Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.55

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО ШИЛОВУ УРАВНЕНИЙ

В. А. Литовченко

Аннотация: Установлена корректная разрешимость задачи Коши для параболических по Шилову уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, начальными данными которой являются обобщенные функции медленного роста. Для определенного класса уравнений сформулированы необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи Коши со свойствами по пространственной переменной, характерными для ее фундаментального решения. Полученные результаты характеризуются только порядком и показателем параболичности.

Ключевые слова: задача Коши, параболичность по Шилову, пространства типа S, мультипликатор.

Введение

В 50-х годах прошлого века Г. Е. Шилов предложил некоторое обобщение параболичности по Петровскому систем дифференциальных уравнений, которое со временем получило название параболичности по Шилову. Согласно этому обобщению параболическая система характеризуется порядком p и показателем параболичности h $(0 < h \leq p)$.

При использовании теорем типа Фрагмена — Линделефа [1] в качестве главного инструмента исследований возникла необходимость введения дополнительной характеристики — так называемого рода параболичности μ. Известно [1], что если $p = h$, то $\mu = 1$. Но когда $h < p$, за исключением случая $\mu \leq 1$, до сих пор не установлено, как выражается μ через p и h при условии, что последние являются точными характеристиками параболичности. Эта неопределенность рода параболичности естественным образом распространяется и на ряд результатов, полученных, например, в [2, 3].

В данной работе предлагается метод исследования свойств фундаментального решения задачи Коши для параболических по Шилову уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, который базируется на известной формуле Фаа де Бруно дифференцирования сложных функций. Благодаря этому методу установлена корректная разрешимость задачи Коши с начальными данными в пространствах обобщенных функций медленного роста.

1. Пространства типа S

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $x = (x_1; \dots; x_n)$, $y = (y_1; \dots; y_n)$ — его элементы, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, а $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на $\mathbb{R}^n$. Для произвольных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ положим

$$S_\alpha = \bigl\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists A > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists c_k > 0\, \forall q \in \mathbb{Z}_+^n\, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \bigl|x^q D_x^k \varphi(x)\bigr| \le c_k A^{|q|} q^{\alpha q}\bigr\};$$

$$S^\beta = \bigl\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists B > 0\, \forall q \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists c_q > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \bigl|x^q D_x^k \varphi(x)\bigr| \le c_q B^{|k|} k^{\beta k}\bigr\}; \quad (1)$$

$$S_\alpha^\beta = \bigl\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists B > 0\, \forall \{k; q\} \subset \mathbb{Z}_+^n\, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \bigl|x^q D_x^k \varphi(x)\bigr| \le c A^{|q|} B^{|k|} k^{\beta k} q^{\alpha q}\bigr\},$$

где $\mathbb{Z}_+^n$ — множество, состоящее из n-мерных векторов, координаты которых — неотрицательные целые числа; $D_x^m = \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$, $|m| = m_1 + \dots + m_n$, $m^{\gamma m} = m_1^{\gamma m_1} \dots m_n^{\gamma m_n}$, для $m \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\gamma > 0$.

Пространство S_α^β является нетривиальным при $\alpha + \beta \ge 1$ и состоит только из тех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют неравенству

$$\bigl|D_x^k \varphi(x)\bigr| \le c A^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

с положительными константами c, A и δ, зависящими только от φ [1].

Справедливы следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для $\{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta$ имеет место соотношение*

$$J_r(\xi) \equiv \int\limits_{\|x\| \le r} \varphi(x)\psi(x + \xi)\, dx \xrightarrow[r \to +\infty]{S_\alpha^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x + \xi)\, dx \equiv J(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

(*здесь через* $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \to \nu_0]{\Phi} \varphi_{\nu_0}$ *обозначен предел в смысле топологии пространства* Φ).

Доказательство. Согласно определению предела в пространстве S_α^β (см. [1]) достаточно проверить выполнение следующих условий:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n$ $\bigl|D_\xi^k (J_r(\xi) - J(\xi))\bigr| \overset{\xi \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n}{\underset{r \to +\infty}{\rightrightarrows}} 0$ (т. е. равномерно по $\xi \in \mathbb{K}$ стремится к нулю на каждом компакте $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}^n$);

II) $\exists c > 0$ $\exists A > 0$ $\exists B > 0$ $\forall \{q; k\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ $\forall r > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\bigl|\xi^q D_\xi^k J_r(\xi)\bigr| \le c A^{|k|} B^{|q|} k^{\beta k} q^{\alpha q}.$$

Учитывая тот факт, что $\{\varphi; \psi\} \subset S_\alpha^\beta$, и неравенство

$$\Bigl|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) D_\xi^k \psi(x + \xi)\, dx\Bigr| \le c \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, dx < +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

получаем

$$\bigl|D_\xi^k (J_r(\xi) - J(\xi))\bigr| \le \int\limits_{\|x\| > r} |\varphi(x)| \bigl|D_\xi^k \psi(x + \xi)\bigr|\, dx \le c \int\limits_{\|x\| > r} |\varphi(x)|\, dx \overset{\xi \in \mathbb{K}}{\underset{r \to +\infty}{\rightrightarrows}} 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,\ \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, условие I выполняется.

