Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 519.21

ГАУССОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ

Н. С. Аркашов, И. С. Борисов

Аннотация: Изучается гауссовская аппроксимация процессов частных сумм стационарно связанных случайных величин, имеющих структуру так называемых скользящих средних независимых одинаково распределенных наблюдений. В частности, получены оценки скорости сходимости в принципах инвариантности как в форме Штрассена, так и Донскера в случае, когда в качестве предельного выступает фрактальное броуновское движение с произвольным параметром Хёрста.

Ключевые слова: процесс частных сумм скользящих средних, фрактальное броуновское движение, параметр Хёрста, принцип инвариантности.

1. Введение

Работа посвящена аппроксимации процессов частных сумм так называемых скользящих средних с помощью некоторого класса гауссовских процессов. Интерес к подобным предельным теоремам наблюдается уже давно (см., например, $[1,2]$) и объясняется выраженной прикладной направленностью рассматриваемых моделей. Отметим, что определенные ниже скользящие средние, построенные по последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, представляют собой конструктивно заданную последовательность стационарно связанных случайных величин. При этом форма зависимости этих величин может быть достаточно сильной. В частности, классическое сильное (или равномерно сильное) перемешивание здесь уже может не иметь места (см. $[1,3]$).

В [4] изучалась аппроксимация указанного процесса частных сумм с помощью фрактального броуновского движения с параметром Хёрста $H > 1/2$, где были получены оценки скорости сходимости в принципах инвариантности как в форме Штрассена, так и Донскера. В настоящей работе мы получим аналогичные оценки для всех $0 < H < 1$ в указанных принципах инвариантности, причем в принципе инвариантности в форме Штрассена мы несколько расширим класс аппроксимирующих гауссовских процессов. Кроме того, в принципе инвариантности Донскера при $H < 1/2$ мы приведем достаточные условия сходимости распределений нормированного процесса частных сумм скользящих средних к распределению фрактального броуновского движения с более слабыми, чем в [2], моментными ограничениями на исходную последовательность случайных величин.

Пусть $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, где $\mathbb{Z}$ — множество

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–00902, 03–01–00459), а также гранта INTAS 03–51–5018.

всех целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$, определенных по формуле

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{1}$$

которые называются *скользящими средними* исходной последовательности $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$ (см. [5]). Следующее хорошо известное условие гарантирует сходимость с вероятностью 1 ряда в правой части (1):

$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 < \infty. \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем условие (2) предполагается выполненным. Определим процесс частных сумм скользящих средних из (1):

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n = 1, 2, \dots .$$

Введенный случайный процесс мы будем аппроксимировать с помощью следующего гауссовского процесса, заданного на полуоси $[0, \infty)$:

$$B_H(t) = \sigma L_H^{-1/2}\left(\int_0^\infty ((t+s)^{H-1/2}g(t+s) - s^{H-1/2}g(s))\,d\widetilde{W}(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2}g(t-s)\,dW(s)\right), \tag{3}$$

где

$$\sigma^2 = \mathbf{D}B_H(1), \quad L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds,$$

$\widetilde{W}(s)$ и $W(s)$ — две независимые версии стандартного винеровского процесса, $0 < H < 1$, g — медленно меняющаяся функция, обладающая следующими свойствами:

a) $g(x)$ дифференцируема на промежутке $[0, \infty)$, при этом

$$g'(x) = o(g(x)/x), \quad x \to \infty;$$

b) $g(x)$, $g'(x)$ монотонные, и $g(x)$ сохраняет знак на полуоси $[0, \infty)$.

Нетрудно убедиться в том, что, например, кратные логарифмы в положительных или отрицательных степенях удовлетворяют приведенным условиям.

Заметим, что если $g \equiv 1$ в (3), то случайный процесс $B_H(t)$ представляет собой так называемое фрактальное броуновское движение (см. [6]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

В дальнейшем за этим процессом мы закрепим обозначение B_H^0. Легко видеть, что случай $H = 1/2$ соответствует винеровскому процессу. Отметим известное свойство H-однородности фрактального броуновского движения (см. [6]): для любого $\lambda > 0$ конечномерные распределения случайных процессов $\{B_H^0(\lambda t)\}$ и $\{\lambda^H B_H^0(t)\}$ совпадают. Кроме того, случайный процесс B_H^0 имеет стационарные приращения. Именно указанные свойства процесса B_H^0 и позволяют причислять его к классу объектов, называемых *фракталами*, у которых любой «вырезанный» фрагмент (скажем, часть траектории) в известном смысле *подобен* целому объекту.

Обозначим

$$A_m = \begin{cases} a_0 + \dots + a_m & \text{при } m \ge 0 \text{ и } A_{-1} = 0, \\ -(a_{m+1} + \dots + a_{-1}) & \text{при } m < -1. \end{cases} \tag{4}$$

Для каждого фиксированного $n \ge 0$ и некоторого $\alpha > 2$, не зависящего от n, при $|l| \to \infty$ предполагается выполненным следующее условие:

$$|A_{n+l} - A_l| = O(|l|^{-1/\alpha}), \tag{5}$$

при этом, как следует из (2),

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} (A_{n+l} - A_l)^2 < \infty. \tag{6}$$

Отметим, что ряд в (6) совпадает с величиной $\mathbf{D}S_n$ (подробнее см. п. 2.2). Заметим также, что если при $l \to \infty$ величина $|A_{n+l} - A_l|$ стремится к нулю *монотонно*, то соотношение (5) следует из (6), поскольку в этом случае $|A_{n+l} - A_l| = o(|l|^{-1/2})$.

Замечание 1. В дальнейшем мы будем говорить о *нетривиальных* (или *содержательных*) оценках близости процессов S_n и $B_H(n)$ в случае, когда при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$S_n - B_H(n) = o(\sqrt{\mathbf{D}B_H(n)}) \quad \text{п. н.}$$

Иначе говоря, содержательные оценки близости должны быть *значимо меньше* самих случайных величин. Но тогда, как будет установлено при доказательстве теоремы 1, такое же утверждение справедливо и для гауссовского аналога процесса S_n, когда случайные величины ξ_k в (1) стандартные нормальные (при этом величина $\mathbf{D}S_n$ не изменится), т. е. в приведенном выше асимптотическом соотношении можно считать, что S_n — гауссовская последовательность. Отсюда следует, что, во-первых, при $n \to \infty$ распределения случайных величин $S_n/\sqrt{\mathbf{D}B_H(n)}$ слабо сходятся к стандартному нормальному закону, а во-вторых, случайная величина $S_n/\sqrt{\mathbf{D}S_n}$ при всех n имеет стандартное нормальное распределение, откуда и вытекает следующее *необходимое* для указанной аппроксимации условие:

$$\mathbf{D}S_n \sim \mathbf{D}B_H(n), \quad n \to \infty.$$

Предложение 1. *Имеет место соотношение*

$$\mathbf{D}B_H(n) \sim \sigma^2 g^2(n) n^{2H}, \quad n \to \infty.$$

С помощью предложения 1 отмеченное выше необходимое условие принимает вид

$$\mathbf{D}S_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{n-k} - A_{-k})^2 \sim \sigma^2 g^2(n) n^{2H}, \quad n \to \infty. \tag{H}$$

Наряду с последовательностью $\{A_m\}$, введенной в (4), нам понадобятся следующие обозначения, также связанные с исходными коэффициентами $\{a_i\}$:

$$\Delta_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \big(A_{n+m} - A_m - \sigma L_H^{-1/2}(n+m+1)^{H-1/2} g(n+m+1) + \sigma L_H^{-1/2}(m+1)^{H-1/2} g(m+1)\big)^2;$$

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{n} \big(A_{n-m} - A_{-m} - \sigma L_H^{-1/2}(n-m+1)^{H-1/2} g(n-m+1)\big)^2;$$

$$\Delta_n^{(3)} = \sum_{m>n} (A_{n-m} - A_{-m})^2; \quad \Delta_n = \Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)};$$

$$\Delta_{\alpha,n}^{+} = \sum_{m=1}^{\infty} \max\{m^{1/\alpha}, n^{1/\alpha}\} |a_{n+m} - a_m|;$$

$$\Delta_{\alpha,n}^{-} = \sum_{m=1}^{\infty} \max\{m^{1/\alpha}, n^{1/\alpha}\} |a_{n-m} - a_{-m}|; \quad \Delta_{\alpha,n} = \Delta_{\alpha,n}^{+} + \Delta_{\alpha,n}^{-}.$$

Всюду в дальнейшем запись вида $\psi(t) = O(f(t))$ п. н., где $\psi(t)$ — некоторый случайный процесс, а $f(t)$ — некоторая неслучайная неотрицательная функция, понимается как выполнение неравенства $|\psi(t)| \le Cf(t)$ при всех t, начиная с некоторого t_0 (вообще говоря, зависящего от элементарного исхода из множества полной меры), и некоторой неслучайной положительной постоянной C (которую мы будем называть константой, входящей в определение O-символа), возможно, абсолютной или зависящей от тех или иных параметров задачи, что будет отмечаться при формулировках утверждений.

Теорема 1. *Пусть для некоторого $\alpha > 2$ выполнено условие (5) и $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$. Тогда при $t \to \infty$ имеет место соотношение*

$$S_{[t]} - B_H(t) = \varepsilon(t)\Delta_{\alpha,[t]} + O\Big(\sqrt{\Delta_{[t]} \log t} + \sigma L_H^{-1/2}\big(\Upsilon_H^{1/2} + \Phi_H^{1/2} C_H\big)\sqrt{\log t}\Big) \text{ п. н.},$$

где $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$ п. н., причем при фиксированном распределении случайной величины ξ_0 эта сходимость равномерна по всем остальным параметрам задачи;

$$\Upsilon_H = \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s+1))^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\, ds,$$

$$\Phi_H = \frac{1}{4H}(g(1))^2 + \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s+1))^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\, ds,$$

если g возрастающая;

$$\Upsilon_H = \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s))^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\, ds,$$

$$\Phi_H = \frac{1}{4H}(g(0))^2 + (g(0))^2 \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\, ds,$$

если g убывающая; $C_H = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-kH} k^{1/2}$; при этом константа, входящая в определение O-символа, является абсолютной.

Замечание 2. В случае $H > 1/2$ и $g \equiv 1$ аналогичное теореме 1 утверждение доказано в [4], где, однако, не приведена конкретизация O-символа.

