Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ КРАТНО ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

Го Вэньбинь

Аннотация: Описаны τ-замкнутые n-кратно локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, является булевой.

Ключевые слова: группа, формация, кратно локальная формация, решетка формации.

Все рассматриваемые в работе классы групп состоят из конечных групп. Кроме стандартной терминологии (см. [1–3]), нам потребуется ряд понятий, связанных с алгеброй формаций [4].

Формации, принадлежащие совокупности формаций Θ, называются Θ-*формациями.* В дальнейшем Θ — полная решетка формаций [4], т. е. пересечение любой совокупности Θ-формаций снова является Θ-формацией и в Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой Θ-формации $\mathfrak{M}$.

Напомним, что функция f, определенная на множестве простых чисел $\mathbb{P}$ со значениями в множестве всех формаций, называется *формационной функцией* [3] или *локальным экраном* [1]. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех простых делителей p порядка группы G, то формационную функцию f называют *экраном формации* $\mathfrak{F}$. При этом применяется запись $\mathfrak{F} = LF(f)$. Формация, обладающая хотя бы одним экраном, называется *локальной.*

При обозрении экранов большинства наиболее известных конкретных формаций легко обнаруживается, что у таких формаций имеется экран, все непустые значения которого сами являются локальными формациями. Это важное обстоятельство привело к следующей естественной конструкции [5]: всякая формация групп считается 0-*кратно локальной*, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-*кратно локальной,* если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где всякое непустое значение экрана f является $(n-1)$-кратно локальной формацией. Формация называется *тотально локальной*, если она n-кратно локальна при всех натуральных n. Совокупность всех тотально локальных формаций является полной решеткой формаций, и такая решетка обозначается через l_∞.

В различных приложениях теории классов групп часто используют локальные формации, замкнутые относительно тех или иных систем подгрупп. По всей видимости, следующее, введенное в монографии [4], определение охватывает все рассматриваемые при этом системы подгрупп.

Пусть группе G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Будем говорить, следуя [4], что τ — *подгрупповой функтор,* если выполняются условия:

Supported by NNSF of China (#10171086).

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеют место включения $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* [4], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G. Нетрудно показать, что совокупность всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций (при фиксированном $n \geq 0$) является полной решеткой формаций. Такая решетка обозначается через l_n^{τ}.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — некоторые θ-формации, причем формация $\mathfrak{H}$ хорошо изучена. Тогда у нас имеется некоторая информация и относительно формации $\mathfrak{F}$, поскольку в ней содержится часть формации $\mathfrak{H}$, а именно $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$. Так, например, при изучении локальной формации $\mathfrak{F}$ часто используется ее нильпотентная подформация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Однако в общем случае без дополнительных ограничений на «хорошо известную часть» $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{F}$ что-либо сказать о самой формации $\mathfrak{F}$ трудно. В качестве одного из возможных ограничений на $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ можно, например, рассматривать ограничения, накладываемые на решетку θ-формаций $\mathfrak{F}/_{\theta}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$, заключенных между $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ (т. е. θ-формация $\mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{F}/_{\theta}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$). В частности, это приводит к следующим задачам, которые поставлены [4, с. 192] и решение которых является значительным расширением результатов из [4, § 4.3].

Вопрос 1. *Описать такие разрешимые тотально локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/_{\infty}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех тотально локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, булева (или является решеткой с дополнениями).*

Вопрос 2. *Описать такие τ-замкнутые n-кратно локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/_n^{\tau}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, булева (или является решеткой с дополнениями).*

Первая из этих двух задач решена нами в работе [6]. Здесь мы дадим ответ на второй вопрос.

Отметим, что в работах [7–9] исследовались локальные формации, с дополняемыми локальными подформациями.

Напомним, что через $l_n^{\tau} \operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых n-кратно локальных формаций. Тогда формация

$$l_n^{\tau} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{H}_i\Big)$$

обозначается через $\vee_n^{\tau}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$. В частности, символом $\mathfrak{F}_1 \vee_n^{\tau} \mathfrak{F}_2$ обозначается формация $l_n^{\tau} \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$, а символом $\mathfrak{F}_1 \vee_n^{\tau} \dots \vee_n^{\tau} \mathfrak{F}_t$ — формация $l_n^{\tau} \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_t)$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно локальных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\tau} \operatorname{form} G$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{F}$. Индукцией по n покажем, что в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно локальных подформаций.