Условие II также выполняется, поскольку

$$\forall\{\varphi;\psi\}\subset S_\alpha^\beta\,\forall\{k;q\}\subset\mathbb{Z}_+^n\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n\,\forall r>0$$

$$\left|\xi^q D_\xi^k J_r(\xi)\right|\leq\sum_{|l|=0}^{|q|}C_q^l\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x^l\varphi(x)||(x+\xi)^{q-l}D_{x+\xi}^k\psi(x+\xi)|\,dx\right)$$

$$\leq cc_1B^{|k|}k^{\beta k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{\delta}{2}\|x\|^{1/\alpha}}\,dx\sum_{|l|=0}^{|q|}C_q^lA^{|q-l|}(q-l)^{\alpha(q-l)}\sup_{t>0}\left\{t^le^{-\frac{\delta}{2}t^{1/\alpha}}\right\}$$

$$\leq c_2A_1^{|q|}B^{|k|}k^{\beta k}q^{\alpha q},$$

где C_m^n — биномиальный коэффициент; c_2, A_1, B — положительные константы, не зависящие от k, q, r и ξ; c, A, B, δ — константы из соответствующих оценок типа (1), (2) для функций φ и ψ. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $\{\varphi,\psi\}\subset S_\alpha^\beta$, а $K(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leq r\}$, $r>0$, то для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ функция $\varphi(\cdot)\psi(\cdot+\xi)$ интегрируема на множестве $K(r)$ в смысле топологии пространства S_α^β.*

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом разбиение p множества $K(r)$ и для него рассмотрим верхнюю

$$J^*(p,\xi)=\sum_i\varphi\bigl(x_i^*\bigr)\psi\bigl(x_i^*+\xi\bigr)\Delta x_i,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

и нижнюю

$$J^{**}(p,\xi)=\sum_i\varphi\bigl(x_i^{**}\bigr)\psi\bigl(x_i^{**}+\xi\bigr)\Delta x_i,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

интегральные суммы Дарбу. Тогда для доказательства утверждения леммы 2 достаточно показать, что

$$|J^*(p,\xi)-J^{**}(p,\xi)|\xrightarrow[d\to0]{S_\alpha^\beta}0$$

(здесь d — максимальный из диаметров элементов p-разбиения множества $K(r)$), т. е. что

I) $\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \left|D_\xi^k(J^*(p,\xi)-J^{**}(p,\xi))\right|\overset{\xi\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{d\to0}{\rightrightarrows}}0;$

II) $\exists c>0\,\exists A>0\,\exists B>0\,\forall\{k;q\}\subset\mathbb{Z}_+^n\,\forall p\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\left|\xi^qD_\xi^k(J^*(p,\xi)-J^{**}(p,\xi))\right|\leq cA^{|q|}B^{|k|}k^{\beta k}q^{\alpha q}.$$

Условие I выполняется. Действительно, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, а также с учетом того, что $\{\varphi;\psi\}\subset S_\alpha^\beta$, получаем

$$\left|\sum_iD_\xi^k\bigl(\varphi\bigl(x_i^{**}\bigr)\psi\bigl(x_i^{**}+\xi\bigr)-\varphi\bigl(x_i^*\bigr)\psi\bigl(x_i^*+\xi\bigr)\bigr)\Delta x_i\right|\leq\sum_ic_i\bigl\|x_i^*-x_i^{**}\bigr\|\Delta x_i\xrightarrow[d\to0]{}0,$$

где c_i — положительные константы, не зависящие от $\xi\in\mathbb{R}^n$, а $k\in\mathbb{Z}_+^n$.

Проверим выполнение условия II. Поскольку $\{\varphi;\psi\}\subset S_\alpha^\beta$, для этих функций выполняется условие (1) с соответствующими константами c_i, A_i, B_i, $i\in$

$\{1;2\}$. Таким образом,

$$\forall \{k;q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \, \forall p$$

$$\left|\xi^q D_\xi^k J^*(p,\xi)\right| \le \sum_i \left(\sum_{|j|=0}^{|q|} C_q^i \left|(x_i^*)^{q-j}\varphi(x_i^*)\right| \left|(x_i^*+\xi)^j D^k_{(x_i^*+\xi)}\varphi(x_i^*+\xi)\right| \right) \Delta x_i$$

$$\le \sum_i \left(\sum_{|j|=0}^{|q|} C_q^i c_1 A_1^{|q-j|}(q-j)^{\alpha(q-j)} c_2 A_2^{|j|} B_2^{|k|} k^{\beta k} j^{\alpha j} \right) \Delta x_i \le c V_r A^{|q|} B_2^{|k|} q^{\alpha q} k^{\beta k}, \tag{3}$$

где $V_r = \operatorname{mes} K(r)$, а c, A, B_2 — положительные константы, не зависящие от k, q, ξ и разбиения p.

Аналогичным образом убеждаемся в том, что оценка (3) выполняется и для $J^{**}(p,\cdot)$.

Отсюда, учитывая неравенство

$$\left|\xi^q D_\xi^k \big(J^*(p,\xi) - J^{**}(p,\xi)\big)\right| \le \left|\xi^q D_\xi^k J^*(p,\xi)\right| + \left|\xi^q D_\xi^k J^{**}(p,\xi)\right|, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \ \{k;q\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

приходим к II, что и требовалось доказать.

Из этих лемм вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всех φ и ψ из S_α^β, а также $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $\varphi(\cdot)\psi(\cdot+\xi)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$ в смысле топологии пространства S_α^β.*

Обозначим через Φ' пространство, топологически сопряженное пространству $\Phi \in \left\{S_{\frac{1}{h}}; S_{\frac{1}{h}}^\beta, \beta \ge \frac{p-1}{h}\right\}$, где $h > 0$, $p \ge 1$.

Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in \Phi'$, а также свертку этой функции с функционалом типа функции φ из Φ (будем обозначать через $\varphi * f$) определим с помощью следующих соотношений [1]:

$$\langle F[f], F[\psi]\rangle = (2\pi)^n \langle f, \psi\rangle, \quad \langle \varphi * f, \psi\rangle = \langle f, \varphi * \psi\rangle, \quad \psi \in \Phi,$$

из которых получаем, что

$$\forall \varphi \in \Phi \, \forall f \in \Phi' \quad F[\varphi * f] = F[f]F[\varphi]. \tag{4}$$

Поскольку в пространстве S_α^β операция сдвига не только непрерывна, но и бесконечно дифференцируема [1], то имеет место

Следствие 1. *Для любых $f \in (S_\alpha^\beta)'$, $\varphi \in S_\alpha^\beta$ выполняется соотношение $\langle f, \varphi(\cdot+\xi)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in S_\alpha^\beta$, а $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Тогда для того чтобы $\varphi * f = \langle f, \varphi(\cdot+\xi)\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы f был действительнозначным функционалом.*

Доказательство. Принимая во внимание следствие 1, а также утверждение теоремы 1 и учитывая линейность и непрерывность функционала f, убеждаемся в том, что

$$\langle \langle f, \varphi(\cdot+\xi)\rangle, \psi\rangle = \overline{\left\langle f, \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(x)}\varphi(x+\xi)\,dx \right\rangle} = \langle f, \varphi * \psi\rangle = \langle \varphi * f, \psi\rangle, \quad \psi \in S_\alpha^\beta.$$

Теорема доказана.

