \operatorname{grad}_y \delta(y-z), \Gamma_k(x,y)\rangle = \langle \Gamma_k(x,y) \times a, \operatorname{grad}_y \delta(y-z)\rangle,$$

где $\Gamma_k(x,y)$ — k-я строка матрицы $\Gamma(x,y)$. Проинтегрируем, пользуясь равенством $\partial_{x_j}\Gamma(x,y) = -\partial_{y_j}\Gamma(x,y)$ и известными формулами векторного анализа:

$$\begin{aligned}
u_k^{(i)}(x,z) &= \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} (\Gamma_k(x,y) \times a)\partial_{y_j}\delta(y-z)\,dy = \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(\Gamma_k(x,z) \times a)_j \\
&= \operatorname{div}_x(\Gamma_k(x,z) \times a) = \langle \operatorname{rot}_x \Gamma_k(x,z), a\rangle = \frac{1}{c_2^2}\langle \operatorname{rot}_x(e_k\Phi^{(2)}(x,y)), a\rangle \\
&= \frac{1}{c_2^2}\langle \operatorname{grad}_x \Phi^{(2)}(x,y) \times e_k, a\rangle = \frac{1}{c_2^2}\langle a \times \operatorname{grad}_x \Phi^{(2)}(x,y), e_k\rangle.
\end{aligned}$$

В случае $\boldsymbol{f}(x,z) = a\delta(x-z)$, очевидно, $\boldsymbol{u}^{(i)}(x,z) = \Gamma(x,z)a$.

Решение (1.1), (3.1) естественно представить в виде

$$\boldsymbol{u}(x,z) = \boldsymbol{u}^{(i)}(x,z) + \boldsymbol{u}^{(s)}(x,z).$$

Для рассеянной волны $\boldsymbol{u}^{(s)}$ получается уравнение

$$-(\Delta^* + \omega^2)\boldsymbol{u}^{(s)} = \omega\boldsymbol{q}(x,\omega)(\boldsymbol{u}^{(i)} + \boldsymbol{u}^{(s)}),$$

откуда согласно (3.2) приходим к интегральному уравнению

$$\boldsymbol{u}^{(s)}(x,z) = \omega\int\limits_{\Omega}\Gamma(x,y)\boldsymbol{q}(y,\omega)(\boldsymbol{u}^{(i)}(y,z) + \boldsymbol{u}^{(s)}(y,z))\,dy. \tag{3.3}$$

Из разложения $\Gamma(x,y)$ в ряд Тейлора (см. доказательство теоремы 1) видно, что $\Gamma(x,y)$ имеет слабую особенность при $x=y$ (такую же, как $\Phi^{(j)}(x,y)$). Отсюда стандартным образом следуют разрешимость (например, в пространстве непрерывных функций) и гладкость решения вне Ω.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем утверждение в случае $\boldsymbol{f}(x,z) = \operatorname{grad}_x\delta(x-z)$. Пусть $\boldsymbol{q}^{(1)}(x,\omega)$ и $\boldsymbol{q}^{(2)}(x,\omega)$ — две различные функции, удовлетворяющие необходимым условиям, а $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и $\boldsymbol{u}^{(2)}$ — соответствующие решения. Запишем уравнение (3.3) для каждого из них, а затем вычтем одно из другого:

$$u_k^{(s1)}(x,z) - u_k^{(s2)}(x,z) = \omega\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\Gamma_{kj}(x,y)\big[g_j(y,\omega)\big(u_j^{(i)}(y,z) + u_j^{(s1)}(y,z)\big) + q_j^{(2)}(y,\omega)\big(u_j^{(s1)}(y,z) - u_j^{(s2)}(y,z)\big)\big]\,dy. \tag{4.1}$$

Здесь и далее мы используем обозначение $\boldsymbol{g}(x) = (g_1,g_2,g_3) := \boldsymbol{q}^{(1)} - \boldsymbol{q}^{(2)}$.

По предположению теоремы имеют место разложения

$$q_j^{(m)}(y,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{jn}^{(m)}(y)\omega^n, \quad m=1,2.$$

Используя разложения в ряд Тейлора

$$\Phi^{(1)}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik_1)^n|x-y|^{n-1}}{4\pi n!}, \quad \Phi^{(2)}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik_2)^n|x-y|^{n-1}}{4\pi n!},$$