В нижеследующих утверждениях константа, входящая в определение O-символа, вообще говоря, зависит от последовательности $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Предложение 2. *Пусть последовательность $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$a_k = 0, \quad k < 0;$$

$$a_k - \sigma L_H^{-1/2}(k+1)^{H-1/2} g(k+1) + \sigma L_H^{-1/2} k^{H-1/2} g(k) = O(k^{\gamma-3/2} g(k)), \quad \gamma < H; \tag{7}$$

$$A_k - \sigma L_H^{-1/2}(k+1)^{H-1/2} g(k+1) = O(k^{\beta-1/2} g(k)), \quad 0 < \beta < H,$$

при $k \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$

(i) *если $H > 1/2$, то $\Delta_{\alpha,n} = O(g(n) n^{H-1/2+1/\alpha})$; $\Delta_n = O(g^2(n) n^{\max\{2\beta,2\gamma\}})$;*

(ii) *если $H < 1/2$, то $\Delta_{\alpha,n} = O(n^{1/\alpha})$; $\Delta_n = O(g^2(n) n^{\max\{2\beta,2\gamma\}})$;*

(iii) *если $H = 1/2$ и $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| = O(g(n))$ для возрастающей g или $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ для убывающей g, то $\Delta_{\alpha,n} = O(g(n) n^{1/\alpha})$ или $\Delta_{\alpha,n} = O(n^{1/\alpha})$ соответственно для возрастающей или убывающей g; $\Delta_n = O(g^2(n) n^{\max\{2\beta,2\gamma\}})$.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и предложения* 2. *Тогда при $t \to \infty$*

(i) *в случае $H > 1/2$ имеет место соотношение*

$$S_{[t]} - B_H(t) = o(g(t) t^{H-1/2+1/\alpha}) + O(t^{\max\{\beta,\gamma\}} g(t) \sqrt{\log t}) \quad \text{п. н.};$$

(ii) *в случае $H < 1/2$ имеет место соотношение*

$$S_{[t]} - B_H(t) = o(t^{1/\alpha}) + O(t^{\max\{\beta,\gamma\}} g(t) \sqrt{\log t}) \quad \text{п. н.};$$

(iii) *в случае $H = 1/2$ и возрастающей g имеет место соотношение*

$$S_{[t]} - B_H(t) = o(g(t) t^{1/\alpha}) + O(t^{\max\{\beta,\gamma\}} g(t) \sqrt{\log t}) \quad \text{п. н.};$$

(iv) *в случае $H = 1/2$ и убывающей g имеет место соотношение*

$$S_{[t]} - B_H(t) = o(t^{1/\alpha}) + O(t^{\max\{\beta,\gamma\}} g(t) \sqrt{\log t}) \quad \text{п. н.}$$

Замечание 3. Условие (7) влечет за собой выполнение условия (5). В пп. (i), (iii), (iv) следствия 1 имеют место нетривиальные оценки и выполняется условие (H). В п. (ii) содержательные оценки имеют место в случае $\alpha \geq 1/H$ и $g(t) \asymp 1$ при $t \to \infty$. В случае, когда $g(t) \to 0$ при $t \to \infty$, оценки будут содержательными при $\alpha > 1/H$.

В следующих утверждениях мы докажем принцип инвариантности в форме Донскера для рассматриваемых процессов, а также оценим соответствующую скорость сходимости (по поводу других предельных теорем для сумм скользящих средних см. [7]).

Определим нормированный процесс частных сумм на промежутке $[0,1]$:

$$Z_{n,H}(t) = \frac{S_{[nt]}}{n^H}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{D}S_n \sim \sigma^2 n^{2H}$ *при* $n \to \infty$. *Пусть, кроме того,* $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$, *где* $\alpha \geq 2$ *и* $\alpha H > 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *распределения случайных процессов* $Z_{n,H}(t)$ C*-сходятся в* $D[0,1]$ *к распределению фрактального броуновского движения* $B_H^0(t)$.

Напомним, что под C-сходимостью в $D[0,1]$ понимается слабая сходимость распределений измеримых (в топологии А. В. Скорохода) функционалов на $D[0,1]$, непрерывных в равномерной топологии в точках пространства $C[0,1]$ (см. [8]).

Замечание 4. В случае $H > 1/2$ вышеприведенное утверждение доказано в [4]. Необходимость условия $\mathbf{D}S_n \sim \sigma^2 n^{2H}$ в теореме 2 установлена в [2], где к тому же в случае $H < 1/2$ установлена указанная C-сходимость при несколько более жестких по сравнению с теоремой 2 моментных ограничениях.

Замечание 5. При выполнении условий следствия 1 в случае $H < 1/2$ и $\alpha = 1/H$ можно так построить процессы $Z_{n,H}(t)$ на одном вероятностном пространстве с фрактальным броуновским движением, что при $n \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|Z_{n,H}(t) - B_H^0(nt)/n^H\right| = o(1) \quad \text{п. н.}$$

Так как при любом n случайные процессы $B_H^0(nt)/n^H$ и $B_H^0(t)$ совпадают по распределению, из приведенного соотношения следует утверждение теоремы 2 для указанного частного случае при $H < 1/2$ и $\alpha = 1/H$.

Обозначим $\delta_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} \Delta_{[nt]}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия.*

(i) $H \geq 1/2$, $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 2$, *и* $a_i = 0$ *при всех* $i < 0$. *Кроме того, пусть для всех* $i \geq N \geq 1$ *имеют место неравенства* $a_i \geq a_{i+1} \geq 0$, $a_i \leq Ci^{H-3/2}$ *и* $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i| \leq C_1(n+1)^{H-1/2}$ *при* $n \geq 0$. *Тогда существует вероятностное пространство, на котором*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\left|Z_{n,H}(t) - B_H^0(t)\right| \geq n^{-H}\sqrt{(H+1)\log n}\Big(8\sqrt{2\Upsilon_H^0} + \sqrt{2\delta_n} + 2\sqrt{2}\sigma C_H\Big)$$
$$+ n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\big(C_1(2^{H+3/2}+1) + C(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\big)\Big)$$
$$\leq 6n^{-H} + C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(2+\alpha/(\alpha-1))$$

при всех $n \geq N$.

(ii) *Пусть* $H \leq 1/2$ *и* $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$ *для некоторого* $\alpha > 1/H$. *Кроме того, пусть* $a_i = 0$ *при всех* $i < 0$, $a_i \leq a_{i+1} \leq 0$ *и* $|a_i| \leq Ci^{H-3/2}$ *для всех* $i \geq N \geq 1$, *а также* $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i| \leq C_1$ *при* $n \geq 0$. *Тогда существует вероятностное пространство, на котором*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\left|Z_{n,H}(t) - B_H^0(t)\right| \geq n^{-H}\sqrt{(H+1)\log n}\Big(8\sqrt{2\Upsilon_H^0} + \sqrt{2\delta_n} + 2\sqrt{2}\sigma C_H\Big)$$
$$+ 5C_1 n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}} + Cn^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\Big)$$
$$\leq 6n^{-H} + 2C_\xi n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}} + C_\xi\alpha(\alpha-1)^{-1}n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}$$

при всех $n \geq N$, где C_ξ — константа, зависящая только от распределения ξ_0,

$$C_H = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kH} k^{1/2}, \quad \Upsilon_H^0 = \int_0^{\infty} ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 \, ds.$$

Отметим, что если $a_i = 0$ при всех $i < 0$ и, кроме того, $a_0 = \sigma L_H^{-1/2}$ и $a_i = \sigma L_H^{-1/2}((i+1)^{H-1/2} - i^{H-1/2})$ при $i > 0$, то $\Delta_n = \delta_n = 0$. Теперь мы получим оценки для δ_n при несколько более общих условиях на коэффициенты $\{a_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Заметим, что эти оценки имеют место при всех $H \in (0,1)$.

Предложение 3. *Пусть $a_i = 0$, $i < 0$. Тогда при $n \to \infty$*

(i) *если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bigl(A_k - \sigma L_H^{-1/2}(k+1)^{H-1/2}\bigr)^2 < \infty,$$

то $\delta_n = O(1)$;

(ii) *если*

$$\bigl|A_n - \sigma L_H^{-1/2}(n+1)^{H-1/2}\bigr| = O(n^{\beta-1/2}), \quad 0 < \beta < H,$$

и

$$\bigl|a_n - \sigma L_H^{-1/2}((n+1)^{H-1/2} - n^{H-1/2})\bigr| = O(n^{\gamma-3/2}), \quad \gamma < H,$$

то

$$\delta_n = O(n^{\max\{2\gamma, 2\beta\}}).$$

Замечание 6. При выполнении условий п. (i) или п. (ii) предложения 3 имеет место соотношение $n^{-H}\sqrt{\delta_n \log n} \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае мы получим содержательные оценки скорости сходимости в теореме 3.

Замечание 7. Пусть $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$. Тогда нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$n^{-1}\mathbf{D}S_n = n^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{n-k} - A_{-k})^2 = n^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(a_{k+1} + \dots + a_{k+n})^2$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+j}a_k - 2n^{-1}\sum_{j=1}^{n} j \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{k+j}a_k.$$

При этом в силу леммы Кронекера (см. [9, с. 328]) последняя двойная сумма в правой части этого равенства в пределе при $n \to \infty$ обращается в нуль. Так что при условии абсолютной суммируемости последовательности $\{a_k\}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{D}S_n = \sigma^2 = \Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Bigr)^2.$$

Если, кроме того, $\sigma^2 > 0$, то, очевидно, выполнено условие (H) при $H = 1/2$. Следовательно, в условиях теоремы 2 (т. е. если $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 2$) для *абсолютно суммируемых* коэффициентов $\{a_i\}$ имеет место указанная C-сходимость к винеровскому процессу, если только $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \neq 0$. Отметим, что при существовании четвертого момента случайной величины ξ_0 подобное утверждение следует из [2].

Например, вышесказанное применимо к простейшему частному случаю, когда $a_i = 0$ при всех $i < 0$ и $i > m$, где m — фиксированное натуральное число (в этом случае $\{X_j; j \geq 1\}$ являются m-зависимыми случайными величинами), и $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \neq 0$.

Замечание 8. При существовании второго момента ξ_0 в [10, с. 255 и 264] и [11, с. 146] приведены некоторые достаточные условия, обеспечивающие C-сходимость $Z_{n,1/2}$ к винеровскому процессу. В частности, в [10] содержится следующее дополнительное ограничение на последовательность коэффициентов $\{a_k\}$:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{|i|>l} a_i^2\Big)^{1/2} < \infty. \tag{8}$$

Очевидно, отсюда следует абсолютная суммируемость $\{a_i\}$, упомянутая в замечании 7. Далее, в [11] приведено следующее ослабление (8):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\Big(\sum_{i>l} a_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i>l} a_{-i}\Big)^2\Big) < \infty.$$

В частности, здесь уже допускается *условная* сходимость ряда $\sum a_i$. Отметим, что и в этом случае выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{D}S_n = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Big)^2,$$

которое, собственно, и требуется в теореме 2. В качестве примера можно взять коэффициенты $a_i = 0$ при $i \leq 0$ и $a_i = (-1)^i/i$ при $i \geq 1$ (см. [11]).