2. Задача Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = (P(t,D_x)U)(t,x), \quad (t,x) \in \Omega \equiv (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где оператор $P(t,D_x) = \sum\limits_{|k|\le p} (-i)^{|k|} a_k(t) D_x^k$, $t > 0$, такой, что уравнение (5) является параболическим по Шилову равномерно по t с показателем параболичности h $(0 < h \le p)$, т. е.

$$\exists \delta_1 > 0\, \exists \delta_2 > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n\, \forall t > 0\, \mathrm{Re}\Big(\sum_{|k|\le p} a_k(t) x^k\Big) \le -\delta_1 \|x\|^h + \delta_2,$$

а $a_k(\cdot)$ — определенные на $(0;+\infty)$ ограниченные по модулю комплекснозначные функции.

Пусть $\theta_t(\cdot) = \exp\Big\{\int\limits_0^t P(\tau,\cdot)\,d\tau\Big\}$, $t > 0$, где $P(t,x) \equiv \sum\limits_{|k|\le p} a_k(t) x^k$, $(t,x) \in \Omega$.

Следующие вспомогательные утверждения характеризуют свойства этой функции.

Лемма 3. *Для любого $t > 0$ справедливо включение $\theta_t(\cdot) \in S_{\frac{1}{h}}^{\frac{p-1}{h}}$.*

Доказательство. Для упрощения изложения приведем схему доказательства в случае, когда $n = 2$ (используя метод математической индукции, эту схему нетрудно распространить и на случай произвольного натурального $n > 2$).

Согласно известной формуле Фаа де Бруно дифференцирования сложной функции

$$D_x^{k_1} f(\varphi(x)) = \sum_{p_1}^{k_1} \frac{k_1!}{q_1! j_1! \dots h_1!} \frac{d^{p_1} f(\varphi)}{d\varphi^{p_1}} \left(\frac{d\varphi(x)}{1!\,dx}\right)^{q_1} \left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!\,dx^2}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{d^{L_1}\varphi(x)}{L_1!\,dx^{L_1}}\right)^{h_1},$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad k_1 \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь знак суммы распространяется на все решения в целых неотрицательных числах уравнения $k_1 = q_1 + 2j_1 + \dots + L_1 h_1$, а $p_1 = q_1 + j_1 + \dots + h_1$), получаем, что

$$\big|D_x^k \theta_t(x)\big| \le \sum_{p_1}^{k_1} \frac{k_1!}{q_1! j_1! \dots h_1!} \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j \big|D_{x_2}^j \widehat{P}(t,x)\big| \big|D_{x_2}^{k_2-j} \theta_t(x)\big| \tag{6}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}_+^2$, где

$$\widehat{P}(t,x) \equiv \left(\int_0^t \frac{\partial P(\tau,x)}{1!\partial x_1}\,d\tau\right)^{q_1} \left(\int_0^t \frac{\partial^2 P(\tau,x)}{2!\partial x_1^2}\,d\tau\right)^{j_1} \times \dots \times \left(\int_0^t \frac{\partial^{L_1} P(\tau,x)}{L_1!\partial x_1^{L_1}}\,d\tau\right)^{h_1},$$
$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Используя формулу Фаа де Бруно еще раз, убедимся в том, что для любого $r \in \mathbb{Z}_+$

$$\big|D_{x_2}^r \theta_t(x)\big| \le \sum_{p_2}^{r} \frac{r!}{q_2! j_2! \dots h_2!} |\theta_t(x)| \left(\int_0^t \left|\frac{\partial P(\tau,x)}{1!\partial x_2}\right| d\tau\right)^{q_2} \times \dots$$
$$\times \left(\int_0^t \left|\frac{\partial^{L_2} P(\tau,x)}{L_2!\partial x_2^{L_2}}\right| d\tau\right)^{h_2}, \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$$

где $r = q_2 + 2j_2 + \dots + L_2h_2$, $p_2 = q_2 + j_2 + \dots + h_2$.

Далее,

$$e^{-t\rho/L\|x\|^h}\left(\int_0^t\left|\frac{\partial^\nu P(\tau,x)}{\nu!\partial x_2^\nu}\right|d\tau\right)^q$$

$$\le A^q\left[\sum_{|k|\le p}\int_0^t|a_k(\tau)|\,d\tau\left(\frac{qL}{\rho t}\right)^{\frac{|k|-\nu}{h}}\left(\begin{cases}\sup\limits_{\delta>0}\{\delta^{\frac{|k|-\nu}{h}}e^{-\delta}\}, & |k|\ge\nu,\\ 0, & |k|<\nu,\end{cases}\right)\right]^q$$

$$\le (A_1(qL)^{\frac{p-\nu}{h}}t^{1+\frac{\nu-\gamma}{h}})^q\left(\begin{cases}1, & p\ge\nu,\\ 0, & p<\nu,\end{cases}\right),\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad t>0,\quad (7)$$

где $\{\nu;L;q\}\subset\mathbb{Z}_+$, $\rho>0$, $\gamma\equiv\begin{cases}p, & 0<t<1,\\ 0, & t\ge1,\end{cases}$ а A_1 — положительная константа, не зависящая от t, x, L, ν и q.