запишем соответствующие разложения по ω для $u_j^{(i)}(y,z)$ и $\Gamma_{kj}(x,y)$:

$$u_j^{(i)}(y,z) = \partial_{y_j}\frac{1}{c_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik_1)^n|y-z|^{n-1}}{4\pi n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)(i\omega)^n(y_j-z_j)}{4\pi c_1^{n+2}n!|y-z|^{3-n}},$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{kj}(x,y) &= \frac{1}{c_2^2}\delta_{jk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\omega)^n|x-y|^{n-1}}{4\pi c_2^n n!} - \frac{1}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ik_1)^n-(ik_2)^n}{4\pi n!}\partial^2_{x_jx_k}|x-y|^{n-1}\\ &= \delta_{jk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\omega)^n|x-y|^{n-1}}{4\pi c_2^{n+2}n!}\\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(ik_1)^n-(ik_2)^n}{4\pi n!\omega^2}(n-1)\left((n-3)\frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|x-y|^{5-n}} + \frac{\delta_{jk}}{|x-y|^{3-n}}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, $u_j^{(i)}(y,z)$ и $\Gamma_{kj}(x,y)$ имеют следующую асимптотику при $\omega \to 0$:

$$u_j^{(i)}(y,\omega) = \frac{\alpha(z_j - y_j)}{|y-z|^3} + O(\omega), \tag{4.2}$$

$$\Gamma_{kj}(x,y) = \beta\frac{\delta_{jk}}{|x-y|} - \gamma\left(\frac{(-1)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|x-y|^3} + \frac{\delta_{jk}}{|x-y|}\right) + O(\omega) \tag{4.3}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \Omega$, $z \in \Omega_0$, где

$$\alpha = \frac{1}{4\pi c_1^2}, \quad \beta = \frac{1}{4\pi c_2^2}, \quad \gamma = \frac{(ik_1)^2 - (ik_2)^2}{8\pi\omega^2}.$$

Возвращаясь к уравнению (3.3), заметим, что

$$u_k^{(sm)}(x,z) = O(\omega), \quad m = 1,2, \; k = 1,2,3, \tag{4.4}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}^3$, $z \in \Omega_0$, поскольку такую асимптотику имеет правая часть

$$\omega \int\limits_{\Omega} \Gamma(x,y)\boldsymbol{q}^{(m)}(y,\omega)\boldsymbol{u}^{(i)}(y,z)\,dy.$$

Докажем по индукции, что $g_{jn} := q_{jn}^{(1)} - q_{jn}^{(2)} \equiv 0$, $j = 1,2,3$, для всех n. Предположим, что

$$g_{jn} \equiv 0 \text{ для всех } n < N \quad \text{и} \quad \boldsymbol{u}^{(s1)}(x,z) - \boldsymbol{u}^{(s2)}(x,z) = O(\omega^{N+1}), \tag{4.5}$$

и покажем, что

$$g_{jN} \equiv 0, \; j = 1,2,3, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{u}^{(s1)}(x,z) - \boldsymbol{u}^{(s2)}(x,z) = O(\omega^{N+2}),$$

где асимптотические равенства выполняются равномерно по $x \in \mathbb{R}^3$ и $z \in \Omega_0$. Заметим, что база индукции, т. е. (4.5) при $N = 0$, выполняется в силу (4.4). Для обоснования шага индукции разделим (4.1) на ω^{N+1}, положим $x = z$ и перейдем к пределу при $\omega \to 0$, используя асимптотические разложения (4.2) и (4.3):

$$\begin{aligned} &\lim_{\omega\to 0} \frac{u_k^{(s1)}(x,x) - u_k^{(s2)}(x,x)}{\omega^{N+1}} \\ &= \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} \left[\beta\frac{\delta_{jk}}{|x-y|} - \gamma\left(\frac{(-1)(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|x-y|^3} + \frac{\delta_{jk}}{|x-y|}\right)\right] g_{jN}(y)\frac{\alpha(x_j-y_j)}{|x-y|^3}\,dy, \\ &\qquad\qquad k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{4.6}$$

В силу предположения теоремы при $x \in \Omega_0$

$$0 = \alpha(\beta-\gamma)\int\limits_{\Omega} \frac{g_{kN}(y)(x_j-y_j)}{|x-y|^4}\,dy + \alpha\gamma\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3} g_{jN}(y)\frac{(x_j-y_j)^2(x_k-y_k)}{|x-y|^6}\,dy.$$

Для продолжения доказательства нам потребуется следующая лемма, доказательство которой мы отложим до конца доказательства теоремы.

Лемма 2. *Для произвольной интегрируемой вектор функции* $\boldsymbol{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ *с носителем в* Ω *равенство*

$$\alpha(\beta-\gamma)\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)(x_k-y_k)}{|y-x|^4}\,dy + \alpha\gamma\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{\infty} g_j(y)\frac{(x_j-y_j)^2(x_k-y_k)}{|y-x|^6}\,dy = 0,$$
$$x\in\Omega_0,\quad k=1,2,3, \tag{4.7}$$

влечет $\boldsymbol{g}\equiv 0$.