Однако если хвост ряда $\sum\limits_{|i|\geq k} a_i$ убывает достаточно медленно, то вышеприведенные два условия из [10, 11] могут не выполняться. Скажем, последовательность $a_i = \sigma_0(i^{-1/2} - (i+1)^{-1/2})$ при $i > 0$, $a_0 = \sigma_0$ и $a_i = 0$ при $i < 0$ им не удовлетворяет, но удовлетворяет условиям замечания 7, т. е. для данного набора $\{a_i\}$ имеет место указанная выше C-сходимость к винеровскому процессу (правда, при несколько более сильных моментных ограничениях, чем в [10, 11]).

2. Доказательства основных результатов

2.1. Доказательство предложения 1. Мы ограничимся случаем возрастающей функции g. Случай убывающей g рассматривается аналогично. Имеем

$$\mathbf{D}B_H(n) = \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} g^2(n)\left(\int_0^1 s^{2H-1} g^2(ns)/g^2(n)\,ds \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2} g(ns)/g(n))^2\,ds\right). \tag{9}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (9). В силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\int_0^1 s^{2H-1} g^2(ns)/g^2(n)\,ds \to 1/(2H), \quad n\to\infty.$$

Разобьем второй интеграл в правой части (9) на два: $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$. Оценим первый интеграл:

$$\int\limits_0^1 ((1+s)^{H-1/2} g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2} g(ns)/g(n))^2 \, ds$$

$$\leq 2 \int\limits_0^1 ((1+s)^{2H-1} g^2(2n)/g^2(n) + s^{2H-1}) \, ds;$$

при этом последовательность $\{g^2(2n)/g^2(n)\}$ ограничена. Следовательно, для функции под знаком исходного интеграла построена интегрируемая мажоранта. Поэтому в силу теоремы Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 ((1+s)^{H-1/2} g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2} g(ns)/g(n))^2 \, ds$$

$$= \int\limits_0^1 ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 \, ds. \quad (10)$$

Теперь оценим второй интеграл в указанном выше разбиении:

$$\int\limits_1^\infty ((1+s)^{H-1/2} g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2} g(ns)/g(n))^2 \, ds$$

$$\leq 2 \int\limits_1^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 g^2(n(1+s))/g^2(n) \, ds$$

$$+ 2 \int\limits_1^\infty s^{2H-1} (g(n(1+s)) - g(ns))^2/g^2(n) \, ds. \quad (11)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (11). Очевидно,

$$\int\limits_1^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 g^2(n(1+s))/g^2(n) \, ds \leq 2 \int\limits_1^\infty s^{2H-3} g^2(ns)/g^2(n) \, ds.$$

Рассмотрим второе слагаемое в (11). Столь же очевидно, что

$$\int\limits_1^\infty s^{2H-1} (g(n(1+s)) - g(ns))^2/g^2(n) \, ds \leq C \int\limits_1^\infty s^{2H-3} g^2(ns)/g^2(n) \, ds, \quad n \geq 1,$$

где C — некоторая положительная константа. Итак,

$$\int\limits_1^\infty ((1+s)^{H-1/2} g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2} g(ns)/g(n))^2 \, ds$$

$$\leq (4+2C) \int\limits_1^\infty s^{2H-3} g^2(ns)/g^2(n) \, ds. \quad (12)$$

Исследуем правую часть (12). Используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty s^{2H-3}g^2(ns)/g^2(n)\,ds = \lim_{n\to\infty}((g^2(n)n^{2H-2})^{-1}\int_n^\infty g^2(s)s^{2H-3}\,ds)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(2-2H-2ng'(n)/g(n))^{-1} = (2-2H)^{-1} = \int_1^\infty s^{2H-3}\lim_{n\to\infty} g^2(ns)/g^2(n)\,ds.$$

Таким образом, функции $\{s^{2H-3}g^2(ns)/g^2(n)\}_{n\geq1}$ равномерно интегрируемы. Тем самым мы построили интегрируемую мажоранту для последовательности функций

$$\{((1+s)^{H-1/2}g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2}g(ns)/g(n))^2\}_{n\geq1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty((1+s)^{H-1/2}g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2}g(ns)/g(n))^2\,ds$$

$$= \int_1^\infty((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds. \quad (13)$$

Из (10) и (13) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty((1+s)^{H-1/2}g(n(1+s))/g(n) - s^{H-1/2}g(ns)/g(n))^2\,ds$$

$$= \int_0^\infty((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds.$$

Лемма доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1. В целом мы будем следовать схеме доказательства соответствующего результата в [4].

Положим $n=[t]$. С помощью (6) нетрудно показать, что

$$S_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{n-k} - A_{-k})\xi_k.$$

Разобьем S_n на два слагаемых $\overline{S}_n$ и $\widetilde{S}_n$, где

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^\infty(A_{n+k} - A_k)\xi_{-k}, \quad \widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^\infty(A_{n-k} - A_{-k})\xi_k.$$

Положим

$$\gamma_k = W(k) - W(k-1),\ k=1,2,\dots, \quad \gamma_{-k} = \widetilde{W}(k+1) - \widetilde{W}(k),\ k=0,1,\dots,$$

где, как и выше, $W(s), \widetilde{W}(s)$ — две независимые версии стандартного винеровского процесса. Кроме того, обозначим

$$\overline{G}_n = \sum_{k=0}^\infty(A_{n+k} - A_k)\gamma_{-k}, \quad \widetilde{G}_n = \sum_{k=1}^\infty(A_{n-k} - A_{-k})\gamma_k, \quad G_n = \overline{G}_n + \widetilde{G}_n.$$

Эти величины — не что иное, как гауссовские аналоги сумм $\overline{S}_n$, $\widetilde{S}_n$ и S_n соответственно.

Известно (см. [12]), что если $\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 2$, то последовательности $\{\xi_k, \gamma_k; k \geq 1\}$ и $\{\xi_{-k}, \gamma_{-k}; k \geq 0\}$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = o(n^{1/\alpha}) \text{ п. н.}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{-k} = o(n^{1/\alpha}) \text{ п. н.} \tag{14}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что последовательности случайных величин $\{\xi_k, \gamma_k; k \in \mathbb{Z}\}$ заданы на одном вероятностном пространстве именно таким образом.

Лемма 1. *При $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|S_n - G_n| = o(\Delta_{\alpha,n}) \quad \textit{п. н.}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\overline{S}_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} (A_{n+k} - A_k)\xi_{-k}, \quad \overline{G}_n^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} (A_{n+k} - A_k)\gamma_{-k}, \quad \sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_{-i}, \quad k \geq 1.$$

Очевидно, что $\xi_{-k} = \sigma_{k+1} - \sigma_k$. Тогда, пользуясь формулой Абеля (т. е. дискретным аналогом формулы интегрирования по частям), получаем

$$\overline{S}_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i (a_i - a_{n+i}) + \sigma_{l+1}(A_{n+l} - A_l).$$

Совершенно аналогично выводим представление

$$\overline{G}_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \varrho_i (a_i - a_{n+i}) + \varrho_{l+1}(A_{n+l} - A_l),$$

где $\varrho_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma_{-i}, k \geq 1$. В этом случае

$$\overline{S}_n^{(l)} - \overline{G}_n^{(l)} = \sum_{i=1}^{l} \delta_i (a_i - a_{n+i}) + \delta_{l+1}(A_{n+l} - A_l),$$

где $\delta_m = \sigma_m - \varrho_m$. Из (14) и условия (5) следует, что при $l \to \infty$

$$\delta_{l+1}(A_{n+l} - A_l) \to 0 \quad \text{п. н.}$$

Так что с вероятностью 1 выполнено

$$\overline{S}_n - \overline{G}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i (a_i - a_{n+i}).$$

Далее, имеет место неравенство

$$|\overline{S}_n - \overline{G}_n| \leq \sup_{k \geq n} (k^{-1/\alpha} \max_{m \leq k} |\delta_m|) \Delta^{+}_{\alpha,n}.$$

Действительно,

$$|\overline{S}_n - \overline{G}_n| \le \sum_{k=1}^{n-1} |\delta_k||a_{n+k} - a_k| + \sum_{k=n}^{\infty} |\delta_k||a_{n+k} - a_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\delta_k}{n^{1/\alpha}} n^{1/\alpha} |a_{n+k} - a_k| + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta_k}{k^{1/\alpha}} k^{1/\alpha} |a_{n+k} - a_k|$$

$$\le \max\left\{ \sup_{k\le n} \frac{|\delta_k|}{n^{1/\alpha}}, \sup_{k\ge n} \frac{|\delta_k|}{k^{1/\alpha}} \right\} \Delta^+_{\alpha,n} \le \sup_{k\ge n} \left(\frac{\max_{m\le k} |\delta_m|}{k^{1/\alpha}} \right) \Delta^+_{\alpha,n}.$$

Так как при $n \to \infty$

$$\sup_{k\ge n} \left(\frac{\max_{m\le k} |\delta_m|}{k^{1/\alpha}} \right) = o(1) \quad \text{п. н.},$$

то $|\overline{S}_n - \overline{G}_n| = o(\Delta^+_{\alpha,n})$ п. н. Аналогичным образом получаем $|\widetilde{S}_n - \widetilde{G}_n| = o(\Delta^-_{\alpha,n})$ п. н. Следовательно,

$$|S_n - G_n| = o(\Delta_{\alpha,n}) \quad \text{п. н. при } n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение последовательность случайных величин

$$B_0 = 0, \quad B_n = \sigma L_H^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^{H-1/2} g(n-k+1) \gamma_k \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} ((n+k+1)^{H-1/2} g(n+k+1) - (k+1)^{H-1/2} g(k+1)) \gamma_{-k} \right), \quad n \ge 1.$$

Лемма 2. *При любом n величина B_n конечна с вероятностью* 1.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((n+k+1)^{H-1/2} g(n+k+1) - (k+1)^{H-1/2} g(k+1))^2 < \infty.$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((n+k+1)^{H-1/2} g(n+k+1) - (k+1)^{H-1/2} g(k+1))^2$$

$$\le 2 \sum_{k=0}^{\infty} ((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2})^2 g^2(n+k+1)$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{2H-1} (g(n+k+1) - g(k+1))^2. \quad (15)$$

Первый ряд в правой части (15) сходится в силу оценки

$$((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2})^2 = O(k^{2H-3}), \quad k \to \infty.$$

Второй ряд в правой части (15) также сходится, поскольку

$$(g(n+k+1) - g(k+1))^2 = O(g^2(k+1)/(k+1)^2), \quad k \to \infty,$$

а любая медленно меняющаяся функция мажорируется при достаточно больших значениях аргумента степенной функцией с произвольным сколь угодно малым положительным показателем (см., например, [13]). Лемма доказана.