Пусть $n = 0$, т. е. $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G$. В силу леммы 1.2.22 [4] $\mathfrak{F} = \mathrm{HR_0S}_{\bar{\tau}}(G)$. Поэтому если $m = |G|$, то по лемме 3.1.5 [4] экспоненты, порядки главных факторов и ступени нильпотентных секций всех групп из $\mathfrak{F}$ не превосходят число m.

Значит, согласно теореме 3.47 [2] в $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ имеется лишь конечное множество формационно критических групп, поэтому (в силу леммы 1.1.3 [4]) в $\mathfrak{F}$ есть лишь конечное множество разрешимых подформаций.

Пусть $n > 0$, и допустим, что при $n-1$ лемма верна. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная разрешимая τ-замкнутая n-кратно локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, и пусть m и f — минимальные l^{τ}_{n-1}-значные экраны формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда по следствию 8.4 [2] $m \le f$. А по теореме 8.3 [2]

$$f(p) = \begin{cases} l^{\tau}_{n-1}\,\mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G). \end{cases}$$

Согласно нашему предположению в $f(p) = l^{\tau}_{n-1}\,\mathrm{form}(G/F_p(G))$ имеется лишь конечное множество различных разрешимых τ-замкнутых $(n-1)$-кратно локальных подформаций ($m(p)$ — одна из них). Так как при этом $\pi(G)$ — конечное множество, существует лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно локальных формаций $\mathfrak{M}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая n-кратно локальная формация. Тогда символом $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций, входящих в $\mathfrak{F}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно локальная формация. Тогда множество всех тех формаций, которые являются либо атомами решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$, либо $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критическими подформациями в $\mathfrak{F}$, конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_n\,\mathrm{form}\,G$. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_n\,\mathrm{form}\,A$ для некоторой простой группы A. Если A — неабелева группа, то согласно лемме 2.1.6 [4] $A \in \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — τ-замкнутая полуформация, порожденная группой G. Но ввиду леммы 1.2.21 [4] $\mathfrak{H} = \mathrm{HS}_{\overline{\tau}}(G)$. Это означает, что в решетке $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

По лемме 1 в решетке $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ есть лишь конечное число разрешимых атомов.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критическая подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда согласно следствию 2.1.13 [4] $\mathfrak{M} = l^{\tau}_n\,\mathrm{form}\,A$, где A — τ-минимальная ненильпотентная группа, и выполняется одно из следующих условий:

1) A — группа Шмидта;

2) $n = 1$, A — простая неабелева группа и $\tau(A) \subseteq \{A, 1\}$.

Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает, что в $\mathfrak{F}$ существует лишь конечное множество неразрешимых $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критических подформаций.

Если же A — группа Шмидта, то по теореме 26.11 [1] A — разрешимая группа. Но согласно лемме 1 в любой однопорожденной τ-замкнутой n-кратно локальной формации имеется лишь конечное множество разрешимых τ-замкнутых n-кратно локальных подформаций. Лемма доказана.

Напомним, что символом $\tau\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. Группа $G \notin \mathfrak{F}$ называется [4] *τ-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если все собственные τ-подгруппы из G принадлежат $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-неприводимой* [4], если $\mathfrak{F} \ne \tau\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — набор всех собственных τ-замкнутых подформаций формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 3. *$\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая ненильпотентная формация тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \tau\,\mathrm{form}\,G$, где G — монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}} \nsubseteq \Phi(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда G — монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа, и если R — ее монолит, то $R = G^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Ясно также, что $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G$, где G — монолитическая τ-минимальная ненильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда по лемме 2.1.5 [4] формация $\mathfrak{F}$ τ-неприводима, и если $\mathfrak{M}$ — ее максимальная τ-замкнутая подформация, то

$$\mathfrak{M} = \tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}),$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных τ-подгрупп из G. Но G — τ-минимальная ненильпотентная группа. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. При этом $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая ненильпотентная формация.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нильпотентная τ-замкнутая n-кратно локальная формация, $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических формаций. Тогда если $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая формация и*

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\tau \left(\vee_n^\tau(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\right),$$

то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$.