В силу леммы 2 $g_{jN}\equiv 0$, $j=1,2,3$, т. е. $\boldsymbol{g}=O(\omega^{N+1})$, и, возвращаясь к уравнению (4.1), заключаем, что

$$\boldsymbol{u}^{(s1)}(x,z)-\boldsymbol{u}^{(s2)}(x,z)=O(\omega^{N+2}).$$

Тем самым индукционный шаг обоснован, а вместе в ним доказано первое утверждение теоремы.

Перейдем к случаю $\boldsymbol{f}(x,z)=a\times\operatorname{grad}_x\delta(x-z)$. В этом случае разложение $\boldsymbol{u}^{(i)}(y,z)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$u_j^{(i)}(y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)(i\omega)^n(a\times(y-z))_j}{4\pi c_2^{n+2}n!|y-z|^{3-n}}=\frac{\beta(a\times(z-y))_j}{|y-z|^3}+O(\omega),$$

а вместо уравнения (4.6) получаем

$$\lim_{\omega\to0}\frac{u_k^{(s1)}(x,x)-u_k^{(s2)}(x,x)}{\omega^{N+1}}=\beta(\beta-\gamma)\int\limits_{\Omega}\frac{g_{kN}(y)(a\times(x-y))_k}{|y-x|^4}\,dy$$
$$+\beta\gamma\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}g_{jN}(y)\frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)(a\times(x-y))_j}{|x-y|^6}\,dy. \tag{4.8}$$

При $a=e_1$ и $k=1$ уравнение (4.8) принимает вид

$$0=\beta\gamma\int\limits_{\Omega}\big(g_{3N}(y)-g_{2N}(y)\big)\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_3)}{|x-y|^6}\,dy.$$

Таким образом,

$$0=\partial^2_{x_kx_l}\int\limits_{\Omega}\big(g_{3N}(y)-g_{2N}(y)\big)\frac{x_j-y_j}{|x-y|^2}\,dy,$$

где k, l и j попарно различны. С учетом поведения ядра при больших $|x|$ имеем

$$0=\int\limits_{\Omega}(g_{3N}(y)-g_{2N}(y))\frac{x_j-y_j}{|x-y|^2}\,dy.$$

Продифференцируем это равенство по всем x_j и сложим результаты:

$$0=\int\limits_{\Omega}(g_{3N}(y)-g_{2N}(y))\left(\frac{3}{|x-y|^2}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2}{2|x-y|^4}\right)dy=\frac{5}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{(g_{3N}(y)-g_{2N}(y))}{|x-y|^2}\,dy.$$

Обращаясь к лемме 1, заключаем, что $g_{2N} \equiv g_{3N}$. Аналогично, полагая $a = e_2$ и $k = 2$, получаем $g_{1N} \equiv g_{3N}$. Наконец, при $a = e_1$ и $k = 2$ уравнение (4.8) принимает вид

$$0 = \beta(\beta-\gamma) \int\limits_{\Omega} \frac{g_{2N}(y)(-1)(x_3-y_3)}{|x-y|^4}\,dy = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{2}\,\partial_{x_3} \int\limits_{\Omega} \frac{g_{2N}(y)}{|x-y|^2}\,dy,$$

откуда по аналогии с предыдущим случаем получается, что $g_{kN} \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. В остальном доказательство аналогично предыдущему случаю.

Наконец, рассмотрим случай $\boldsymbol{f}(x,z) = a\delta(x-z)$. В этом случае разложение падающей волны $\boldsymbol{u}^{(i)}(y,z) = \Gamma(y,z)a$ имеет вид

$$u_j^{(i)}(y,z) = \beta\frac{a_j}{|y-z|} - \gamma\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{(-1)(y_j-z_j)(y_l-z_l)}{|y-z|^3} + \frac{\delta_{jl}}{|y-z|}\right)a_l + O(\omega).$$

Вместо (4.6) получается

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{u_k^{(s1)}(x,x) - u_k^{(s2)}(x,x)}{\omega^{N+1}} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{(\beta-\gamma)\delta_{jk}}{|x-y|} + \gamma\frac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|x-y|^3}\right) \times g_{jN}(y)\left(\frac{(\beta-\gamma)a_j}{|y-x|} + \gamma\frac{(y_j-x_j)\langle y-x,a\rangle}{|y-x|^3}\right)dy.$$

Раскроем скобки:

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{u_k^{(s1)}(x,x) - u_k^{(s2)}(x,x)}{\omega^{N+1}} = \int\limits_{\Omega}\frac{(\beta-\gamma)^2 a_k g_{kN}(y)}{|x-y|^2} + (\beta-\gamma)\gamma\frac{g_{kN}(y)(x_k-y_k)\langle x-y,a\rangle}{|x-y|^4} + (\beta-\gamma)\gamma\frac{(x_k-y_k)\sum\limits_{j=1}^{3}(x_j-y_j)g_{jN}(y)a_j}{|x-y|^4} + \gamma^2\frac{(x_k-y_k)\langle x-y,a\rangle\sum\limits_{j=1}^{3}(x_j-y_j)^2 g_{jN}(y)}{|x-y|^6}\,dy.$$