Отсюда, учитывая условие параболичности для уравнения (5), а также неравенства

$$\frac{r!}{q_2!(j_2!)^2\dots(h_2!)^{L_2}}\le 2^{L_2r},\quad \sum_{p_2}^{r}1\le(2e)^r, \quad (8)$$

где $p_2 = q_2 + j_2 + \dots + h_2$, $r = q_2 + 2j_2 + \dots + L_2h_2$, находим

$$\left|D_{x_2}^r\theta_t(x)\right|\le A_2^r t^{\gamma_1+\frac{r-\gamma_2}{h}}\sum_{p_2}^{r}\frac{r!}{q_2!j_2!\dots h_2!}$$

$$\times\exp\left\{\int_0^t(\operatorname{Re}P(\tau,x)+\rho\|x\|^h)\,d\tau\right\}r^{\frac{pp_2-r}{h}}\left(\begin{cases}1, & p\ge L_2,\\ 0, & p<L_2,\end{cases}\right)$$

$$\le e^{\delta_2t}A_3^rt^{\gamma_1+\frac{r-\gamma_2}{h}}e^{-t\rho_1\|x\|^h}\sum_{p_2}^{r}\frac{r!r^{r-p_2}\cdot r^{\frac{pp_2-r}{h}}}{q_2!(j_2!)^2\dots(h_2!)^{L_2}}\left(\begin{cases}1, & p\ge L_2,\\ 0, & p<L_2,\end{cases}\right)$$

$$\le e^{\delta_2t}A_4^rt^{\gamma_1+\frac{r-\gamma_2}{h}}e^{-t\rho_1\|x\|^h}r^{\frac{p-1}{h}r},\quad r\in\mathbb{Z}_+,\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^2,\quad (9)$$

где A_4, ρ_1 — положительные постоянные, не зависящие от r, t и x, а $\gamma_1\equiv\begin{cases}r, & t\ge1,\\ 1, & 0<t<1,\end{cases}$ и $\gamma_2\equiv\begin{cases}pr, & 0<t<1,\\ 0, & t\ge1.\end{cases}$

Поскольку для $t>0$, $x\in\mathbb{R}^2$, $\{l;L;g;\eta\}\subset\mathbb{N}$ и $\rho_2\equiv\frac{\rho_1}{2}$

$$e^{-\frac{t\rho_2}{\eta}\|x\|^h}\left|\int_0^t\frac{\partial^{L+l}P(\tau,x)}{L!l!\partial x_1^L\partial x_2^l}\,d\tau\right|^g$$

$$\le A_5^g\left[\sum_{|k|\le p}\int_0^t|a_k(\tau)|\,d\tau\left(\frac{g\eta}{\rho_2t}\right)^{\frac{|k|-(L+l)}{h}}\left(\begin{cases}\sup\limits_{\delta>0}\{\delta^{\frac{|k|-(L+l)}{h}}e^{-\delta}\}, & |k|\ge L+l,\\ 0, & |k|<L+l,\end{cases}\right)\right]^g$$

$$\le (A_6(g\eta)^{\frac{p-(L+l)}{h}}t^{1+\frac{L+l-\gamma}{h}})^g\left(\begin{cases}1, & p\ge L+l,\\ 0, & p<L+l,\end{cases}\right)\quad (10)$$

(здесь A_6 — положительная константа, не зависящая от t, x, η, L, l и g), то, учитывая оценки типа (7) и (8), получаем, что для всех $\{\nu;m\}\subset\mathbb{Z}_+$

$$e^{-\frac{\rho_2t}{m}\|x\|^h}\left|D_{x_2}^\nu\left(\left(\int_0^t\frac{\partial^LP(\tau,x)}{L!\partial x_1^L}\,d\tau\right)^g\right)\right|$$

$$\le \sum_{p_3}^{\nu} \frac{\nu!}{q!j!\dots\mu!} \left(\begin{cases} \frac{g!}{(g-p_3)!} e^{-\frac{\rho_2 t}{m(s+1)}\|x\|^h} \left| \int\limits_0^t \frac{\partial^L P(\tau,x)}{L!\partial x_1^L}\, d\tau \right|^{g-p_3}, & g \ge p_3, \\ 0, & g < p_3, \end{cases} \right)$$

$$\times \left(e^{-\frac{\rho_2 t}{m(s+1)}\|x\|^h} \left| \int\limits_0^t \frac{\partial^{L+1} P(\tau,x)}{L!\partial x_1^L \partial x_2}\, d\tau \right|^q \right) \times \dots$$

$$\times \left(e^{-\frac{\rho_2 t}{m(s+1)}\|x\|^h} \left| \int\limits_0^t \frac{\partial^{L+s} P(\tau,x)}{L!s!\partial x_1^L \partial x_2^s}\, d\tau \right|^\mu \right) \le 2^g \sum_{p_3}^{\nu} \frac{\nu! p_3! \nu^{\nu-p_3}}{q!(j!)^2\dots(\mu!)^s}$$

$$\times \left(\begin{cases} (A_1((g-p_3)m(s+1))^{\frac{p-L}{h}} t^{1+\frac{L-\gamma}{h}})^{g-p_3}, & g \ge p_3 \quad \text{и} \quad p \ge L, \\ 0, & g < p_3 \quad \text{или} \quad p < L, \end{cases} \right)$$

$$\times A_6^{p_3} t^{p_3 + \frac{Lp_3+\nu-\gamma p_3}{h}} (\nu m(s+1))^{\frac{pp_3-(Lp_3+\nu)}{h}} \left(\begin{cases} 1, & p \ge L+s, \\ 0, & p < L+s, \end{cases} \right)$$

$$\le A_7^g A_8^\nu t^{\frac{\nu}{h}+(1+\frac{L-\gamma}{h})g} m^{\frac{p-L}{h}g-\frac{\nu}{h}} g^{\frac{p-L}{h}g} \nu^{\frac{p-1}{h}\nu} \left(\begin{cases} 1, & g \ge \nu \quad \text{и} \quad p \ge L, \\ 0, & g < \nu \quad \text{или} \quad p < L, \end{cases} \right), \tag{11}$$

где $\nu = g+2j+\dots+s\mu$, $p_3 = g+j+\dots+\mu$, а A_7, A_8 — положительные константы, не зависящие от t, x, m, ν, L и g.