Лемма 3. *При $n \to \infty$ имеет место соотношение*

$$|G_n - B_n| = O(\sqrt{\Delta_n \log n}) \quad \text{п. н.}$$

Доказательство. Имеем $\Delta_n = \mathbf{D}(G_n - B_n)$. Тогда в силу гауссовости $G_n - B_n$ получим

$$P(|G_n - B_n| \geq 2\sqrt{\Delta_n \log n}) \leq \exp\{-(2\sqrt{\Delta_n \log n})^2/(2\Delta_n)\} = n^{-2}.$$

Применив лемму Бореля — Кантелли, придем к требуемому.

Лемма 4. *При $n \to \infty$*

$$|B_n - B_H(n)| = O(\sigma L_H^{-1/2} \Upsilon_H^{1/2} \sqrt{\log n}) \quad \text{п. н.},$$

где

$$\Upsilon_H = \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s+1))^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\, ds,$$

если g возрастающая;

$$\Upsilon_H = \int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s))^2\, ds + \int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\, ds,$$

если g убывающая.

Доказательство. Обозначим

$$B_n^* = \sum_{k=1}^n (n-k+1)^{H-1/2} g(n-k+1)\gamma_k$$
$$+ \sum_{k=0}^\infty ((n+k+1)^{H-1/2} g(n+k+1) - (k+1)^{H-1/2} g(k+1))\gamma_{-k},$$

$$B^*(n) = \int_0^n (n-s)^{H-1/2} g(n-s)\, dW(s)$$
$$+ \int_0^\infty ((n+s)^{H-1/2} g(n+s) - s^{H-1/2} g(s)) d\widetilde{W}(s).$$

Величина B_n^* имеет следующее представление в виде стохастического интеграла:

$$\int_0^n (n-[s])^{H-1/2} g(n-[s])\, dW(s)$$
$$+ \int_0^\infty ((n+[s]+1)^{H-1/2} g(n+[s]+1) - ([s]+1)^{H-1/2} g([s]+1)) d\widetilde{W}(s).$$

Исследуем $\mathbf{D}(B_n^* - B^*(n))$. Имеем

$$\mathbf{D}(B_n^* - B^*(n)) \le \int_0^n ((n-s)^{H-1/2}g(n-s) - (n-[s])^{H-1/2}g(n-[s]))^2\,ds$$

$$+ 2\int_0^\infty (s^{H-1/2}g(s) - ([s]+1)^{H-1/2}g([s]+1))^2\,ds$$

$$+ 2\int_0^\infty ((n+s)^{H-1/2}g(n+s) - (n+[s]+1)^{H-1/2}g(n+[s]+1))^2\,ds. \quad (16)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (16):

$$\int_0^n ((n-[s])^{H-1/2}g(n-[s]) - (n-s)^{H-1/2}g(n-s))^2\,ds$$

$$\le 2\int_0^n (g(n-[s]))^2((n-[s])^{H-1/2} - (n-s)^{H-1/2})^2\,ds$$

$$+ 2\int_0^n (n-s)^{2H-1}(g(n-[s]) - g(n-s))^2\,ds. \quad (17)$$

Оценим первое слагаемое правой части (17). Воспользовавшись тем, что $s \le n - [n-s] < s+1$, получим неравенство

$$\int_0^n (g(n-[s]))^2((n-[s])^{H-1/2} - (n-s)^{H-1/2})^2\,ds$$

$$= \int_0^n (g(n-[n-s]))^2((n-[n-s])^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds$$

$$\le \int_0^n (g(n-[n-s]))^2((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds. \quad (18)$$

Оценим второе слагаемое правой части (17):

$$\int_0^n (n-s)^{2H-1}(g(n-[s]) - g(n-s))^2\,ds$$

$$= \int_0^n s^{2H-1}(g(n-[n-s]) - g(s))^2\,ds$$

$$\le \int_0^n s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\,ds. \quad (19)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое правой части (16):

$$\int_0^\infty (([s]+1)^{H-1/2}g([s]+1) - s^{H-1/2}g(s))^2\,ds$$

$$\le 2\int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2(g([s]+1))^2\,ds$$

$$+ 2\int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\,ds. \quad (20)$$

В свою очередь, третье слагаемое правой части (16) допускает оценку

$$\int_0^\infty ((n+s)^{H-1/2}g(n+s) - (n+[s]+1)^{H-1/2}g(n+[s]+1))^2\,ds$$

$$= \int_n^\infty (([s]+1)^{H-1/2}g([s]+1) - s^{H-1/2}g(s))^2\,ds$$

$$\le 2\int_n^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2(g([s]+1))^2\,ds + 2\int_n^\infty s^{2H-1}(g([s]+1) - g(s))^2\,ds. \quad (21)$$

Далее, замечаем, что $|g([s]+1)-g(s)| \le |g(s+1)-g(s)|$. Кроме того, $g([s]+1) \le g(s+1)$, если g возрастающая, а также $g([s]+1) \le g(s)$, если g убывающая. Объединяя оценки правых частей в (18)–(21), получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{D}(B_n^* - B^*(n)) \le 8\int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2(g(s+1))^2\,ds$$

$$+ 8\int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\,ds,$$

если g возрастающая;

$$\mathbf{D}(B_n^* - B^*(n)) \le 8\int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2(g(s))^2\,ds$$

$$+ 8\int_0^\infty s^{2H-1}(g(s+1) - g(s))^2\,ds,$$

если g убывающая. Покажем, что интеграл

$$\int_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2(g(s+1))^2\,ds$$

сходится. Действительно, $((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2 = O(s^{2H-3})$ и $g(s+1)/g(s) \to 1$ при $s \to \infty$. Поэтому интеграл $\int\limits_1^\infty s^{2H-3}(g(s))^2\,ds$ сходится (см. в [13] свойства медленно меняющихся функций), что влечет за собой сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s+1))^2\,ds.$$

Далее, применяя лемму Бореля — Кантелли, получаем требуемое.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [14]).

Лемма 5. *Пусть $\{\xi(t); 0 \le t \le 1\}$ — центрированный гауссовский процесс, причем $\xi(0) = 0$ и $\mathbf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 \le C|t-s|^{2H}$ для некоторого $H > 0$. Тогда для всех $x \ge 0$*

$$P(\sup_{t\in[0,1]} |\xi(t)| > x) \le 4\exp\bigl\{-C_H^{-2}x^2(8C)^{-1}\bigr\},$$

где $C_H = \sum\limits_{k=1}^\infty 2^{-kH}k^{1/2}$.

Лемма 6. *При $t \to \infty$ имеет место соотношение*

$$B_H(t) - B_H([t]) = O\bigl(\Phi_H^{1/2} C_H \sqrt{\log t}\bigr) \quad \text{п. н.},$$

где

$$\Phi_H = \frac{1}{4H}(g(1))^2 + \int\limits_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 (g(s+1))^2\,ds + \int\limits_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds,$$

если g возрастающая;

$$\Phi_H = \frac{1}{4H}(g(0))^2 + (g(0))^2 \int\limits_0^\infty ((s+1)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\,ds + \int\limits_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds,$$

если g убывающая, $C_H = \sum\limits_{k=1}^\infty 2^{-kH}k^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $t \in [n, n+1]$, $n \ge 0$. Обозначим

$$\xi(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{H-1/2} g(t-s)\,dW(s)$$

$$+ \int\limits_0^\infty ((t+s)^{H-1/2} g(t+s) - s^{H-1/2} g(s))\,d\widetilde{W}(s)$$

$$- \int\limits_0^n (n-s)^{H-1/2} g(n-s)\,dW(s) - \int\limits_0^\infty ((n+s)^{H-1/2} g(n+s) - s^{H-1/2} g(s))\,d\widetilde{W}(s).$$

Оценим $\mathbf{E}(\xi(v+n)-\xi(u+n))^2, u \le v$, где $u, v \in [0,1]$. Имеем

$$\mathbf{E}(\xi(v+n)-\xi(u+n))^2 \le \int\limits_{u+n}^{v+n} (v+n-s)^{2H-1}(g(v+n-s))^2\,ds$$

$$+ \int\limits_0^{u+n} ((v+n-s)^{H-1/2}g(v+n-s)-(u+n-s)^{H-1/2}g(u+n-s))^2\,ds$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} ((v+n+s)^{H-1/2}g(v+n+s)-(u+n+s)^{H-1/2}g(u+n+s))^2\,ds. \quad (22)$$

Для первого слагаемого в правой части (22) справедливо равенство

$$\int\limits_{u+n}^{v+n} (v+n-s)^{2H-1}(g(v+n-s))^2\,ds = \int\limits_0^{v-u} s^{2H-1}(g(s))^2\,ds.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{v-u} s^{2H-1}(g(s))^2\,ds \le \frac{1}{2H}(g(1))^2(v-u)^{2H}, \quad (23)$$

если g возрастающая, и

$$\int\limits_0^{v-u} s^{2H-1}(g(s))^2\,ds \le \frac{1}{2H}(g(0))^2(v-u)^{2H}, \quad (24)$$

если g убывающая.

Рассмотрим второе слагаемое правой части (22):

$$\int\limits_0^{u+n} ((v+n-s)^{H-1/2}g(v+n-s)-(u+n-s)^{H-1/2}g(u+n-s))^2\,ds$$

$$\le 2\int\limits_0^{u+n} (((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds$$

$$+ 2\int\limits_0^{u+n} s^{2H-1}(g(v-u+s)-g(s))^2\,ds. \quad (25)$$

Наконец, третье слагаемое в правой части (22) допускает оценку

$$\int\limits_0^{\infty} ((v+n+s)^{H-1/2}g(v+n+s)-(u+n+s)^{H-1/2}g(u+n+s))^2\,ds$$

$$\le 2\int\limits_{u+n}^{\infty} ((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds$$

$$+ 2\int\limits_{u+n}^{\infty} s^{2H-1}(g(v-u+s)-g(s))^2\,ds. \quad (26)$$

Объединяя правые части (25) и (26), получим оценку для суммы второго и третьего слагаемых в правой части (22):

$$2\int\limits_0^\infty((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds+2\int\limits_0^\infty s^{2H-1}(g(v-u+s)-g(s))^2\,ds. \tag{27}$$

Рассмотрим первый интеграл в (27):

$$\int\limits_0^\infty((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds$$
$$=(v-u)^{2H}\int\limits_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g((v-u)(s+1)))^2\,ds.$$

Отсюда следуют оценки

$$\int\limits_0^\infty((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds$$
$$\le(v-u)^{2H}\int\limits_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(s+1))^2\,ds, \tag{28}$$

если g возрастающая, и

$$\int\limits_0^\infty((v-u+s)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(v-u+s))^2\,ds$$
$$\le(v-u)^{2H}(g(0))^2\int\limits_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2\,ds, \tag{29}$$

если g убывающая.