Вспомним предположение $q_1^{(m)} = q_2^{(m)} = q_3^{(m)}$, $m = 1, 2$, и, не теряя общности, предположим, что $a = e_1$, а $k = 2$:

$$0 = \int\limits_{\Omega}(2(\beta-\gamma)\gamma + \gamma^2)\frac{g_{2N}(y)(x_2-y_2)(x_1-y_1)}{|x-y|^4}\,dy.$$

Дифференцирование по x_3 приводит нас к уже изученному уравнению

$$0 = \int\limits_{\Omega} g_{2N}(y)\frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_3-y_3)}{|x-y|^6}\,dy.$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 2. Покажем, что левая часть (4.7) представляет собой производную по ∂_{x_k} от некоторой функции. Используя формулу

$$\frac{x_k-y_k}{|x-y|^m}=\frac{1}{2-m}\partial_{x_k}\frac{1}{|x-y|^{m-2}},$$

преобразуем второе слагаемое:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{g_j(y)(x_j-y_j)^2(x_k-y_k)}{|x-y|^6}=-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2\partial_{x_k}\frac{1}{|x-y|^4}$$
$$=-\frac{1}{4}\partial_{x_k}\left(\sum_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2\frac{1}{|x-y|^4}\right)+\frac{1}{4}\partial_{x_k}\left(\sum_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2\right)\frac{1}{|x-y|^4}$$
$$=-\frac{1}{4}\partial_{x_k}\left(\sum_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2\frac{1}{|x-y|^4}\right)+\frac{1}{2}\frac{g_k(y)(x_k-y_k)}{|x-y|^4}$$
$$=-\frac{1}{4}\partial_{x_k}\left(\sum_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2\frac{1}{|x-y|^4}\right)-\frac{1}{4}\partial_{x_k}\frac{g_k(y)}{|x-y|^2}.$$

Преобразуя аналогично первое слагаемое, получаем

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{2}\,\partial_{x_k}\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)}{|x-y|^2}\,dy+\frac{\alpha\gamma}{4}\,\partial_{x_k}\int\limits_{\Omega}\frac{\sum\limits_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2}{|x-y|^4}\,dy$$
$$+\frac{\alpha\gamma}{4}\,\partial_{x_k}\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)}{|x-y|^4}\,dy=0,$$

т. е.

$$\partial_{x_k}\left(\alpha(2\beta-\gamma)\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)}{|x-y|^2}\,dy+\alpha\gamma\int\limits_{\Omega}\frac{\sum\limits_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2}{|x-y|^4}\,dy\right)=0.$$

Это означает, что выражение в скобках постоянно вдоль прямых $x_l=\mathrm{const}$, $l\neq k$, а с учетом стремления обоих интегралов к нулю при $|x|\to\infty$, что это выражение просто равно нулю. Иначе говоря,

$$\alpha(2\beta-\gamma)\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)}{|x-y|^2}\,dy=-\alpha\gamma\int\limits_{\Omega}\frac{\sum\limits_{j=1}^{3}g_j(y)(x_j-y_j)^2}{|x-y|^4}\,dy,\quad k=1,2,3. \tag{4.9}$$

Правая часть от k не зависит, значит, для разностей g_k-g_l, $k\neq l$, выполнено равенство

$$\int\limits_{\Omega}\frac{g_k(y)-g_l(y)}{|x-y|^2}\,dy=0,$$

которое в силу леммы 1 означает $g_1\equiv g_2\equiv g_3$. Теперь равенство (4.9) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega}\frac{g_1(y)}{|x-y|^2}\,dy=0,$$

и еще одно обращение к лемме 1 завершает доказательство.

Авторы выражают благодарность рецензенту за конструктивную критику, способствовавшую улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riesz M.* Integrales de Riemann — Liouville et potentiels // Acta Szeged. 1938. V. 9. P. 1–42.
2. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.
3. *Лаврентьев М. М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 1. С. 32–35.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. *Бухгейм А. Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.
6. *Isakov V.* Inverse source problems. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1990.
7. *Рамм А. Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
8. *Бухгейм А. Л., Дятлов Г. В.* Единственность в одной обратной задаче определения памяти // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 526–533.
9. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 1 декабря 2001 г., окончательный вариант — 29 сентября 2003 г.

Бухгейм Александр Львович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bukhgeim@math.nsc.ru

Дятлов Глеб Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dyatlov@math.nsc.ru

Кардаков Виктор Борисович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008

Танцерев Евгений Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
tev@ngs.ru