Таким образом,

$$e^{-t\rho_2\|x\|^h} \left| D_{x_2}^j \widehat{P}(t,x) \right|$$

$$\le \sum_{\nu_1=0}^{j} C_j^{\nu_1} \left(e^{-\frac{t\rho_2}{L_1}\|x\|^h} \left| D_{x_2}^{j-\nu_1} \left(\left(\int\limits_0^t \frac{\partial P(\tau,x)}{\partial x_1}\, d\tau \right)^{q_1} \right) \right| \right) \times \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} C_{\nu_1}^{\nu_2}$$

$$\times \left(e^{-\frac{t\rho_2}{L_1}\|x\|^h} \left| D_{x_2}^{\nu_1-\nu_2} \left(\left(\int\limits_0^t \frac{\partial^2 P(\tau,x)}{2!\partial x_1^2}\, d\tau \right)^{j_1} \right) \right| \right) \times \dots \times \sum_{\nu_{L_1-1}=0}^{\nu_{L_1-2}} C_{\nu_{L_1-2}}^{\nu_{L_1-1}}$$

$$\times \left(e^{-\frac{t\rho_2}{L_1}\|x\|^h} \left| D_{x_2}^{\nu_{L_1-2}-\nu_{L_1-1}} \left(\left(\int\limits_0^t \frac{\partial^{L_1-1} P(\tau,x)}{(L_1-1)!\partial x_1^{L_1-1}}\, d\tau \right)^{\mu_1} \right) \right| \right)$$

$$\times \left(e^{-\frac{t\rho_2}{L_1}\|x\|^h} \left| D_{x_2}^{\nu_{L_1-1}} \left(\left(\int\limits_0^t \frac{\partial^{L_1} P(\tau,x)}{L_1!\partial x_1^{L_1}}\, d\tau \right)^{h_1} \right) \right| \right)$$

$$\le A_7^{p_1} A_8^j j^{\frac{p-1}{h}j} k_1^{\frac{pp_1-k_1}{h}} L_1^{\frac{pp_1-(k_1+j)}{h}} t^{\frac{j+k_1}{h}+p_1(1-\frac{\gamma}{h})}$$

$$\times \left(\sum_{\nu_1=0}^{j} C_j^{\nu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} C_{\nu_1}^{\nu_2} \cdots \sum_{\nu_{L_1-1}=0}^{\nu_{L_1-2}} C_{\nu_{L_1-2}}^{\nu_{L_1-1}} \right)$$

$$\times \left(\begin{cases} 1, & p \ge L_1, \\ 0, & p < L_1, \end{cases} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,\ j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12}$$

Отсюда и из неравенств (6) и (9), учитывая, что

$$\sum_{\nu_1=0}^{j} C_j^{\nu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\nu_1} C_{\nu_1}^{\nu_2} \cdots \sum_{\nu_{L_1-1}=0}^{\nu_{L_1-2}} C_{\nu_{L_1-2}}^{\nu_{L_1-1}} \le 2^{L_1 j},$$

приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned}\left|D_x^k\theta_t(x)\right| \le \sum_{p_1}^{k_1} \frac{k_1!k_1^{k_1-p_1}}{q_1!(j_1!)^2\dots(h_1!)^{L_1}} \\ \times \sum_{j=0}^{k_2} C_{k_2}^j A_7^{p_1} A_8^j j^{\frac{p-1}{h}j} k_1^{\frac{pp_1-k_1}{h}} p^{\frac{pp_1-(k_1+j)}{h}} t^{\frac{j+k_1}{h}+p_1(1-\frac{\gamma}{h})} \\ \times 2^{p_j} e^{\delta_2 t} A_4^{k_2-j} t^{\gamma_1+\frac{k_2-j-\gamma_2}{h}} (k_2-j)^{\frac{p-1}{h}(k_2-j)} e^{-t\rho_2\|x\|^h} \\ \le e^{\delta_2 t} A_9^{|k|} t^{\frac{(1-\gamma)}{h}|k|+\gamma_3} k_1^{\frac{p-1}{h}k_1} k_2^{\frac{p-1}{h}k_2} e^{-t\rho_2\|x\|^h},\end{aligned} \quad (13)$$

где $x\in\mathbb{R}^2$, $k\in\mathbb{Z}_+^2$, $t>0$, $\gamma_3\equiv\begin{cases} n, & 0<t<1,\\ |k|, & t\ge 1,\end{cases}$ а A_9 — положительная константа, не зависящая от x, t и k, что и требовалось доказать.

Лемма 4. $\forall\varphi\in\Phi\quad \theta_t(\cdot)\varphi(\cdot)\xrightarrow[t\to+0]{\Phi}\varphi(\cdot)$.

Доказательство. Пусть сначала $\Phi=S_{\frac{1}{h}}^{\beta}$, $\beta\ge\frac{p-1}{h}$. Тогда достаточно установить выполнение следующих условий:

I) $\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\quad D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x)) \overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{t\to+0}{\rightrightarrows}} D_x^k\varphi(x)$;

II) $\exists\delta_1>0\,\exists c_1>0\,\exists A_1>0\,\forall t\in(0;1)\,\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\,\forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\left|D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x))\right|\le c_1A_1^{|k|}k^{\beta k}e^{-\delta_1\|x\|^h}.$$

Заметим, что

$$D_x^k(\theta_t(x)\varphi(x))=\theta_t(x)D_x^k\varphi(x)+\sum_{|j|=1}^{|k|}C_k^jD_x^j\theta_t(x)D_x^{k-j}\varphi(x)\quad\forall k\in\mathbb{Z}_+^n,\forall x\in\mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Поскольку для каждого компактного множества $\mathbb{K}$ из $\mathbb{R}^n$

$$D_x^j\theta_t(x)D_x^{k-j}\varphi(x)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}0,\quad \theta_t(x)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}1$$

равномерно по $x\in\mathbb{K}$ для всех $|j|\in\{1;2;\dots;|k|\}$, условие I выполняется.