Рассмотрим второй интеграл в (27):

$$\int\limits_0^\infty s^{2H-1}(g(v-u+s)-g(s))^2\,ds\le(v-u)^2\int\limits_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds. \tag{30}$$

Объединяя оценки (23), (24), (28)–(30), получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\xi(v+n)-\xi(u+n))^2\\
&\quad\le (v-u)^{2H}\left(\frac{1}{2H}(g(1))^2+2\int_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(s+1))^2\,ds\right)\\
&\qquad+2(v-u)^2\int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds\\
&\quad\le (v-u)^{2H}\left(\frac{1}{2H}(g(1))^2+2\int_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2(g(s+1))^2\,ds\right.\\
&\qquad\left.+2\int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds\right),
\end{aligned}$$

если g возрастающая, и

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}(\xi(v+n)-\xi(u+n))\\
&\quad\le (v-u)^{2H}\left(\frac{1}{2H}(g(0))^2+2(g(0))^2\int_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2\,ds\right)\\
&\qquad+2(v-u)^2\int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds\\
&\quad\le (v-u)^{2H}\left(\frac{1}{2H}(g(0))^2+2(g(0))^2\int_0^\infty((s+1)^{H-1/2}-s^{H-1/2})^2\,ds\right.\\
&\qquad\left.+2\int_0^\infty s^{2H-1}(g'(s))^2\,ds\right),
\end{aligned}$$

если g убывающая. Далее, пользуясь леммой 5, а также леммой Бореля — Кантелли (полагая $x=4\sqrt{2}(\Phi_H\log n)^{1/2}C_H$), получаем утверждение леммы.

Утверждение теоремы 1 следует из вышеприведенных лемм.

2.3. Доказательства предложения 2 и следствия 1.

Доказательство предложения 2. Сначала докажем п. (i).

Лемма 7. *Имеет место соотношение* $|a_k|=O(g(k)k^{H-3/2})$, $k\to\infty$.

Доказательство. Действительно,

$$|(k+1)^{H-1/2}g(k+1)-k^{H-1/2}g(k)|=|g(k+1)((k+1)^{H-1/2}-k^{H-1/2})$$

$$+k^{H-1/2}(g(k+1)-g(k))|\le g(k+1)|(k+1)^{H-1/2}-k^{H-1/2}|+k^{H-1/2}|g(k+1)-g(k)|.$$

Следовательно,

$$|(k+1)^{H-1/2}g(k+1)-k^{H-1/2}g(k)|=O(g(k)k^{H-3/2}),\quad k\to\infty.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 8. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k|=O(g(n)n^{H-1/2}),\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда g возрастает. Очевидно, существует такая константа C, что $|a_k|\le Cg(k+1)(k+1)^{H-3/2}$, $k\ge 0$, при этом последовательность $g(k)k^{H-3/2}$ монотонно убывает, начиная с некоторого достаточно большого N. Итак,

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k|\le C\sum_{k=1}^{n+1}g(k)k^{H-3/2}=\sum_{k=1}^{N}g(k)k^{H-3/2}+\sum_{k=N+1}^{n+1}g(k)k^{H-3/2}$$
$$\le\sum_{k=1}^{N}g(k)k^{H-3/2}+\int\limits_{N}^{n+1}g(x)x^{H-3/2}dx.\tag{31}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части равенства (31):

$$\int\limits_{N}^{n+1}g(x)x^{H-3/2}dx=g(n+1)\frac{(n+1)^{H-1/2}}{H-1/2}$$
$$-g(N)\frac{N^{H-1/2}}{H-1/2}-\int\limits_{N}^{n+1}\frac{x^{H-1/2}}{H-1/2}g'(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{N}^{n+1}g(x)x^{H-3/2}\left(1+\frac{xg'(x)}{(H-1/2)g(x)}\right)dx=g(n+1)\frac{(n+1)^{H-1/2}}{H-1/2}-g(N)\frac{N^{H-1/2}}{H-1/2}.$$

Можно считать, что N выбрано так, что $\left|\frac{xg'(x)}{(H-1/2)g(x)}\right|\le 1/2$ при $x\ge N$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{N}^{n+1}g(x)x^{H-3/2}\,dx\le 2g(n+1)\frac{(n+1)^{H-1/2}}{H-1/2}.$$

Случай убывающей g рассматривается совершенно аналогично. Лемма доказана.

Теперь оценим $\Delta_{\alpha,n}$. Прежде всего заметим, что

$$\Delta_{\alpha,n}=n^{1/\alpha}\sum_{k=-n}^{n-1}|a_k-a_{k+n}|+\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|.\tag{32}$$

Оценим первое слагаемое правой части (32). Имеем

$$n^{1/\alpha}\sum_{k=-n}^{n-1}|a_k-a_{k+n}|\le 2n^{1/\alpha}\sum_{k=0}^{2n-1}|a_k|=O(g(n)n^{H-1/2+1/\alpha}).$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (32):

$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|\le\sum_{k=n}^{2n-1}k^{1/\alpha}|a_k|+\sum_{k=2n}^{\infty}|a_k|(k^{1/\alpha}-(k-n)^{1/\alpha})$$

$$\le(2n-1)^{1/\alpha}ng(n)n^{H-3/2}+\sum_{k=2n}^{\infty}C_1k^{H-3/2}g(k)n(1/\alpha)(k-n)^{1/\alpha-1}$$

$$\le(2n-1)^{1/\alpha}ng(n)n^{H-3/2}+\sum_{k=n}^{\infty}C_1(k+n)^{H-3/2}g(k+n)n(1/\alpha)k^{1/\alpha-1}$$

$$\le(2n-1)^{1/\alpha}ng(n)n^{H-3/2}+\sum_{k=n}^{\infty}C_1k^{H-3/2}g(k)n(1/\alpha)k^{1/\alpha-1},\quad(33)$$

где C_1 — некоторая константа (см. лемму 7). Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (33). Имеем (см. доказательство леммы 8)

$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{H-3/2}g(k)k^{1/\alpha-1}\le\int_{n-1}^{\infty}x^{H-3/2+1/\alpha-1}g(x)dx=O(g(n)n^{H-3/2+1/\alpha}),\quad n\to\infty.$$

Стало быть,

$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|=O(g(n)n^{H-1/2+1/\alpha}),\quad n\to\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta_{\alpha,n}=O(g(n)n^{H-1/2+1/\alpha}).$$

Докажем п. (ii) предложения 2. Имеем $|a_k|=O(g(k)k^{H-3/2})$, $k\to\infty$ (доказательство такое же, как и в случае $H>1/2$). Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$. Оценим теперь $\Delta_{\alpha,n}$. Так же, как и в случае $H>1/2$, отдельно рассмотрим суммы

$$n^{1/\alpha}\sum_{k=-n}^{n-1}|a_k-a_{k+n}|,\quad\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|.\quad(34)$$

Для первой суммы в (34) оценка элементарна:

$$n^{1/\alpha}\sum_{k=-n}^{n-1}|a_k-a_{k+n}|\le 2n^{1/\alpha}\sum_{k=0}^{2n-1}|a_k|=O(n^{1/\alpha}),\quad n\to\infty.$$

Рассмотрим вторую сумму в (34). Имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty}k^{1/\alpha}|a_k-a_{k+n}|\le\sum_{k=n}^{2n-1}k^{1/\alpha}|a_k|+\sum_{k=2n}^{\infty}|a_k|(k^{1/\alpha}-(k-n)^{1/\alpha})$$

$$\le(2n-1)^{1/\alpha}\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k|+(2n)^{1/\alpha}\sum_{k=2n}^{\infty}|a_k|=O(n^{1/\alpha}),\quad n\to\infty.$$

Итак, $\Delta_{\alpha,n} = O(n^{1/\alpha})$, $n \to \infty$.

Докажем п. (iii) предложения 2. Ограничимся случаем, когда g — возрастающая функция. Случай убывающей g рассматривается аналогично п. (ii). Рассмотрим первую сумму в (34):

$$n^{1/\alpha} \sum_{k=-n}^{n-1} |a_k - a_{k+n}| \leq 2n^{1/\alpha} \sum_{k=0}^{2n-1} |a_k| = O(g(n)n^{1/\alpha}), \quad n \to \infty.$$

Теперь оценим вторую сумму в (34):

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{1/\alpha}|a_k - a_{k+n}| = \sum_{k=n}^{2n-1} k^{1/\alpha}|a_k| + \sum_{k=2n}^{\infty} |a_k|(k^{1/\alpha} - (k-n)^{1/\alpha})$$

$$\leq C(2n-1)^{1/\alpha} \sum_{k=n}^{2n-1} g(k)/k + C \sum_{k=n}^{\infty} g(k)/k((n+k)^{1/\alpha} - k^{1/\alpha})$$

$$\leq C(2n-1)^{1/\alpha} \sum_{k=n}^{2n-1} g(k)/k + Cn \sum_{k=n}^{\infty} g(k)k^{1/\alpha-2} = O(g(n)n^{1/\alpha}), \quad n \to \infty,$$

где C — некоторая константа (см. лемму 7). Итак, в условиях п. (iii)

$$\Delta_{\alpha,n} = O(g(n)n^{1/\alpha}),\ n \to \infty,\ \text{если } g \text{ возрастающая};$$

$$\Delta_{\alpha,n} = O(n^{1/\alpha}),\ n \to \infty,\ \text{если } g \text{ убывающая}.$$

Покажем, что для всех трех случаев $\Delta_n = O(g^2(n)n^{\max\{2\beta,2\gamma\}})$, $n \to \infty$. Введем обозначения

$$\alpha_0 = a_0 - \sigma L_H^{-1/2} g(1),$$

$$\alpha_n = a_n - \sigma L_H^{-1/2}((n+1)^{H-1/2}g(n+1) - n^{H-1/2}g(n)), \quad n \geq 1,$$

$$\beta_n = A_n - \sigma L_H^{-1/2}(n+1)^{H-1/2}g(n+1), \quad n \geq 0.$$

Заметим, что

$$\Delta_n = \sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2 + \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m^2. \tag{35}$$

Сначала рассмотрим второе слагаемое в правой части (35):

$$\sum_{m=0}^{n-1} \beta_m^2 \leq C \sum_{k=1}^{n} k^{2\beta-1} g^2(k) = O(n^{2\beta} g^2(n)), \quad n \to \infty,$$

где C — некоторая константа (см. (7)). Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части (35):

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2 \leq \sum_{m=0}^{n-1} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2 + \sum_{m=n}^{\infty} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2$$

$$\leq 2 \sum_{m=0}^{2n-1} \beta_m^2 + \sum_{m=n}^{\infty} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2. \tag{36}$$

Аналогично предыдущему

$$\sum_{m=0}^{2n-1} \beta_m^2 = O(n^{2\beta} g^2(n)), \quad n \to \infty.$$

Далее, имеем

$$|\beta_{n+m} - \beta_m| \le \sum_{k=m+1}^{m+n} |\alpha_k| \le C_1 n g(m) m^{\gamma - 3/2},$$

где C_1 — некоторая константа (см. (7)). Следовательно,

$$\sum_{m=n}^{\infty} (\beta_{n+m} - \beta_m)^2 \le C_1^2 n^2 \sum_{m=n}^{\infty} g^2(m) m^{2\gamma-3} = O(g^2(n) n^{2\gamma}), \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\Delta_n = O(g^2(n) n^{\max\{2\beta, 2\gamma\}}), \quad n \to \infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

Следствие 1 непосредственно вытекает из предложения 2 и теоремы 1.