Доказательство. Пусть $n \geq 1$. Тогда согласно следствию 2.1.13 [4] $\mathfrak{H} = l_n^\tau \operatorname{form} G$, где G — τ-минимальная ненильпотентная группа, и выполняется одно из следующих условий: 1) G — группа Шмидта; 2) $n = 1$ и G — простая неабелева группа с $\tau(G) \subseteq \{G, 1\}$.

Пусть f и m — минимальные l_{n-1}^τ-значные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, h_i — минимальный l_{n-1}^τ-значный экран формации $\mathfrak{H}_i$. Тогда по лемме 4.1.2 [4]

$$f(p) = \begin{cases} l_{n-1}^\tau \operatorname{form}(m(p) \cup (\bigcup\limits_{i \in I} h_i(p))), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть h — минимальный l_{n-1}^τ-значный экран формации $\mathfrak{H}$. Согласно следствию 8.4 [2] $h \leq f$. Прежде предположим, что G — группа Шмидта. Тогда в силу теоремы 26.1 [1] G — разрешимая бипримарная группа, и если в G нормальна силовская p-подгруппа и $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то $G/F_p(G) \cong Z_q$, где Z_q — группа порядка q. Значит, по теореме 8.3 [2]

$$h(r) = \begin{cases} l_{n-1}^\tau \operatorname{form} Z_q, & \text{если } r = p, \\ (1), & \text{если r=q}, \\ \varnothing, & \text{если } r = \mathbb{P} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Так как $Z_q \in h(p) \subseteq f(p)$, из приведенного выше описания экрана f следует, что найдется такое $i \in I$, что $(1) \subset h_i(p)$. Пусть $n = 1$. Тогда ввиду леммы 5.2.15 [4] и теоремы 8.3 [2] $f(p) = \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп. Причем если $A \in \mathfrak{X}$ и A — неабелева группа, то найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{H}_i = l_n^\tau \operatorname{form} A$ и p делит порядок $|A|$ группы A. Если же A — абелева группа простого порядка r, то найдется такое $j \in I$, что $\mathfrak{H}_j = l_n^\tau \operatorname{form} B$, где B — группа Шмидта такая, в которой $\pi(B) = \{p, r\}$ и силовская p-подгруппа нормальна. Так как при этом $Z_q \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$, ввиду теоремы 1.2.25 [4] группа Z_q совпадает с одной из абелевых групп множества $\mathfrak{X}$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{H}_i = l_n^\tau \operatorname{form} B$, где B — группа Шмидта с $\pi(B) = \{p, q\}$, в которой силовская p-подгруппа нормальна. Но тогда ввиду теоремы 8.3 [2] $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$.

Пусть $n > 1$. Тогда по следствию 2.1.13 [4] и по теореме 8.3 [2] $f(p) = \mathfrak{N}_\pi$, где $r \in \pi$ тогда и только тогда, когда в $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ найдется такая формация $\mathfrak{H} = l_n^\tau \operatorname{form} A$, где A — группа Шмидта с $\pi(A) = \{p, r\}$, в которой силовская p-подгруппа нормальна. Но $Z_q \in f(p)$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$.

Если же $n = 1$ и G — простая неабелева группа такая, что $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$, то для всякого $p \in \pi(G)$ имеет место $h(p) = \tau \operatorname{form} G \subseteq f(p)$. Следовательно, среди формаций $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ найдется такая $\mathfrak{H}_i$, что $\mathfrak{H}_i = l_1^\tau \operatorname{form} G = \mathfrak{H}$.