Докажем выполнение условия II. Так как $\varphi\in\Phi$, имеем

$$\exists\delta_0>0\,\exists c_0>0\,\exists A_0>0\,\forall k\in\mathbb{Z}_+^n\,\forall x\in\mathbb{R}^n\quad \left|D_x^k\varphi(x)\right|\le c_0A_0^{|k|}k^{\beta k}e^{-\delta_0\|x\|^h}. \quad (15)$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при получении оценки (13), и используя при этом в левых частях неравенств (7), (10)–(12) вместо $e^{-g(t)\|x\|^h}$ функцию $e^{-\delta_0c\|x\|^h}$, где $c\ne c(t)$, $t>0$, получим, что

$$\exists\delta_1>0\,\exists c_2>0\,\exists A_2>0\,\forall t\in(0;1)\,\forall j\in\mathbb{Z}_+^n\,\forall x\in\mathbb{R}^n$$
$$e^{-\delta_0\|x\|^h}\left|D_x^j\theta_t(x)\right|\le c_2A_2^{|j|}j^{\frac{p-1}{h}j}e^{-\delta_1\|x\|^h}.$$

Отсюда, учитывая (14) и (15), приходим к условию II.

В случае, когда $\Phi=S_{\frac{1}{h}}$, выполнение соответствующего условия II доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. *Функция $\theta_t(\cdot)$ дифференцируема по $t > 0$ в смысле топологии пространства Φ.*

Доказательство. Достаточно показать, что предельное соотношение

$$\Psi_{\Delta t}(t,x) \equiv \frac{1}{\Delta t}[\theta_{(t+\Delta t)}(x) - \theta_t(x)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} P(t,x)\theta_t(x)$$

выполняется в том смысле, что

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \; \forall t > 0$: $D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x) \overset{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n}{\underset{\Delta t \to 0}{\rightrightarrows}} D_x^k(P(t,x)\theta_t(x))$;

II) $\forall t > 0 \,\exists c_3 > 0 \,\exists A_3 > 0 \,\exists \delta_3 > 0 \,\forall k \in \mathbb{Z}_+^n \;\forall x \in \mathbb{R}^n \;\forall \Delta t \in (-1;1)$, $|\Delta t| \le \frac{t}{2}$

$$\left| D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x) \right| \le c_3 A_3^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_3 \|x\|^h},$$

если $\Phi = S_{\frac{1}{h}}^{\beta}$, $\beta \ge \frac{p-1}{h}$.

Функция $\theta_t(\cdot)$, $t > 0$, дифференцируема по t в обычном смысле, поэтому

$$\Psi_{\Delta t}(t,x) = P(t + \eta\Delta t, x)\theta_{(t+\eta\Delta t)}(x), \quad t + \eta\Delta t > 0, \; 0 < \eta < 1, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} D_x^k \Psi_{\Delta t}(t,x) = \sum_{|j|=0}^{|k|} C_k^j D_x^j P(t+\eta\Delta t, x) D_x^{k-j} \theta_{(t+\eta\Delta t)}(x), \\ t + \eta\Delta t > 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n. \end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку

$$D_x^j P(t+\eta\Delta t, x) D_x^{k-j}\theta_{(t+\eta\Delta t)}(x) \overset{x \in \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n}{\underset{\Delta t \to 0}{\rightrightarrows}} D_x^j P(t,x) D_x^{k-j}\theta_t(x),$$

из (16) получаем условие I.

Выполнение условия II становится очевидным, исходя из (16), если учитывать неравенство типа (13), а также то, что функции $a_j(\cdot)$, $|j| \in \{0;1;\dots;p\}$, ограничены по модулю.

В случае, когда $\Phi = S_{\frac{1}{h}}$, выполнение соответствующего условия II доказывается аналогично. Лемма доказана.

Учитывая, что оператор F^{-1} является непрерывным в пространстве S_α^β [1], из утверждения леммы 5 приходим к такому следствию.

Следствие 2. $\forall t > 0 \quad F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\theta_t(\cdot)\right] = \frac{\partial}{\partial t}F^{-1}[\theta_t(\cdot)]$.

Если для уравнения (5) задать начальное условие

$$U(t,\cdot)|_{t=0} = f, \tag{17}$$

где $f \in \left(S_{\frac{p-1}{h}}^{1/h}\right)'$, то под решением задачи Коши (5), (17) будем понимать функцию $U(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, дифференцируемую по t и p раз дифференцируемую по x, которая удовлетворяет уравнению (5) и начальному условию (17) в том смысле, что $U(t,\cdot) \overset{\left(S_{\frac{p-1}{h}}^{1/h}\right)'}{\underset{t \to +0}{\longrightarrow}} f$.

Пусть $G_t(\cdot) \equiv F^{-1}[\theta_t(x)](t,\cdot)$, $t > 0$. Из леммы 3 получаем, что $G_t(\cdot) \in S_{\frac{p-1}{h}}^{1/h}$, $t > 0$.

Имеет место

Теорема 3. *Пусть f — действительнозначный функционал из пространства $\left(S^{1/h}_{\frac{p-1}{h}}\right)'$. Тогда для задачи Коши (5), (17) существует единственное дифференцируемое по t, бесконечно дифференцируемое по x решение, удовлетворяющее условиям:*

1) $F\left[\frac{\partial}{\partial t}U\right] = \frac{\partial}{\partial t}F[U]$, $t > 0$;
2) $U(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in \Omega$.