2.4. Доказательство теоремы 2. Введем обозначения

$$A_{k,n}(t) = n^{-H} \sum_{j=-k+1}^{-k+[nt]} a_j, \quad V_n^2 = \mathbf{D} S_n.$$

Тогда справедливо представление

$$Z_{n,H}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{k,n}(t) \xi_k.$$

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 9 [1, с. 456]. *Для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство*

$$|a_{k+1} + \dots + a_{k+n}| \le \left(4V_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \left(1 + \frac{1}{2V_n} \right) \right)^{1/2}.$$

Лемма 10. *Для всех $1 \ge t \ge \tau \ge 0$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\mathbf{E} Z_{n,H}(t) Z_{n,H}(\tau) \to \mathbf{E} B_H^0(t) B_H^0(\tau).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}(Z_{n,H}(t) - Z_{n,H}(\tau))^2 = n^{-2H} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-i+1}^{-i+[nt]-[n\tau]} a_j \right)^2$$

$$= \frac{([nt] - [n\tau])^{2H}}{n^{2H}} \frac{V_{[nt]-[n\tau]}^2}{([nt] - [n\tau])^{2H}}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{E}(Z_{n,H}(t) - Z_{n,H}(\tau))^2 \to \sigma^2 (t - \tau)^{2H} = \mathbf{E}\big(B_H^0(t) - B_H^0(\tau)\big)^2.$$

Тогда с учетом сходимости вторых моментов одномерных проекций процессов $Z_{n,H}(t)$ приходим к равенству

$$2\mathbf{E} Z_{n,H}(t) Z_{n,H}(\tau) = \mathbf{E}(Z_{n,H}(t))^2 + \mathbf{E}(Z_{n,H}(\tau))^2$$

$$- \mathbf{E}(Z_{n,H}(t) - Z_{n,H}(\tau))^2 \to 2\mathbf{E} B_H^0(t) B_H^0(\tau).$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любых $1 \geq t \geq \tau \geq 0$ существует такая положительная постоянная K, зависящая только от $\{a_i\}$, что*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau))^2 \leq K\frac{([nt]-[n\tau])^{2H}}{n^{2H}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau))^2 = \frac{([nt]-[n\tau])^{2H}}{n^{2H}}\frac{V^2_{[nt]-[n\tau]}}{([nt]-[n\tau])^{2H}}.$$

Пользуясь тем, что $V_n^2/n^{2H} \to \sigma^2$, $n \to \infty$, получаем утверждение леммы.

Лемма 12 [9, с. 86]. *Пусть $\{X_k\}_{k=1,\dots,n}$ — независимые центрированные случайные величины, $\mathbf{E}|X_k|^\alpha < \infty$ для любого k, где $\alpha \geq 2$. Положим*

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad M_{\alpha,n} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}|X_k|^\alpha, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k^2.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|S_n|^\alpha \leq c(\alpha)\big(M_{\alpha,n} + B_n^{\alpha/2}\big),$$

где $c(\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от α.

Лемма 13. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{E}|Z_{n,H}(t)-Z_{n,H}(\tau)|^\alpha \leq C\left(\frac{[nt]-[n\tau]}{n}\right)^{\alpha H},$$

где C — константа, зависящая от распределения ξ_0, α и $\{a_i\}$.

Доказательство. Из леммы Фату и леммы 12 следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau))\xi_k\Big|^\alpha \\ \leq c(\alpha)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau)|^\alpha\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha + \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau))^2\Big)^{\alpha/2}\Big) \\ \leq c(\alpha)(1+\mathbf{E}|\xi_0|^\alpha)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(A_{k,n}(t)-A_{k,n}(\tau))^2\Big)^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующим элементарным неравенством:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|b_k|^\gamma \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|b_k|\Big)^\gamma, \quad \gamma \geq 1.$$

Применив лемму 11, получим наше утверждение.

Лемма 14. *Пусть $1 \geq t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq 0$. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathbf{E}|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha/2}|Z_{n,H}(t_2)-Z_{n,H}(t_1)|^{\alpha/2} \leq C(t_3-t_2)^{\alpha H},$$

где C — положительная константа, зависящая от α, $\{a_i\}$ и распределения ξ_0.

Доказательство. С помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\mathbf{E}|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha/2}|Z_{n,H}(t_2)-Z_{n,H}(t_1)|^{\alpha/2}$$
$$\le (\mathbf{E}|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha})^{1/2}(\mathbf{E}|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha})^{1/2}$$
$$\le \frac{C_1}{n^{\alpha H}}([nt_3]-[nt_2])^{\alpha H/2}([nt_2]-[nt_1])^{\alpha H/2} \le \frac{C_1}{n^{\alpha H}}([nt_3]-[nt_1])^{\alpha H}$$
$$\le C_1(t_3-t_1+1/n)^{\alpha H},$$

где C_1 — константа из леммы 13. Если $t_3-t_1\ge 1/n$, то из предыдущего неравенства вытекает оценка

$$\mathbf{E}|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha/2}|Z_{n,H}(t_2)-Z_{n,H}(t_1)|^{\alpha/2}\le C_1 2^{\alpha H}(t_3-t_1)^{\alpha H}.$$

Если $t_3-t_1<1/n$, то

$$\mathbf{E}(|Z_{n,H}(t_3)-Z_{n,H}(t_2)|^{\alpha/2}|Z_{n,H}(t_2)-Z_{n,H}(t_1)|^{\alpha/2})=0,$$

поскольку либо t_1 и t_2, либо t_3 и t_2 лежат в одном интервале $[(i-1)/n, i/n)$. Лемма доказана.

Из леммы 14 следует плотность семейства распределений процессов $\{Z_{n,H}\}_{n\ge 1}$, если $\alpha H>1$ (см. [10]).

Лемма 15 [4]. *Пусть $\{b_{ni}; n\ge 1, i\in\mathbb{Z}\}$ — массив действительных чисел и $\{\zeta_{ni}; n\ge 1, i\in\mathbb{Z}\}$ — массив случайных величин, удовлетворяющих следующим условиям.*

L1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} b_{ni}^2=1.$

L2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{i\in\mathbb{Z}}|b_{ni}|=0.$

L3. *Для каждого $n\ge 1$ последовательность $\{\zeta_{ni}, i\in\mathbb{Z}\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевые средние и единичные дисперсии.*

L4. $\lim\limits_{K\to\infty}\sup\limits_{n\ge 1}\mathbf{E}\zeta_{n0}^2 I(|\zeta_{n0}|>K)=0.$

Тогда $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} b_{ni}\zeta_{ni}$ при $n\to\infty$ сходится по распределению к стандартной нормальной случайной величине.

Лемма 16. *При $n\to\infty$ конечномерные распределения случайных процессов $Z_{n,H}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $B_H^0(t)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i Z_{n,H}(t_i)$ сходится по распределению к $\sum\limits_{i=1}^{l} c_i B_H^0(t_i)$ для любого конечного набора чисел $\{c_i; i=1,\dots,l\}$. Итак, сначала отметим, что

$$z_n\equiv\sum_{i=1}^{l} c_i Z_{n,H}(t_i)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{l} c_i A_{k,n}(t_i)\xi_k.$$

Далее (см. лемму 10),

$$\mathbf{E}z_n^2 = \sum_{i,j=1}^{l} c_i c_j \mathbf{E}(Z_{n,H}(t_i)Z_{n,H}(t_j)) \to \sum_{i,j=1}^{l} c_i c_j \mathbf{E}\big(B_H^0(t_i)B_H^0(t_j)\big)$$

$$= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{l} c_i B_H^0(t_i)\right)^2, \quad n \to \infty.$$

Обозначим

$$\delta^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{l} c_i B_H^0(t_i)\right)^2, \quad z_{1n} = z_n/\delta.$$

Тогда

$$\mathbf{E}z_{1n}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i=1}^{l} c_i/\delta A_{k,n}(t_i)\right)^2 \to 1, \quad n \to \infty.$$

Теперь в условиях леммы 15 положим

$$b_{nk} = \sum_{i=1}^{l} c_i/\delta A_{k,n}(t_i), \quad \zeta_{nk} = \xi_k.$$

Легко видеть, что в нашем случае условие L1 выполнено.

Применяя лемму 9, получаем

$$\sup_k\left|\sum_{i=1}^{l}(c_i A_{k,n}(t_i))\right| = O(n^{-H/2}), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, выполняется и условие L2. Выполнение условий L3 и L4 очевидно.

Итак, z_n сходится по распределению к нормальной случайной величине с нулевым средним и дисперсией δ^2. Лемма доказана.

Из лемм 14 и 16 следует утверждение теоремы.

2.5. Доказательство теоремы 3. Введем следующие обозначения:

$$\gamma_k^{(n)} = W(k/n) - W((k-1)/n),\ k \geq 1, \quad \gamma_{-k}^{(n)} = \widetilde{W}((k+1)/n) - \widetilde{W}(k/n),\ k \geq 0.$$

Соответствующую частную сумму скользящих средних, определенных в (1) для гауссовских случайных величин $\{\gamma_k^{(n)}, k \in \mathbb{Z}\}$, обозначим через $\{G_l^{(n)}, l \geq 0\}$, а соответствующий нормированный процесс частных сумм определим как

$$\Gamma_{n,H}(t) = \frac{G_{[nt]}^{(n)}}{n^{H-1/2}}.$$

Разобьем доказательство на вспомогательные леммы.

Лемма 17 [12]. *Пусть $\{\xi_k; k \geq 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\xi_1 = 0, \mathbf{D}\xi_1 = 1$ и $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < \infty$ при некотором $\alpha > 2$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{k\leq n}|\sum_{j\leq k}\xi_k/\sqrt{n} - W(k/n)| \geq x(n)n^{-1/2}\Big) \leq C_\xi n x^{-\alpha}(n),$$

где $x(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а постоянная C_ξ зависит только от распределения ξ_0.