Пусть теперь $n = 0$. Тогда по лемме 3

$$\mathfrak{H} = l_0^\tau \operatorname{form} A = \tau \operatorname{form} A, \quad \mathfrak{H}_i = \tau \operatorname{form} A_i,$$

где A, A_i — монолитические τ-минимальные ненильпотентные группы, и если R — монолит группы A и R_i — монолит группы A_i, то $A^{\mathfrak{N}} = R \not\subseteq \Phi(A)$ и $A_i^{\mathfrak{N}} = R_i \not\subseteq \Phi(A_i)$.

Пусть $\mathfrak{X}_i$ — набор всех собственных τ-подгрупп группы A_i. Тогда по лемме 1.2.22 [4]

$$\mathfrak{H}_i = \tau \operatorname{form} A_i = \operatorname{form}(\mathfrak{X}_i \cup \{A_i\}).$$

Значит, поскольку по теореме 2.4 [1] каждая нильпотентная формация наследственна, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\tau (\vee^\tau(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)) = \tau \operatorname{form}\Big(\mathfrak{M} \cup \Big(\bigcup_{i\in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i\Big)\Big)$$
$$= \operatorname{form}\Big(\mathfrak{X} \cup \Big(\bigcup_{i\in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\Big)\Big),$$

где $\mathfrak{X}$ — набор всех подгрупп всех групп из $\mathfrak{M}$. Понятно, что у каждой группы T из $\mathfrak{X} \cup \big(\bigcup_{i\in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\big)$ $\mathfrak{N}$-корадикал $T^{\mathfrak{N}}$ не имеет фраттиниевых T-главных факторов. Следовательно, по теореме 1.2.29 [4] ненильпотентная группа A является гомоморфным образом одной из групп множества

$$\mathfrak{X} \cup \Big(\bigcup_{i\in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\Big).$$

Но каждая группа из $\mathfrak{X} \cup \big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{X}_i\big)$ нильпотентна. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что A — гомоморфный образ группы A_i. Но группа A_i монолитична и ее монолит R_i равен $A_i^{\mathfrak{N}}$. Следовательно, $A \cong A_i$, и поэтому $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$. Лемма доказана.

В дальнейшем для произвольной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}_0$ мы обозначаем пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутые n-кратно локальные формации. Если $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$, то $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/_n^\tau\mathfrak{M}_0$.*

Доказательство. По условию

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0 \text{ и } \mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Значит, ввиду теоремы 4.2.8 [4]

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \big(\mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau \mathfrak{H}\big) = \mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Понятно также, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_0$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}/_n^\tau\mathfrak{M}_0$.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутые n-кратно локальные формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями, то $\mathfrak{M}/^\tau_n\mathfrak{M}_0$ также является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Ввиду следствия 4.2.8 [4] имеет место решеточный изоморфизм

$$\left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{M}\right)/^\tau_n\mathfrak{F}_0 \simeq \mathfrak{M}/^\tau_n(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_0) = \mathfrak{M}/^\tau_n(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{M}/^\tau_n\mathfrak{M}_0.$$

Но $\left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{M}\right)/^\tau_n\mathfrak{F}_0$ — подрешетка решетки $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$. Значит, ввиду леммы 5 $\left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{M}\right)/\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями. Следовательно, $\mathfrak{M}/^\tau_n\mathfrak{M}_0$ — решетка с дополнениями. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная τ-замкнутая n-кратно локальная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\right)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$;

3) $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$ — булева решетка.

Доказательство. Пусть имеет место условие 1 и $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$. Предположим сначала, что $\mathfrak{F}$ — однопорожденная τ-замкнутая n-кратно локальная формация. Тогда согласно лемме 2 число t всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических формаций, содержащихся в $\mathfrak{F}$, конечно. Индукцией по t покажем, что относительно $\mathfrak{F}$ выполняется условие 2.

Пусть $\mathfrak{H}_i$ — произвольная $\mathfrak{N}^\tau_n$-критическая подформация в $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{H}_i$. В силу условия 1 в $\mathfrak{F}$ найдется такая τ-замкнутая n-кратно локальная формация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{M} \vee^\tau_n \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Тогда согласно лемме 6 по индукции

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\right),$$

где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций формации $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{F}_0$, ввиду леммы 4

$$\mathfrak{F} = \left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{H}_i\right) \vee^\tau_n \left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\right)\right)$$
$$= \left(\mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \mathfrak{H}_i\right) \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\right)\right) = \mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\right),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть G — произвольная ненильпотентная группа из $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = l^\tau_n \operatorname{form} G$. Согласно лемме 6 условие 1 переносится на решетку $\mathfrak{M}/^\tau_n\mathfrak{M}_0$. Ввиду доказанного в предыдущем абзаце

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{M}_j \mid j \in J)\right),$$

где $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций в $\mathfrak{M}$. Итак,

$$\mathfrak{F} = l^\tau_n \operatorname{form}(G \mid G \in \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_0 \vee^\tau_n \left(\vee^\tau_n(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\right),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических формаций, содержащихся в $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь выполняется условие 2. Прежде всего покажем, что $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями. Пусть ненильпотентная формация $\mathfrak{M}$ принадлежит решетке $\mathfrak{F}/^\tau_n\mathfrak{F}_0$, и пусть $\mathfrak{X}_1$ — множество всех $\mathfrak{N}^\tau_n$-критических подформаций формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}_2 = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\} \setminus \mathfrak{X}_1$, и пусть

$$\mathfrak{H} = \Big(l^\tau_n \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big) \vee^\tau_n \mathfrak{F}_0.$$

Тогда $\mathfrak{M} \vee_n^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Тогда согласно лемме 2.1.11 [4] в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ имеется по крайней мере одна $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая подформация $\mathfrak{H}^*$. Пусть $\mathfrak{H}^* \in \mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{H}^* \notin \mathfrak{X}_2$. Но согласно лемме 4 в формации

$$\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)$$

нет $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций, не принадлежащих $\mathfrak{X}_2$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$.

Установим теперь, что решетка $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$ булева. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ — произвольные элементы решетки $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$. Покажем, что

$$\mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big) = \big(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2\big) \vee_n^\tau \big(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3\big). \tag{1}$$

Поскольку $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями, ввиду леммы 6 у каждой формации $\mathfrak{M}$, принадлежащей решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{F}_0$, решетка $\mathfrak{M}/_n^\tau\mathfrak{M}_0$ является решеткой с дополнениями. Это означает, что

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\big),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{M}$. Таким образом, для доказательства включения

$$\mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big) \subseteq (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee_n^\tau (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3) \tag{2}$$

нам достаточно лишь показать, что любая $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big)$ принадлежит формации

$$(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee_n^\tau (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3).$$

Пусть $\mathfrak{X}_i$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций формации $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1$ и

$$\mathfrak{H} \subseteq (\Big((\mathfrak{M}_2)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)\Big) \vee_n^\tau \Big((\mathfrak{M}_3)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_3} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)\Big)$$

$$= \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2 \cup \mathfrak{X}_3} \mathfrak{H}_i\Big)\Big).$$

Применяя лемму 4, находим, что

$$\mathfrak{H} \in \mathfrak{X}_2 \cup \mathfrak{X}_3.$$

Значит, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3$. Этим доказано включение (2). Обратное включение очевидно. Итак, верно равенство (1). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
5. *Скиба А. Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. № 3. С. 21–31.
6. *Guo W., Shum K. P.* On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 5. P. 2117–2131.
7. *Wenbin Guo.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press — Kluwer Acad. Publ., 2000.

8. *Скиба А. Н.* О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Сер. мат. 1994. Т. 10. С. 75–80.

9. *Guo Wenbin.* Local formations in which every subformation of type $\mathfrak{N}_p$ has a complement // Chinese Sci. Bull. 1997. V. 42, N 5. P. 364–368.

Статья поступила 14 ноября 2003 г.

Го Веньбинь (Guo Wenbin)
Математический факультет, Сюйчжоуский Педагогический университет,
221116 Сюйчжоу, Н. Р. Китай
Department of Mathematics,
Xuzhou Normal University,
Xuzhou 221116, P. R. China

Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
wbguo@pub.xz.jsinfo.net