Доказательство. Из теоремы 2, следствия 1 и леммы 5, учитывая, что преобразования Фурье (как прямое, так и обратное) являются непрерывными в пространствах типа S, следует, что $U(t,x) = \langle f, G_t(x+\xi)\rangle$, $(t,x) \in \Omega$, — обычная функция, дифференцируемая по t и бесконечно дифференцируемая по x. Поскольку $G_t(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (5), приходим к выводу, что

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} - P(t, D_x)\right\}(G_t(x) * f) = \left\{\frac{\partial G_t(x)}{\partial t} - P(t, D_x)G_t(x)\right\} * f = 0.$$

Таким образом, функция $U(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in \Omega$, удовлетворяет уравнению (5) в обычном понимании. Тот факт, что она удовлетворяет начальному условию (17), следует непосредственно из леммы 4.

Из того, что

$$\frac{\partial U(t,\cdot)}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}G_t(\cdot)\right) * f, \quad f \in \left(S^{1/h}_{\frac{p-1}{h}}\right)', \ t > 0,$$

учитывая следствие 2, а также равенство (4), получаем

$$\forall t > 0 \quad F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] = F[f] \cdot F\left[\frac{\partial}{\partial t}G_t(\cdot)\right] = F[f] \cdot \frac{\partial}{\partial t}(F[G_t(\cdot)])$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(F[G_t(\cdot) * f]) = \frac{\partial}{\partial t}F[U].$$

Таким образом, условие 1 теоремы 3 выполняется.

Отметим, наконец, что единственность решения задачи Коши (5), (17), для которого выполняется условие 1 данной теоремы, как элемента из $\left(S^{1/h}_{\frac{p-1}{h}}\right)'$ при каждом фиксированном $t > 0$ следует из единственности решения $F[U](t,\cdot)$, $t > 0$, соответствующей двойственной по Фурье задачи Коши (в том, что $F[U]$ единственное, убеждаемся традиционно — методом от противного). Теорема доказана.

Далее, пусть полином $P(\cdot,\cdot)$ из уравнения (5), кроме условия параболичности по Шилову, удовлетворяет еще и следующему условию:

$$\exists \delta_1^* > 0 \, \exists \delta_2^* > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall t > 0 \quad \operatorname{Re} P(t,x) \geq -\delta_1^* \|x\|^h - \delta_2^* \tag{18}$$

(например, этому условию удовлетворяет равномерно по t параболическое по Петровскому уравнение).

Имеет место следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6. *Пусть $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, а $\hat{\theta}_t(x) \equiv \exp\left\{-\int_0^t P(\tau, x)\, d\tau\right\}$. Тогда*

$$\forall \varphi \in \Phi \, \exists t_0 \in (0,1) \, \forall t \in (0; t_0) \quad \hat{\theta}_t(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi.$$

Доказательство. Положим сначала $\Phi = S^{\beta}_{\frac{1}{h}}$. Тогда достаточно установить, что

$$\exists \delta_0 > 0\, \exists t_0 \in (0;1)\, \forall t \in (0;t_0)\, \exists c_1 > 0\, \exists A_1 > 0\, \forall l \in \mathbb{Z}^n_+\, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\left|D^l_x(\hat{\theta}_t(x)\varphi(x))\right| \le c_1 A_1^{|l|} l^{\beta l} e^{-\delta_0\|x\|^h}, \quad \varphi \in \Phi. \tag{19}$$

Для произвольного $l \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\left|D^l_x(\hat{\theta}_t(x)\varphi(x))\right| \le \sum_{|k|=0}^{|l|} C^k_l \left|D^k_x\hat{\theta}_t(x)\right| \left|D^{l-k}_x\varphi(x)\right|, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

и, поскольку $\varphi \in \Phi$, учитывая (2), имеем

$$\left|D^l_x(\hat{\theta}_t(x)\varphi(x))\right| \le c(2A)^{|l|} \sum_{|k|=0}^{|l|} (l-k)^{\beta(l-k)} \left(\left|D^k_x\hat{\theta}_t(x)\right| e^{-\delta\|x\|^h}\right). \tag{20}$$

Рассуждая так же, как и при обосновании неравенств (6)–(12), и учитывая при этом условие (18), получим

$$e^{-\delta\|x\|^h}\left|D^k_x\hat{\theta}_t(x)\right| \le c_2 A_2^{|k|} k^{\beta k} e^{-(\frac{\delta}{4} - t\delta^*_1)\|x\|^h}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,\ k \in \mathbb{Z}^n_+,$$

где c_2, A_2 — положительные константы, не зависящие от k и x.

Отсюда при $0 < t < \frac{\delta}{4\delta^*_1}$, а также из неравенства (20) приходим к утверждению (19).

Нетрудно убедиться в том, что данное утверждение справедливо и в случае, когда $\Phi = S_{\frac{1}{h}}$. Лемма доказана.

Следующая теорема характеризует мультипликаторы в пространстве Φ.

Теорема 4. *Для того чтобы функция $c(\cdot)$ была мультипликатором в пространстве Φ, необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного t, $0 < t < 1$, произведение $c(\cdot)\theta_t(\cdot)$ принадлежало Φ.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для этого установим выполнение следующих условий:

1) $\forall \varphi \in \Phi \quad c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;

2) $\forall \{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$, $\varphi_\nu \underset{\nu\to+\infty}{\xrightarrow{\Phi}} 0 \quad c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot) \underset{\nu\to+\infty}{\xrightarrow{\Phi}} 0$.

Согласно утверждению леммы 6 для любого $\varphi \in \Phi$ найдется $t_0 \in (0;1)$ такое, что для всех $t \in (0;t_0)$ отображение $c(\cdot)\varphi(\cdot) = (c(\cdot)\theta_t(\cdot))(\hat{\theta}_t(\cdot)\varphi_\nu(\cdot))$ принадлежит Φ как произведение функций из Φ. Таким образом, условие 1 выполняется.