Введем обозначения

$$\xi_i^{(n)} = \frac{\xi_i}{\sqrt{n}},\ i \in \mathbb{Z}, \quad S_k^{(n)} = \frac{S_k}{\sqrt{n}},\ k \geq 0;$$

$$\overline{S}_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i} - A_i)\xi_{-i}^{(n)},\ k \geq 0; \quad \underline{S}_0^{(n)} = 0,\ \underline{S}_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} A_{k-i}\xi_i^{(n)},\ k \geq 1;$$

$$\overline{G}_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i} - A_i)\gamma_{-i}^{(n)},\ k \geq 0; \quad \underline{G}_0^{(n)} = 0,\ \underline{G}_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} A_{k-i}\gamma_i^{(n)},\ k \geq 1.$$

Далее, имеем

$$S_{[nt]}^{(n)} = \overline{S}_{[nt]}^{(n)} + \underline{S}_{[nt]}^{(n)}, \quad G_{[nt]}^{(n)} = \overline{G}_{[nt]}^{(n)} + \underline{G}_{[nt]}^{(n)}.$$

В нижеследующих леммах 18–20 мы будем предполагать выполнение условий первой части теоремы 3.

Лемма 18. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)}\big| n^{-H+1/2} \geq C_1 n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\Big) \leq C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\sigma_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i}\xi_i^{(n)}, \quad \varrho_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i}\gamma_i^{(n)}.$$

Применяя формулу Абеля, получаем

$$\underline{S}_{[nt]}^{(n)} = \sum_{i=1}^{[nt]}\sigma_i^{(n)} a_{[nt]-i}, \quad \underline{G}_{[nt]}^{(n)} = \sum_{i=1}^{[nt]}\varrho_i^{(n)} a_{[nt]-i}.$$

Следовательно,

$$\big|\underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)}\big| = \left|\sum_{i=1}^{[nt]}(\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)})a_{[nt]-i}\right| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\big|\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}\big| \sum_{i=0}^{n-1}|a_i|$$

$$\leq \sup_{1\leq i\leq n}\big|\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}\big| C_1 n^{H-1/2}.$$

С помощью леммы 17 имеем

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)}\big| n^{-H+1/2} \geq C_1 n^{H-1/2} n^{-H} x)$$

$$\leq \mathbf{P}\big(\sup_{1\leq i\leq n}\big|\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}\big| \geq x n^{-1/2}) \leq C_\xi n x^{-\alpha}.$$

Положив $x = n^{\frac{3}{2(\alpha+1)}}$, получим утверждение леммы.

Лемма 19. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\overline{S}^{(n)}_{[nt]}-\overline{G}^{(n)}_{[nt]}\big|n^{-H+1/2}\ge n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\big(2^{H+3/2}C_1+C(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\big)\Big)$$
$$\le C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1+\alpha/(\alpha-1))$$

при всех $n\ge N$.

Доказательство. Имеем

$$\overline{S}^{(n)}_{[nt]}=\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi^{(n)}_{-i}+\sum_{i=n}^{\infty}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi^{(n)}_{-i}. \tag{37}$$

Представим второе слагаемое правой части (37) в виде

$$\sum_{i=n}^{\infty}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi^{(n)}_{-i}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi^{(n)}_{-i}.$$

Введем следующие обозначения:

$$S^{(k-1)}_i(n)=\sum_{j=n2^{k-1}}^{i}\xi^{(n)}_{-j},\quad G^{(k-1)}_i(n)=\sum_{j=n2^{k-1}}^{i}\gamma^{(n)}_{-j},\quad i=n2^{k-1},\dots,n2^k-1.$$

Далее, вновь применяя формулу Абеля, получаем

$$\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi^{(n)}_{-i}=\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-2}(a_{i+1}-a_{[nt]+i+1})S^{(k-1)}_i(n)$$
$$+(A_{[nt]+n2^k-1}-A_{n2^k-1})S^{k-1}_{n2^k-1}(n).$$

Таким образом,

$$\Bigg|\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi^{(n)}_{-i}-\gamma^{(n)}_{-i}\big)\Bigg|$$
$$\le\sup_{n2^{k-1}\le i\le n2^k-1}\big|S^{(k-1)}_i(n)-G^{(k-1)}_i(n)\big|(A_{n2^k-1}-A_{n2^{k-1}}$$
$$-(A_{[nt]+n2^k-1}-A_{[nt]+n2^{k-1}})+A_{[nt]+n2^k-1}-A_{n2^k-1})$$
$$=\sup_{n2^{k-1}\le i\le n2^k-1}\big|S^{(k-1)}_i(n)-G^{(k-1)}_i(n)\big|(A_{[nt]+n2^{k-1}}-A_{n2^{k-1}}).$$

Поскольку $a_n\le Cn^{H-3/2}$, то

$$A_{[nt]+n2^{k-1}}-A_{n2^{k-1}}\le Cn(n2^{k-1})^{H-3/2}=Cn^{H-1/2}2^{(k-1)(H-3/2)}.$$

Итак,

$$\Bigg|\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi^{(n)}_{-i}-\gamma^{(n)}_{-i}\big)\Bigg|$$
$$\le\sup_{n2^{k-1}\le i\le n2^k-1}\big|S^{(k-1)}_i(n)-G^{(k-1)}_i(n)\big|Cn^{H-1/2}2^{(k-1)(H-3/2)}.$$

Следовательно (см. лемму 17),

$$\mathbf{P}\Biggl(\sup_{t\in[0,1]}\Biggl|\sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\bigl(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\bigr)\Biggr|n^{-H+1/2}$$

$$\geq Cn^{-1/2}2^{(k-1)(H-3/2)}x(2^{k-1})^{1/\alpha}k^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}}\Biggr)$$

$$\leq \mathbf{P}\bigl(\sup_{n2^{k-1}\leq i\leq n2^k-1}\bigl|S_i^{(k-1)}(n)-G_i^{(k-1)}(n)\bigr|\geq \frac{x}{\sqrt{n}}(2^{k-1})^{1/\alpha}k^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}}\bigr)\leq C_\xi\frac{n}{x^\alpha k^{1+\varepsilon}}.$$

В итоге имеем

$$\mathbf{P}\Biggl(\sup_{t\in[0,1]}\Biggl|\sum_{i=n}^{\infty}(A_{[nt]+i}-A_i)\bigl(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\bigr)\Biggr|n^{-H+1/2}$$

$$\geq C\frac{x}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\infty}2^{(k-1)(H-3/2+1/\alpha)}k^{\frac{1+\varepsilon}{\alpha}}\Biggr)\leq C_\xi\frac{n}{x^\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Положив $\varepsilon=\alpha-1$, $x=n^{\frac{3}{2(\alpha+1)}}$ и воспользовавшись тем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\leq\frac{\alpha}{\alpha-1},\quad \sum_{k=1}^{\infty}k2^{(k-1)(H-3/2+1/\alpha)}=(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2},$$

получаем

$$\mathbf{P}\Biggl(\sup_{t\in[0,1]}\Biggl|\sum_{i=n}^{\infty}(A_{[nt]+i}-A_i)\bigl(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\bigr)\Biggr|n^{-H+1/2}$$

$$\geq Cn^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\Biggr)\leq C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\alpha/(\alpha-1).\quad (38)$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части (37). Введем обозначения:

$$\sigma_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{i}\xi_{-j}^{(n)},\quad \varrho_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{i}\gamma_{-j}^{(n)},\quad i=0,\dots,n-1.$$

С помощью формулы Абеля получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi_{-i}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-2}\sigma_i^{(n)}(a_{i+1}-a_{[nt]+i+1})+\sigma_{n-1}^{(n)}(A_{[nt]+n-1}-A_{n-1});$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\gamma_{-i}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-2}\varrho_i^{(n)}(a_{i+1}-a_{[nt]+i+1})+\varrho_{n-1}^{(n)}(A_{[nt]+n-1}-A_{n-1}).$$

Таким образом,

$$\Biggl|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\bigl(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\bigr)\Biggr|\leq 4\sup_{0\leq i\leq n-1}\bigl|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\bigr|\sum_{i=0}^{2n-1}|a_i|.$$

Воспользуемся тем, что

$$\sum_{i=0}^{2n-1} |a_i| \le C_1 2^{H-1/2} n^{H-1/2}$$

(см. условия теоремы 3). Итак,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\big)\right|n^{-H+1/2} \ge xC_1 2^{H+3/2} n^{H-1/2} n^{-H}\right)$$

$$\le \mathbf{P}\big(\sup_{0\le i\le n-1}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big| \ge xn^{H-1/2}n^{-H}\big) \le C_\xi n x^{-\alpha}.$$

Полагая $x = n^{\frac{3}{2(\alpha+1)}}$, получаем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\big)\right|n^{-H+1/2}\right.$$

$$\left.\ge C_1 2^{H+3/2} n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\right) \le C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}. \quad (39)$$

Объединяя неравенства (38) и (39), приходим к утверждению леммы 19.

Из лемм 18 и 19 вытекает утверждение следующей леммы.

Лемма 20. *Существует вероятностное пространство, на котором*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}|Z_{n,H}(t)-\Gamma_{n,H}(t)| \ge n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(C_1(2^{H+3/2}+1)+C(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2})\big)$$

$$\le C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(2+\alpha/(\alpha-1))$$

при всех $n \ge N$.

В леммах 21–23 мы будем предполагать, что выполняются условия второй части теоремы 3.

Лемма 21. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\underline{S}_{[nt]}^{(n)}-\underline{G}_{[nt]}^{(n)}\big|n^{-H+1/2}\big) \ge C_1 n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}\big) \le C_\xi n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}.$$

Доказательство. Положим

$$\sigma_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} \xi_i^{(n)}, \quad \varrho_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{i} \gamma_i^{(n)}.$$

Тогда

$$\big|\underline{S}_{[nt]}^{(n)}-\underline{G}_{[nt]}^{(n)}\big| = \left|\sum_{i=1}^{[nt]}\big(\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big)a_{[nt]-i}\right|$$

$$\le \sup_{1\le i\le n}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big| \sum_{i=0}^{[nt]-1}|a_i| \le \sup_{1\le i\le n}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big|C_1.$$

Применяя лемму 17, отсюда получаем

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\underline{S}^{(n)}_{[nt]}-\underline{G}^{(n)}_{[nt]}\big|n^{-H+1/2}\ge C_1n^{-H}x\big)$$

$$\le \mathbf{P}\big(\sup_{1\le i\le n}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big|\ge xn^{-1/2}\big)\le C_\xi nx^{-\alpha}.$$

Положив $x=n^{\frac{H+1}{\alpha+1}}$, приходим к утверждению леммы.

Лемма 22. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\overline{S}^{(n)}_{[nt]}-\overline{G}^{(n)}_{[nt]}\big|n^{-H+1/2}\ge 4C_1n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}+Cn^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\big)$$

$$\le C_\xi n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}+C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\alpha/(\alpha-1)$$

при всех $n\ge N$.