Для доказательства условия 2 в случае, когда $\Phi = S^{\beta}_{\frac{1}{h}}$, достаточно показать, что

I) $\left|D^k_x(c(x)\varphi_\nu(x))\right| \overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{\nu\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}^n_+$;

II) $\exists \delta > 0\ \exists c_1 > 0\ \exists A_1 > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z}^n_+\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|D^k_x(c(x)\varphi_\nu(x))\right| \le c_1 A_1^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta\|x\|^h}.$$

Поскольку $\varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\xrightarrow{\Phi}} 0$, имеем

(a) $\left|D^k_x\varphi_\nu(x)\right| \overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{\nu\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}^n_+$;

(б) $\left|D_x^k \varphi_\nu(x)\right| \leq c_0 A_0^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_0 \|x\|^h}$, $x \in \mathbb{R}^n$, для любых $\nu \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, где c_0, A_0, δ_0 — положительные константы, которые не зависят от x, k и ν.

Условие I выполняется. Действительно, согласно условию (а) для любого $k \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left|D_x^k (c(x)\varphi_\nu(x))\right| \leq \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \sup_{x\in\mathbb{K}} \left\{\left|D_x^l c(x)\right|\right\} \left|D_x^{k-l}\varphi_\nu(x)\right| \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows}} 0.$$

Докажем выполнение условия II. Благодаря (б) и рассуждениям, проведенным при доказательстве неравенства (19), получаем

$$\left|D_x^l (\hat{\theta}_t(x)\varphi_\nu(x))\right| \leq c_2 A_2^{|l|} l^{\beta l} e^{-(\frac{\delta_0}{4} - t\delta_1^*)\|x\|^h},$$

где c_2, A_2 — положительные константы, которые не зависят от $l \in \mathbb{Z}_+^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$, а $0 < t < \frac{\delta_0}{4\delta_1^*}$.

Отсюда, учитывая, что $c(\cdot)\theta_t(\cdot) \in \Phi$, $t \in (0;1)$, получаем

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\, \forall x \in \mathbb{R}^n : &\left|D_x^k (c(x)\varphi_\nu(x))\right| \\ &\leq \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \left|D_x^{k-l}(c(x)\theta_t(x))\right| \left|D_x^l(\hat{\theta}_t(x)\varphi_\nu(x))\right| \leq c_2 c_3 e^{-(\frac{\delta_0}{4} - t\delta_1^*)\|x\|^h} \\ &\quad\times \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l A_2^{|l|} l^{\beta l} A_3^{|k-l|} (k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_3\|x\|^h} \leq c_4 A_4^{|k|} k^{\beta k} e^{-\delta_4\|x\|^h}, \end{aligned}$$

где c_4, A_4, δ_4 — положительные константы, не зависящие от ν, k и x. Таким образом, доказано выполнение условия II.

В случае, когда $\Phi = S_{\frac{1}{h}}$, выполнение условия II доказывается аналогично. Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (5) *является равномерно по* t *параболическим по Шилову, для которого выполняется условие* (18). *Тогда для того чтобы задача Коши* (5), (17) *была корректно разрешимой* (*т. е. имела единственное решение, непрерывно зависящее от начальных данных*) *и*

1) *ее решение* $U(t,\cdot)$ *при каждом фиксированном* $t > 0$ *принадлежало пространству* $F[\Phi]$;

2) $\frac{\partial}{\partial t} F[U] = F\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]$, $t > 0$,

необходимо и достаточно, чтобы $F[f]$ *был мультипликатором в пространстве* Φ. *При этом всегда будет иметь место равенство* $U(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in \Omega$.

Доказательство. Поскольку нас интересуют решения уравнения (5), которые при каждом фиксированном $t > 0$ являются элементами пространства $F[\Phi]$ и по t удовлетворяют условию 2 данной теоремы, учитывая тот факт, что отображения $F(F^{-1}) : S_\alpha^\beta \longrightarrow S_\beta^\alpha$, $F(F^{-1}) : S_\beta \longrightarrow S^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, взаимно однозначны и непрерывны [1, с. 155], получаем эквивалентность уравнения (5) уравнению

$$\frac{\partial \widetilde{U}(t,\xi)}{\partial t} = P(t,\xi)\widetilde{U}(t,\xi), \quad (t,\xi) \in \Omega \tag{21}$$

(здесь $\widetilde{V} = F[V]$), причем начальное условие (17) будет выполняться только тогда, когда

$$\widetilde{U}(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\Phi'} \tilde{f}. \tag{22}$$

Таким образом, вопрос о корректной разрешимости задачи Коши (5), (17) в пространстве $F[\Phi]$ эквивалентен вопросу о корректной разрешимости задачи Коши (21), (22) в пространстве Φ.

Необходимость. Установим, что если задача Коши (21), (22) корректно разрешима, то $\tilde{f}$ — мультипликатор в Φ.

Отметим, что уравнение (21) — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, общее решение которого имеет вид

$$\widetilde{U}(t,\xi) = c(\xi)\theta_t(\xi), \quad (t,\xi) \in \Omega. \tag{23}$$

Поскольку $\widetilde{U}(t,\cdot) \in \Phi$ при каждом фиксированном $t > 0$, согласно теореме 4 функция $c(\cdot)$ является мультипликатором в пространстве Φ.

Учитывая утверждение леммы 4, из условия (22) и равенства (23) находим, что

$$\forall\varphi \in \Phi \quad \langle c(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle \tilde{f}(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle.$$

Отсюда на основании единственности решения задачи Коши (21), (22) получаем, что $\tilde{f}$ — регулярный функционал, порожденный мультипликатором в пространстве Φ. Необходимость доказана.

Достаточность следует из теоремы 3 и теоремы 1 из [4].

Заметим, наконец, что решение U задачи Коши (5), (17) непрерывно зависит от начальных данных задачи, поскольку соответствующее решение $\widetilde{U}$ обладает таким свойством, а F^{-1} — непрерывный оператор из Φ в $F[\Phi]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Городецкий В. В., Житарюк И. В.* О скорости локализации решений задачи Коши для уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 697–699.
4. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97, № 6. С. 949–952.

Статья поступила 10 октября 2002 г.

Литовченко Владислав Антонович
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
математический факультет, кафедра математического моделирования,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина
vladlit@chnu.cv.ua