Доказательство. Рассмотрим второе слагаемое в правой части (37), для которого оценка гауссовской аппроксимации проводится так же, как и в доказательстве леммы 19:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=n}^{\infty}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\big)\right|n^{-H+1/2}\ge Cn^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\right)$$

$$\le C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\alpha/(\alpha-1)\quad(40)$$

при всех $n\ge N$. Теперь рассмотрим первое слагаемое в правой части (37). Как и в доказательстве леммы 19, обозначим

$$\sigma_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{i}\xi_{-j}^{(n)},\quad \varrho_i^{(n)}=\sum_{j=0}^{i}\gamma_{-j}^{(n)},\quad i=0,\dots,n-1.$$

С помощью формулы Абеля получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\xi_{-i}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-2}\sigma_i^{(n)}(a_{i+1}-a_{[nt]+i+1})+\sigma_{n-1}^{(n)}(A_{[nt]+n-1}-A_{n-1});$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\gamma_{-i}^{(n)}=\sum_{i=0}^{n-2}\varrho_i^{(n)}(a_{i+1}-a_{[nt]+i+1})+\varrho_{n-1}^{(n)}(A_{[nt]+n-1}-A_{n-1}).$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\big)\right|\le 4\sup_{0\le i\le n-1}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big|\sum_{i=0}^{2n-1}|a_i|.$$

Воспользуемся тем, что $\sum\limits_{i=0}^{2n-1}|a_i|\le C_1$. Итак,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i}-A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)}-\gamma_{-i}^{(n)}\big)\right|n^{-H+1/2}\ge 4xC_1n^{-H}\right)$$

$$\le \mathbf{P}\big(\sup_{0\le i\le n-1}\big|\sigma_i^{(n)}-\varrho_i^{(n)}\big|n^{-H+1/2}\ge xn^{-H}\big)\le C_\xi nx^{-\alpha}.$$

Полагая $x = n^{\frac{H+1}{\alpha+1}}$, получаем

$$\mathbf{P}\Bigg(\sup_{t\in[0,1]}\Bigg|\sum_{i=0}^{n-1}(A_{[nt]+i} - A_i)\big(\xi_{-i}^{(n)} - \gamma_{-i}^{(n)}\big)\Bigg| n^{-H+1/2} \geq 4C_1 n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}\Bigg) \leq C_\xi n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}}. \tag{41}$$

Объединяя неравенства (40) и (41), приходим к утверждению леммы.

Из лемм 21 и 22 вытекает следующее утверждение.

Лемма 23. *Существует вероятностное пространство, на котором*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}|Z_{n,H}(t) - \Gamma_{n,H}(t)| \geq 5C_1 n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}} + Cn^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}(1-2^{H-3/2+1/\alpha})^{-2}\big)$$
$$\leq 2C_\xi n^{-\frac{\alpha H-1}{\alpha+1}} + C_\xi n^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}\alpha/(\alpha-1)$$

при всех $n \geq N$.

Введем в рассмотрение последовательность случайных величин

$$B_0^{(n)} = 0, \quad B_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k}(k-i+1)^{H-1/2}\gamma_i^{(n)}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty}((k+i+1)^{H-1/2} - (i+1)^{H-1/2})\gamma_{-i}^{(n)}, \quad k \geq 1.$$

Лемма 24. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]} n^{-H+1/2}\big|G_{[nt]}^{(n)} - B_{[nt]}^{(n)}\big| \geq n^{-H}\sqrt{2\delta_n(H+1)\log n}\big) \leq n^{-H}.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{P}\big(\max\{n^{-H+1/2}\big|G_1^{(n)} - B_1^{(n)}\big|, \dots, n^{-H+1/2}\big|G_n^{(n)} - B_n^{(n)}\big|\} \geq n^{-H}\psi_n\big)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\big(\big|G_k^{(n)} - B_k^{(n)}\big| \geq n^{-1/2}\psi_n\big) \leq n\exp\big(-\psi_n^2/2\delta_n\big).$$

Положив

$$\psi_n = \sqrt{2\delta_n(H+1)\log n},$$

получим утверждение леммы.

Лемма 25. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|B_{[nt]}^n n^{-H+1/2} - B_H^0([nt]/n)\big| \geq 8n^{-H}\sqrt{2\Upsilon_H^0(H+1)\log n}\big) \leq n^{-H}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что величину $B_k^{(n)}/n^{H-1/2}$ можно представить в виде стохастического интеграла

$$\int_0^{k/n}(k/n - [ns]/n)^{H-1/2}dW(s) + \int_0^{\infty}((k/n + ([ns]+1)/n)^{H-1/2}$$
$$- (([ns]+1)/n)^{H-1/2})d\widetilde{W}(s).$$

Тогда (см. доказательство леммы 4)

$$n^{2H}\mathbf{E}\big(B_H^0(k/n) - n^{1/2-H}B_k^n\big)^2 \leq 64\Upsilon_H^0, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Положив $\psi_n = 8\sqrt{2\Upsilon_H^0(H+1)\log n}$, получим утверждение леммы.

Лемма 26. *Имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|B_H^0(t)-B_H^0([nt]/n)\big|\ge 2\sqrt{2}\sigma n^{-H}C_H\sqrt{(H+1)\log n}\Big)\le 4n^{-H},$$

где $C_H=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-kH}k^{1/2}$.

Доказательство. Имеем

$$\sup_{t\in[0,1]}\big|B_H^0(t)-B_H^0([nt]/n)\big|=\max_{k=1,\dots,n}\Big\{\sup_{t\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\big|B_H^0(t)-B_H^0([nt]/n)\big|\Big\}.$$

Далее, воспользовавшись стационарностью приращений $B_H^0(t)$, а также тем, что $B_H^0(nt)\overset{d}{=}n^HB_H^0(t)$ (свойство H однородности) и $\mathbf{E}(B_H^0(t)-B_H^0(s))^2\le\sigma^2|t-s|^H$ (см. лемму 5), получим

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|B_H^0(t)-B_H^0([nt]/n)\big|\ge n^{-H}\psi_n\Big)$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}\big|B_H^0(t)-B_H^0([nt]/n)\big|\ge n^{-H}\psi_n\Big)$$
$$\le n\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,\frac{1}{n})}\big|B_H^0(t)\big|\ge n^{-H}\psi_n\Big)=n\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|B_H^0(t)\big|\ge\psi_n\Big)$$
$$\le 4n\exp\big(-C_H^{-2}\psi_n^2/\sigma^2\big).$$

Положив $\psi_n=2\sqrt{2}\sigma C_H\sqrt{(H+1)\log n}$, приходим к утверждению леммы.

Из лемм 24–26 следует

Лемма 27. *Для любого $H\in(0,1)$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|n^{-H+1/2}G_{[nt]}^{(n)}-B_H^0(t)\big|$$
$$\ge n^{-H}\sqrt{(H+1)\log n}(8\sqrt{2\Upsilon_H^0}+\sqrt{2\delta_n}+2\sqrt{2}\sigma C_H)\Big)\le 6n^{-H}.$$

Утверждения теоремы 3 вытекают из лемм 20, 23 и 27.

2.6. Доказательство предложения 3. Введем обозначения:

$$\alpha_0=a_0-\sigma L_H^{-1/2},\quad \alpha_n=a_n-\sigma L_H^{-1/2}((n+1)^{H-1/2}-n^{H-1/2}),\quad n\ge1;$$
$$\beta_n=A_n-\sigma L_H^{-1/2}(n+1)^{H-1/2},\quad n\ge0.$$

Докажем п. (i). Заметим, что в нашем случае

$$\Delta_n=\sum_{m=0}^{\infty}(\beta_{n+m}-\beta_m)^2+\sum_{m=0}^{n-1}\beta_m^2. \tag{42}$$

Обозначим первую сумму в правой части (42) через $\Delta_n^{(1)}$ и соответственно вторую — через $\Delta_n^{(2)}$. Имеем

$$\Delta_n^{(1)}\le 2\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{n+m}^2+2\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m^2=2\sum_{m=n}^{\infty}\beta_m^2+2\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m^2.$$

Таким образом,

$$\Delta_n \le 4\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m^2 < \infty.$$

Теперь докажем п. (ii). Имеем

$$\Delta_{[nt]}^{(2)} = \alpha_0^2 + \sum_{l=1}^{[nt]-1}\beta_l^2 \le \alpha_0^2 + \psi_n = O(n^{2\beta}), \quad n\to\infty,$$

где $\psi_n = O\left(\sum\limits_{l=1}^{n-1} l^{2\beta-1}\right) = O(n^{2\beta})$ (см. условия предложения 3). Представим $\Delta_{[nt]}^{(1)}$ следующим образом:

$$\Delta_{[nt]}^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty}(\beta_{[nt]+m}-\beta_m)^2 = \sum_{m=0}^{n-1}(\beta_{[nt]+m}-\beta_m)^2 + \sum_{m=n}^{\infty}(\beta_{[nt]+m}-\beta_m)^2. \quad (43)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (43):

$$\sum_{m=0}^{n-1}(\beta_{[nt]+m}-\beta_m)^2 \le 4\sum_{m=0}^{n+[nt]-1}\beta_m^2 \le 4\sum_{m=0}^{2n-1}\beta_m^2 = O(n^{2\beta}), \quad n\to\infty.$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (43):

$$|\beta_{[nt]+m}-\beta_m| \le \sum_{l=m+1}^{[nt]+m}|\alpha_l| \le C[nt]m^{\gamma-3/2}, \quad m\ge 1;$$

$$\sum_{m=n}^{\infty}(\beta_{[nt]+m}-\beta_m)^2 = O\left(n^2\sum_{m=n}^{\infty}m^{2\gamma-3}\right) = O(n^{2\gamma}), \quad n\to\infty,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Итак, $\delta_n = O(n^{\max\{2\gamma,2\beta\}})$ при $n\to\infty$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
2. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т. 24, № 3. С. 487–498.
3. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. М.: Факториал, 1999.
4. *Konstantopoulos T., Sakhanenko A.* Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. Texas, 2000. (Preprint / Univ. Texas at Austin).
5. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
6. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Rev. 1968. V. 10. P. 422–437.
7. *Hsing T.* On the asymptotic distributions of partial sums of functionals of infinite-variance moving averages // Ann. Probab. 1999. V. 27, N 3. P. 1579–1599.
8. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
9. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
11. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale limit theory and its application. New York: Acad. Press, 1980.

12. *Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И.* Предельные теоремы для случайных процессов. М.: ВИНИТИ, 1995. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 82).
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
14. *Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

Статья поступила 1 декабря 2003 г., окончательный вариант — 24 сентября 2004 г.

Аркашов Николай Сергеевич, Борисов Игорь Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru