Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 519.21

ОЦЕНКИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В. В. Шнеер

Аннотация: Пусть $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Изучаются отношения вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x)/\mathbf{P}(\xi_1 > x)$ при всех n и x. Для некоторых подклассов субэкспоненциальных распределений найдены равномерные по x верхние оценки для рассматриваемых отношений, уточняющие известные оценки для общего класса субэкспоненциальных распределений. С помощью полученных результатов найдены условия, достаточные для асимптотической эквивалентности $\mathbf{P}(S_\tau > x) \sim \mathbf{E}\tau\mathbf{P}(\xi_1 > x)$ при $x \to \infty$, где τ — случайная величина, принимающая натуральные значения и не зависящая от $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$. Полученные оценки применяются также для нахождения асимптотики распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом.

Ключевые слова: субэкспоненциальное распределение, распределение с длинным хвостом, надстепенное распределение, суммы случайных величин, случайное блуждание, управляемое регенерирующим процессом, супремум случайного блуждания.

§ 1. Введение

Пусть $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$. Для произвольного распределения G будем обозначать через $\overline{G}(x)$ его «хвост»: $\overline{G}(x) = G((x,\infty))$. Пусть F — распределение ξ_1, и пусть F^{*n} — n-кратная свертка F с собой, т. е. $\overline{F^{*n}}(x) = \mathbf{P}(S_n > x)$.

Известно (см., например, [1]), что если случайная величина ξ_1 неотрицательна, а ее распределение F субэкспоненциально, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $K \equiv K(\varepsilon)$ такое, что

$$\sup_x \frac{\mathbf{P}(S_n > x)}{\mathbf{P}(\xi_1 > x)} \equiv \sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n \tag{1}$$

при всех n. Однако нетрудно заметить, что предположение неотрицательности случайной величины ξ_1 может быть опущено. Известны также верхние оценки для $\mathbf{P}(S_n > x)$, содержащие зависимость от x и n (см., например, [2]). В [3] рассмотрен случай, когда хвост распределения F мажорируется или минорируется правильно меняющейся функцией $V(t) = t^{-\alpha}L(t)$ или семиэкспоненциальной функцией $V(t) = e^{-t^\beta L(t)}$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция. В зависимости от α и β найдены оценки сверху и снизу для отношений $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$.

Из (1) можно получить (см., например, [4, теорема A3.20]), что

$$\mathbf{P}(S_\tau > x)/\overline{F}(x) \to \mathbf{E}\tau \quad \text{при } x \to \infty, \tag{2}$$

если случайная величина ξ_1 неотрицательна, и $\mathbf{E}(1+\varepsilon)^\tau < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$. Здесь τ — случайная величина, принимающая натуральные значения и не зависящая от $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$. Предположение неотрицательности случайной величины ξ_1 может быть также опущено. В [5] показано, что сходимость в (2) может быть сколь угодно медленной.

В работе [6] рассматривается случай, когда хвост распределения F правильно меняется на бесконечности. Свойство (2) доказано при различных ограничениях на скорость убывания функций $F((-\infty,-x))$ и $\mathbf{P}(\tau > x)$ при $x \to \infty$. В [7] найдены верхние оценки для отношений $\mathbf{P}(S_\tau > x)/\overline{F}(x)$ для марковского момента τ в случае, когда хвост распределения F и функция $\mathbf{P}(\tau > x)$ убывают не быстрее, чем степенная функция.

Обозначим $M_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} S_k$. Заметим, что для неотрицательных случайных величин имеет место равенство $M_n = S_n$. Тогда соотношение (2) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{P}(M_\tau > x)/\overline{F}(x) \to \mathbf{E}\tau \quad \text{при } x \to \infty. \tag{3}$$

Свойство (3) может быть получено без предположения неотрицательности случайной величины ξ_1 и в отсутствие экспоненциального момента τ, если потребовать $\mathbf{E}\xi_1 < 0$, а также «усилить» свойство субэкспоненциальности. Из результатов [8] следует, что достаточно потребовать правильное изменение хвоста распределения F на бесконечности. Соотношение (3) можно получить также из результатов [9], где предполагались некоторое альтернативное «усиление» свойства субэкспоненциальности F, а также субэкспоненциальность так называемого интегрального распределения F^s (см. определение 3). В [10] показано, что если предположить выполнение неравенства $\mathbf{E}\xi_1 < 0$, то соотношение (3) имеет место для произвольного момента остановки τ такого, что $\mathbf{E}\tau < \infty$, тогда и только тогда, когда F принадлежит классу распределений $\mathscr{S}^*$, введенному в [11].

В настоящей работе рассматриваются: (а) распределения, являющиеся одновременно распределениями с длинным хвостом (принадлежащими классу $\mathscr{L}$, см. определение 4) и надстепенными (принадлежащими классу $\mathscr{D}$, см. определение 5), а также (б) распределения из класса $\mathscr{SC}$ (см. определение 6). Неотрицательность случайной величины ξ_1 в работе не предполагается. В § 2 для этих классов распределений приведены равномерные по x оценки для отношений $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$, уточняющие (1). Из полученных оценок следует соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau$$

без предположения отрицательности математического ожидания ξ_1 и при ограничениях на τ, не требующих существования экспоненциального момента. Приводятся также утверждения о «равномерности» установленных оценок по некоторым подходящим классам распределений. В § 3 эти утверждения применяются для нахождения асимптотики распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом. Доказательства основных утверждений приведены в § 4.

§ 2. Определения и результаты

Будем писать $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$, если $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

Определение 1. Распределение F на $\mathbb{R}_+$ с функцией распределения $F(x) = F((-\infty, x])$ называется *субэкспоненциальным* (*принадлежит классу* $\mathscr{S}$), если $\overline{F}(x) = 1 - F(x) > 0$ для всех x и $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$.

Распределение F на $\mathbb{R}$ называется *субэкспоненциальным*, если субэкспоненциально распределение F^+ с функцией распределения $F^+(x) = F(x)\mathbf{I}(x \geq 0)$.

Субэкспоненциальные распределения были введены В. П. Чистяковым в [12]. Приведем известное свойство субэкспоненциальных распределений, доказательство которого можно найти, например, в [13].

Утверждение 1. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — независимые случайные величины, а F — субэкспоненциальное распределение такое, что для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено $\mathbf{P}(\eta_i > x) \sim c_i\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n > x) \sim (c_1 + c_2 + \dots + c_n)\overline{F}(x).$$

Определение 2. Распределение F *принадлежит классу* $\mathscr{S}^*$, если конечна величина

$$\mu_+ = \int\limits_0^\infty \overline{F}(x)\,dx$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \int\limits_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy = 2\mu_+. \tag{4}$$

Определение 3. Для любого распределения F с конечным средним определим интегральное распределение F^s, для которого

$$\overline{F^s}(y) = \min\left(1, \int\limits_y^\infty \overline{F}(t)\,dt\right).$$

Утверждение 2. *Если распределение F принадлежит классу $\mathscr{S}^*$, то F и F^s принадлежат классу $\mathscr{S}$.*

Утверждение 2 доказано в [11].

Рассмотрим следующие классы распределений.

Определение 4. Распределение F называется *распределением с длинным хвостом* (*принадлежит классу* $\mathscr{L}$), если $\overline{F}(x) > 0$ для всех x и $\overline{F}(x+t) \sim \overline{F}(x)$ для некоторого (и тем самым для всех) $t > 0$ при $x \to \infty$.

Определение 5. Распределение F называется *надстепенным* (*принадлежит классу* $\mathscr{D}$), если

$$\sup_x \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(x)} < \infty \text{ для некоторого (и тем самым для всех) } t \in (0,1).$$

Классу $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ принадлежат, например, распределения с *правильно меняющимся* хвостом $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}l(x)$, где $\alpha > 0$, а $l(x)$ — медленно меняющаяся функция, а также распределения из более широкого класса, для которых

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x(1+\varepsilon))}{\overline{F}(x)} = 1$$

(в англоязычной литературе распределения из этого класса называют *intermediately regularly varying* ($\mathscr{IRV}$)). Отметим также, что существуют примеры, показывающие, что включение $\mathscr{IRV} \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ строгое.

Определение 6. Распределение F *принадлежит классу* $\mathscr{SC}$, если для функции $Q(x) = -\ln \overline{F}(x)$ выполнены следующие условия:

$$\frac{Q(x)}{\ln x} \to \infty \quad \text{при } x \to \infty, \tag{5}$$

существуют числа $x_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ такие, что

$$\frac{Q(x) - Q(u)}{x - u} \le \alpha \frac{Q(x)}{x} \tag{6}$$

при всех $x > x_0$, $\beta x \le u \le x$.

Класс $\mathscr{SC}$ был введен А. В. Нагаевым в [14]. Этому классу принадлежат, например, распределения Вейбулла с $\overline{F}(x) = e^{-x^\gamma}$ при $0 < \gamma < 1$, а также распределения с $\overline{F}(x) = c_1 e^{-c_2 \ln^\gamma x}$ при $c_1, c_2 > 0$ и $\gamma > 1$ (в частности, при $c_2 = 1/2$ и $\gamma = 2$ это лог-нормальное распределение).

2.1. Оценки для распределений из класса $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$. Известно (см., например, [4, с. 50]) следующее

Утверждение 3. *Если распределение F принадлежит классу $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, то F принадлежит классу $\mathscr{S}$. Если к тому же математическое ожидание F конечно, то F принадлежит классу $\mathscr{S}^*$.*

Для распределения F из класса $\mathscr{D}$ определим

$$L_n \equiv L_n(F) = \sup_x \frac{\overline{F}(\frac{x}{n})}{\overline{F}(x)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Свойство 1. *Для любого распределения $F \in \mathscr{D}$ существует конечный неотрицательный предел*

$$l \equiv l(F) = \lim_{k \to \infty} \log_k L_k. \tag{7}$$

Действительно, последовательность L_n не убывает по n, и

$$L_{nm} = \sup_x \frac{\overline{F}(\frac{x}{mn})}{\overline{F}(x)} \le \sup_x \frac{\overline{F}(\frac{x}{mn})}{\overline{F}(\frac{x}{m})} \sup_x \frac{\overline{F}(\frac{x}{m})}{\overline{F}(x)} = L_n L_m$$

при любых целых $n, m \ge 2$. Для любых n и k выполнены следующие неравенства:

$$L_n \le L_{k^{[\log_k n]+1}} \le L_k^{\log_k n + 1} = L_k n^{\log_k L_k}. \tag{8}$$

Поэтому

$$\log_n L_n \le \ln L_k / \ln n + \log_k L_k.$$

Зафиксировав k, получим, что $\limsup \log_n L_n \le \log_k L_k$ для любого k и, следовательно, $\limsup \log_n L_n \le \inf_k \log_k L_k$. Значит, указанный предел существует, и

$$\lim_{n \to \infty} \log_n L_n = \inf_n \log_n L_n. \qquad \square$$

Отметим, что если хвост распределения F является правильно меняющимся с параметром $\alpha > 0$, то $l(F) = \alpha$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $K \equiv K(\varepsilon)$ такое, что при любом натуральном n*

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K \cdot n^{1+l+\varepsilon},$$

где $l \equiv l(F)$ определено, как в (7).

Доказательство теоремы 1 приведено в § 4. Из теоремы 1 нетрудно получить

Следствие 1. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют распределение F, принадлежащее классу $\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, и пусть τ — не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что $\mathbf{E}\tau^{1+l+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau. \tag{9}$$

Действительно, по формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}(S_\tau > x) = \sum_n \mathbf{P}(\tau = n)\, \mathbf{P}\Biggl(\sum_{i=1}^n \xi_i > x\Biggr).$$

Из утверждений 3 и 1 следует, что

$$\mathbf{P}\Biggl(\sum_{i=1}^n \xi_i > x\Biggr) \sim n\overline{F}(x)$$

при $x \to \infty$ для любого n. Тогда второе равенство в (9) вытекает из теоремы 1 и теоремы о мажорируемой сходимости. Более того, если мы определим $\hat{\xi}_i = \max(0, \xi_i)$ и положим $\widehat{S}_n = \sum\limits_{i=1}^n \hat{\xi}_i$, то, используя те же аргументы, получим, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(\widehat{S}_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau.$$

Теперь первое равенство в (9) следует из соотношений $S_\tau \le M_\tau \le \widehat{S}_\tau$ п. н.

2.2. Оценки для распределений из класса $\mathscr{SC}$. Отметим ряд свойств распределений, принадлежащих классу $\mathscr{SC}$.

Свойство 2. *Если для распределения F выполнено* (6) *с некоторыми постоянными $0 < \alpha$, $\beta < 1$, то найдется такое число $0 < \alpha_1 < 1$, что* (6) *выполнено с постоянными α_1 и $\beta_1 = \beta^2$. Поэтому можно всегда дополнительно предполагать, что* (6) *выполнено с $\beta \le 1/2$.*

Действительно, выполнение (6) эквивалентно выполнению неравенства $Q(\gamma x) > (1 - \alpha(1-\gamma))Q(x)$ при всех $x > x_0$ и при всех $\beta \le \gamma \le 1$. Тогда для $\beta \le \gamma \le 1$ имеем

$$Q(\gamma^2 x) = Q(\gamma(\gamma x)) > (1 - \alpha(1-\gamma))^2 Q(x) > (1 - \alpha_1(1-\gamma^2))Q(x)$$

при всех $\beta \le \gamma \le 1$, если положить

$$\alpha_1 = \max_{\beta \le \gamma \le 1} \frac{2\alpha - \alpha^2(1-\gamma)}{1+\gamma}.$$

Заметим, что

$$\alpha_1 = \alpha^2 + 2\max_{\beta\le\gamma}\frac{\alpha-\alpha^2}{1+\gamma} = \alpha^2 + 2\frac{\alpha-\alpha^2}{1+\beta}.$$

Так как $\beta > 0$, имеем $\alpha_1 < 2\alpha - \alpha^2 < 1$ при $\alpha < 1$. $\square$

Далее без ограничения общности будем считать, что (6) выполнено с некоторым $\beta \le 1/2$. Тогда из (6) получаем следующие соотношения.

(а) *Выполнено неравенство*

$$Q(x) \le \frac{2}{2-\alpha} Q(x/2) \tag{10}$$

при всех $x > x_0$.

(б) *Существуют числа* $R \equiv R(F) > 0$ *и* $0 < \gamma \equiv \gamma(F) < 1$ *такие, что при всех* $x > x_0$ *выполнено неравенство*

$$Q(x) \le Rx^\gamma. \tag{11}$$

(в) *Имеет место неравенство*

$$\frac{Q(x)-Q(u)}{x-u} \le \frac{Q(x)}{x},$$

в частности,

$$\frac{Q(x)}{x} \le \frac{Q(u)}{u} \tag{12}$$

при $\beta x \le u \le x$, *а значит, и при всех* $u \le x$.

Лемма 1. *Если распределение* F *принадлежит классу* $\mathscr{S}\mathscr{C}$, *то* F *принадлежит классу* $\mathscr{S}^*$.

Для распределений, принадлежащих классу $\mathscr{S}\mathscr{C}$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* F *принадлежит классу* $\mathscr{S}\mathscr{C}$ *и число* $0 < \gamma < 1$ *определено в* (11). *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *существует такое* $K \equiv K(\lambda)$, *что при всех* n

$$\sup_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K\exp\{n^{\gamma+\lambda}\}.$$

Лемма 1 и теорема 2 будут доказаны в § 4. Приведем также прямое следствие теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *независимы и имеют распределение* F, *принадлежащее классу* $\mathscr{S}\mathscr{C}$, *и пусть* τ — *не зависящая от них случайная величина, принимающая натуральные значения и такая, что* $\mathbf{E}e^{\tau^{\gamma+\lambda}} < \infty$ *для некоторого* $\lambda > 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(M_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{P}(S_\tau > x)}{\overline{F}(x)} = \mathbf{E}\tau.$$

Действительно, из леммы 1 следует субэкспоненциальность распределения F. Далее, повторив с очевидными изменениями доказательство следствия 1, получим требуемое утверждение.

2.3. Равномерные оценки. Для каждого $c \ge 1$ обозначим

$$\overline{G}_c(x) = \min\{1, c\overline{F}(x)\}. \tag{13}$$

Пусть $x_c = \sup\{x : \overline{F}(x) \geq \frac{1}{c}\}$. Тогда функции распределения G_c имеют вид

$$\overline{G}_c(x) = \begin{cases} 1, & x < x_c, \\ c\overline{F}(x), & x \geq x_c. \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что $x_{c_1} \leq x_{c_2}$ при $c_1 \leq c_2$ и $x_c \to \infty$ при $c \to \infty$.

Приведем теперь утверждения, показывающие некоторую «равномерность» оценок, полученных в теоремах 1 и 2, по классам распределений $\{G_c\}_{c\geq 1}$. В § 3 эти утверждения будут применены для нахождения асимптотики распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующим процессом.

Теорема 3. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $K \equiv K(\varepsilon)$ такое, что при всех натуральных n и при всех c*

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq K \cdot n^{1+l+\varepsilon}.$$

Теорема 4. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}$. Тогда для любого $\lambda > 0$ существует такое $K \equiv K(\lambda)$, что при всех n и при всех c*

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq K \exp\{c^\lambda + n^{\gamma+\lambda}\}.$$

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в § 4.

§ 3. Асимптотика распределения максимума случайного блуждания, управляемого регенерирующей последовательностью

Последовательность $Y = \{Y_n\}_{n\geq 1}$, принимающая значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathscr{Y}, \mathscr{B})$, называется *регенерирующей*, если существует возрастающая последовательность случайных величин $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$, принимающих натуральные значения, таких, что для $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$, случайные векторы

$$\{\tau_n, Y_{T_{n-1}+1}, \dots, Y_{T_n}\}, \quad n \geq 1,$$

независимы при $n \geq 1$ и одинаково распределены при $n \geq 2$. Для упрощения формулировок и доказательств мы рассмотрим лишь случай, когда первый цикл $\{\tau_1, Y_1, \dots, Y_{T_1}\}$ имеет то же распределение, что и последующие.

Для каждого $n \geq 1$ введем семейство вещественнозначных случайных величин $\{\xi_n^y\}_{y\in\mathscr{Y}}$, не зависящих от Y. Предположим также, что семейства $\{\xi_n^y\}_{y\in\mathscr{Y}}$ независимы по n и при всех n случайные величины ξ_n^y имеют функцию распределения $F_y(x) = \mathbf{P}\big(\xi_1^y \leq x\big)$. Рассмотрим случайное блуждание, управляемое регенерирующей последовательностью Y:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i^{Y_i}.$$

Пусть $M_n = \max\limits_{0\leq i\leq n} S_i$, $M = \sup\limits_{n\geq 0} S_n$. Мы изучим асимптотику $\mathbf{P}(M > x)$ при $x \to \infty$ при некоторых условиях, гарантирующих, что $M < \infty$ п. н.

Введем следующее условие:

(A) $\overline{F}_y(x) \sim c(y)\overline{F}(x)$ при $x \to \infty$ для некоторой неотрицательной измеримой функции $c(y)$.

Заметим, что если (А) выполнено, то выполнено также следующее условие:

(Б) $\overline{F}_y(x) \le b(y)\overline{F}(x)$ при всех x и при всех $y \in \mathscr{Y}$ для некоторой измеримой функции $b(y) \ge c(y)$.

Обозначим

$$B_{\tau_1} = \max_{1 \le k \le \tau_1} b(Y_k).$$

Предположим, что $\mathbf{E}\tau_1 < \infty$. Положим при каждом $B \in \mathscr{B}$

$$\pi(B) = \frac{1}{\mathbf{E}\tau_1}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\tau_1} \mathbf{I}\{Y_i \in B\}\right)$$

и предположим, что

(В) $C = \int\limits_{\mathscr{Y}} c(u)\pi(du) < \infty$.

Предположим также, что $\mathbf{E}S_{\tau_1} = -a < 0$. Заметим, что в этом случае $M < \infty$ п. н. В работе [15] показано, что

$$\mathbf{P}(M > x) \sim \frac{C \cdot \mathbf{E}\tau_1}{a}\overline{F^s}(x), \tag{15}$$

если интегральное распределение F^s субэкспоненциально, выполнены условия (А)–(В) и, кроме того,

$$b \equiv \sup_y b(y) < \infty. \tag{16}$$

Случай, когда $\{Y_n\}$ является цепью Маркова с конечным числом состояний, рассмотрен в работах [16, 17]. Заметим, что в этом случае выполняется условие (16). Схожая с (15) асимптотика получена в [18, 19] для стационарного времени ожидания в одноканальных системах обслуживания, управляемых конечной цепью Маркова.

Заметим, что из (16) следует оценка $B_{\tau_1} \le b$ п. н. В приводимых ниже теоремах формулируются условия, достаточные для выполнения соотношения (15) в отсутствие (16).

Теорема 5. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{L} \cap \mathscr{D}$ и выполнены условия* (А) *и* (В). *Если для некоторой измеримой функции $b(y) \ge c(y)$ выполнено условие* (Б), *а также*

$$\mathbf{E}B_{\tau_1}\tau_1^{1+l+\varepsilon} < \infty \tag{17}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(S_{\tau_1} > x)}{\overline{F}(x)} = C \cdot \mathbf{E}\tau_1. \tag{18}$$

Теорема 6. *Пусть распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}$ и выполнены условия* (А) *и* (В). *Если для некоторой измеримой функции $b(y) \ge c(y)$ выполнено условие* (Б), *а также*

$$\mathbf{E}e^{B^{\varepsilon}_{\tau_1}} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{\tau_1^{\gamma+\varepsilon}} < \infty \tag{19}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$, то имеет место (18).

Теорема 7. *Пусть* $\mathbf{E}S_{\tau_1} = -a < 0$. *Тогда в условиях теоремы* 5 *или теоремы* 6

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{P}(M > x)}{\overline{F^s}(x)} = \frac{C \cdot \mathbf{E}\tau_1}{a}.$$

Таким образом, в теореме 7 условие (16) заменено некоторыми ограничениями на длины циклов и на рост функции $b(y)$.

Замечание 1. Условия (17) и (19) в общем случае труднопроверяемы, так как заданы в терминах характеристик, зависимость которых от управляющего регенерирующего процесса и от функции $b(y)$ весьма сложна. Получение более простых достаточных условий для их выполнения представляет собой самостоятельную сложную задачу. Здесь мы ограничимся лишь частными примерами. Пусть $\{Y_n\}$ есть цепь Маркова на неотрицательной полуоси с положительным атомом в нуле. Предположим, что найдутся число $K > 0$ и случайная величина ψ с распределением $G(y)$ и отрицательным средним такие, что при всех $t \ge 0$

$$\mathbf{P}(Y_2 - Y_1 > t \mid Y_1 = y) \le \begin{cases} \mathbf{P}(\psi > t - K) & \text{при } y \le K, \\ \mathbf{P}(\psi > t) & \text{при } y > K. \end{cases}$$

Тогда хорошо известно, что при любом $\alpha > 0$ наличие момента порядка α у случайной величины ψ^+ влечет наличие такого же момента у случайной величины τ_1. Далее, для любого $\beta \in (0,1)$ конечность $\mathbf{E}\exp((\psi^+)^\beta)$ влечет и конечность $\mathbf{E}\exp(\tau_1^{\beta'})$ при всех $0 < \beta' < \beta$ (см., например, [3, следствие 5]).

1. Предположим сначала, что $\sup\limits_y b(y) \equiv b < \infty$. Тогда $B_{\tau_1} \le b < \infty$ п. н. Условие (17) будет выполнено при $\mathbf{E}(\psi^+)^{1+l+\varepsilon} < \infty$, а условие (19) — при $\mathbf{E}\exp((\psi^+)^{\gamma+\varepsilon'}) < \infty$, где $\varepsilon' > \varepsilon$.

2. Предположим более общо, что $b(y) \le \max(C, y^v)$, где C и v — некоторые положительные постоянные. Положим $M = \sup\limits_{1\le k\le\tau_1} Y_k$. Тогда $B_{\tau_1} \le \max(C, M^v)$. Известно, что конечность $\mathbf{E}\psi^\alpha$, $\alpha > 0$, влечет и конечность $\mathbf{E}M^\alpha$. Воспользуемся неравенством Гёльдера: при $l' > l$

$$\mathbf{E}\big(B_{\tau_1}\tau_1^{1+l'}\big) \le \big(\mathbf{E}B_{\tau_1}^r\big)^{1/r}(\mathbf{E}\tau_1^{s(1+l')})^{1/s}.$$

Положив $r = (1+l'+v)/v$, находим, что конечность момента порядка $(1+l'+v)$ у случайной величины ψ^+ влечет выполнение (17).

Аналогично можно получить достаточные условия для выполнения (19), используя следующий факт: если $\mathbf{E}\exp((\psi^+)^\beta) < \infty$ при некотором $\beta \in (0,1)$, то при любом $\beta' \in (0,\beta)$ конечен и момент $\mathbf{E}\exp(M^{\beta'})$.

Следует отметить, что достаточные условия можно получать, используя пробные функции. Этот способ описан в [20, приложение В].

Замечание 2. Условия вида (17) и (19) ослабляют ограничение (16) на функцию $b(y)$. Приведем простой пример, показывающий, что (а) эти условия действительно слабее, чем (16), (б) вообще говоря, асимптотика максимума может быть существенно иной, чем в утверждении теоремы 7, если не накладывать дополнительных условий на рост функции $b(y)$.

Пусть $\{Y_n\}_{n\ge1}$ — цепь Маркова с начальным условием $Y_0 = 0$, принимающая значения в Z_+. Пусть вероятности переходов этой цепи Маркова таковы, что $p_{k,0} = 1$ при всех $k \neq 0$ и $p_{0,0} = 0$. Тогда $\tau \equiv 2$ и (17) эквивалентно сходимости ряда

$$\mathbf{E} b_{Y_2} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{0,k} b(k) < \infty, \tag{20}$$

т. е. теорема 7 в данном случае применима для достаточно широкого класса неограниченных функций $b(y)$.

Пусть случайная величина ξ имеет следующее распределение: $\mathbf{P}(\xi = -b) = \frac{1}{2}$ при некотором $b > 0$ и

$$\mathbf{P}(\xi > x) = \frac{1}{2} x^{-\alpha}$$

при $x \geq 1$, $\alpha > 2$. Пусть распределение F совпадает с распределением случайной величины ξ, а при всех $k \geq 2$

$$\overline{F}_k(x) = \min\{1, k^2 \overline{F}(x)\}.$$

Ясно, что условия (А) и (Б) выполняются с $c(k) = b(k) = k^2$. Ясно также, что

$$\overline{F}_k(x) = \begin{cases} 1, & x < 2^{-\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}}, \\ \frac{1}{2} k^2 x^{-\alpha}, & x \geq 2^{-\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}}. \end{cases}$$

Предположим, что $p_{0,0} = 0, p_{0,1} = 0$ и $p_{0,k} = \frac{A}{k^2}$ при $k \geq 2$. Здесь $\frac{1}{A} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Тогда условие (20) не выполняется. Однако можно показать, что

$$\mathbf{P}\big(\xi_2^{Y_2} > x\big) = \sum_{k \geq 2} p_{0,k} \overline{F}_k(x) = \frac{A}{2} \sum_{k \geq 2 : 2^{-\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}} < x} x^{-\alpha} + A \sum_{k : 2^{-\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{2}{\alpha}} \geq x} \frac{1}{k^2} \sim \widetilde{A} x^{-\frac{\alpha}{2}},$$

где $\widetilde{A}$ — некоторая положительная конечная константа. Отсюда, используя утверждение 1, заключаем, что

$$\mathbf{P}(S_2 > x) \sim \widetilde{A} x^{-\frac{\alpha}{2}}$$

при $x \to \infty$.

Нетрудно показать, что можно подобрать b так, чтобы $\mathbf{E} S_2 < 0$. И тогда, действуя аналогично доказательству теоремы 7, получим, что

$$\mathbf{P}(M > x) \sim \frac{\widetilde{A}}{|\mathbf{E} S_2|} \int_x^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{2}}\, dt = K x^{-\frac{\alpha}{2}+1}$$

при $x \to \infty$ и $K = \frac{\widetilde{A}}{|\mathbf{E} S_2|} \frac{1}{\alpha/2 - 1}$.

§ 4. Доказательства

Утверждение 4. *Пусть для функций распределений F и H верно $\overline{H}(x) \sim c\overline{F}(x)$ для некоторого $c > 0$. Тогда если F субэкспоненциально, то H также субэкспоненциально. Если же F^s субэкспоненциально, то H^s субэкспоненциально и $\overline{H^s}(x) \sim c\overline{F^s}(x)$.*

Доказательство утверждения 4 можно найти в [21].

Хорошо известно также следующее

Утверждение 5. *Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F и отрицательным математическим ожиданием $E\xi_1 = -g < 0$. Предположим, что F^s субэкспоненциально. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ и $M = \max(0, \sup_n S_n)$. Тогда при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}(M > x) \sim \frac{1}{g}\overline{F^s}(x).$$

Доказательство утверждения при различных дополнительных предположениях можно найти, например, в [22, § 21, теорема 12] или в [23]. В приведенном выше варианте теорема доказана в [24].

Утверждение теоремы 1 следует из теоремы 3, доказательство которой будет приведено ниже.

Доказательство леммы 1. Покажем сначала, что

$$\mu_+ = \int_0^\infty \overline{F}(t)dt < \infty.$$

Действительно, из свойства (5) вытекает, что при достаточно больших y при всех $t \geq y$ выполняется $Q(t) \geq 2\ln t$. Следовательно, $\overline{F}(t) \leq t^{-2}$ при $t \geq y$, и $\mu_+ < \infty$.

Докажем теперь, что выполняется (4). Запишем:

$$\int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy.$$

Надо показать, что

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy = \mu_+.$$

Имеем

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy \geq \int_0^{\frac{x}{2}} \overline{F}(y)\,dy \to \mu_+$$

при $x \to \infty$.

Пусть теперь $h(x) = x^\lambda$ с $\lambda < 1-\gamma$. Тогда

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy = \int_0^{h(x)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy + \int_{h(x)}^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy.$$

Для первого интеграла в правой части имеем

$$\int_0^{h(x)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy \leq \frac{\overline{F}(x-h(x))}{\overline{F}(x)} \int_0^{h(x)} \overline{F}(y) \to \mu_+$$

при $x \to \infty$. Указанная сходимость имеет место, так как $x - h(x) > x/2$ при достаточно больших x, и можно применить (6):

$$\frac{\overline{F}(x-h(x))}{\overline{F}(x)} = \exp\{Q(x) - Q(x-h(x))\} \leq \exp\left\{\alpha\frac{Q(x)h(x)}{x}\right\} \to 1$$

в силу (11) и определения $h(x)$.

Для второго интеграла

$$\int\limits_{h(x)}^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)\,dy = \int\limits_{h(x)}^{\frac{x}{2}} \exp\{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)\}\,dy.$$

Из (6) следует, что

$$Q(x) - Q(x-y) \le \alpha\frac{Q(x)}{x}y \quad \text{при } y \le \frac{x}{2},$$

из (12) — что

$$\alpha\frac{Q(x)}{x}y - Q(y) \le (\alpha - 1)Q(y).$$

Тогда

$$\int\limits_{h(x)}^{\frac{x}{2}} \exp\{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)\}\,dy \le \int\limits_{h(x)}^{\frac{x}{2}} \exp\{(\alpha-1)Q(y)\}\,dy$$
$$\le e^{(\alpha-1)Q(h(x))}(x/2 - h(x)) \le xe^{(\alpha-1)Q(h(x))}.$$

Используя свойство (5), для любого $A > 0$ при достаточно больших x имеем

$$xe^{(\alpha-1)Q(h(x))} \le x^{1+(\alpha-1)\lambda A}.$$

Подобрав теперь A таким образом, чтобы показатель степени в последней оценке был отрицательным, получим требуемое утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть $h(x)$ — неубывающая функция такая, что $h(x) \le x/2$ при всех $x > 0$ и $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Если распределение F на $\mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathscr{SC}$, то для всех x начиная с некоторого*

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x) - 2\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \le \frac{2}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} + 2\left(\exp\left\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\right\} - 1\right). \tag{21}$$

Доказательство леммы 2. Так как F — распределение на $\mathbb{R}_+$, имеет место равенство

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{[\overline{F}(x/2)]^2}{\overline{F}(x)} + 2\int\limits_0^{h(x)} dF(y)\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}$$
$$+ 2\int\limits_{h(x)}^{x/2} dF(y)\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = I_0(x) + I_1(x) + I_2(x). \tag{22}$$

Используя (10), получим

$$I_0(x) = \exp\{Q(x) - 2Q(x/2)\} \le \exp\left\{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}Q(x/2)\right\}. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь интегралы в (22). Имеем

$$I_1(x) \le 2\frac{\overline{F}(x-h(x))}{\overline{F}(x)} = 2\exp\{Q(x-h(x)) - Q(x)\} \le 2\exp\biggl\{\frac{Q(x)}{x}h(x)\biggr\}.$$

Последнее неравенство следует из (6), так как $x - h(x) \ge x/2$. Пользуясь (6) и (12), получим

$$\begin{aligned} I_2(x) &= 2\int\limits_{h(x)}^{x/2} \exp\{Q(x) - Q(x-y) - Q(y)\}\, dQ(y) \\ &\le 2\int\limits_{h(x)}^{x/2} \exp\biggl\{\alpha\frac{Q(x)}{x}y - Q(y)\biggr\} dQ(y) \le 2\int\limits_{h(x)}^{x/2} \exp\{(\alpha-1)Q(y)\}\, dQ(y) \\ &= \frac{2}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} - \frac{2}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(x/2)\}. \end{aligned}$$

Так как $2/(2-\alpha) > 1$, для x начиная с некоторого правая часть (23) допускает оценку

$$\exp\biggl\{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}Q(x/2)\biggr\} \le \exp\{(\alpha{-}1)Q(x/2)\} < \frac{2}{1{-}\alpha}\exp\{(\alpha{-}1)Q(x/2)\},$$

и тогда

$$I_0(x) + I_2(x) \le \frac{2}{1{-}\alpha}\exp\{(\alpha{-}1)Q(h(x))\}.$$

Утверждение леммы следует теперь из (22). $\square$

Доказательство теоремы 2. Докажем теорему в случае, когда F — распределение на $\mathbb{R}_+$. Общий случай сводится к рассматриваемому введением функции $F^+(x) = F(x)\mathbf{I}(x \ge 0)$.

Заметим, что при $\lambda \ge 1-\gamma$ теорема верна в силу (1). Рассмотрим случай $\lambda < 1-\gamma$. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и $h(x) = x^{\frac{\lambda}{2}}$ при достаточно больших x. Тем самым

$$\exp\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\} - 1 \le \exp\{\alpha R x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}\} - 1 \sim \alpha R x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших x будет выполнено неравенство

$$2\biggl(\exp\biggl\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\biggr\} - 1\biggr) \le 2\alpha R(1+\varepsilon)x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}.$$

Из (5) следует, что для любого $A > 0$ при x начиная с некоторого верно соотношение $Q(x) \ge A\ln x$. Отсюда

$$\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} \le x^{(\alpha-1)\frac{\lambda}{2}A} = o(x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}).$$

Возвращаясь к (21), окончательно получаем, что найдется число M такое, что при всех $x \ge M$ и $\widetilde{R} > 2\alpha R(1+\varepsilon)$

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x) - 2\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \le \widetilde{R}x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}. \tag{24}$$

Обозначим $\alpha_n = \sup\limits_x \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}$. Известно (см., например, [4, лемма 1.3.5]), что при всех $n \geq 2$ справедливы следующие неравенства:

$$\alpha_n \leq \max\left\{\frac{1}{\overline{F}(n)}, 1 + \alpha_{n-1}\left(1 + \sup_{x \geq n} \frac{\overline{F^{*2}}(x) - 2\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)}\right)\right\}.$$

Пусть $N \geq M$. Из (24) получим, что при всех $n \geq N$

$$\alpha_n \leq \max\left\{\frac{1}{\overline{F}(n)}, 1 + \alpha_{n-1}(1 + \widetilde{R}n^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1})\right\}. \tag{25}$$

Обозначим $\beta_n = \widetilde{R}n^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}$. Воспользовавшись (1), заметим, что существует $\widetilde{K}$ такое, что $\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq \widetilde{K}$ при всех x и при всех $n < N$. Будем считать, что $\widetilde{K} \geq \frac{1}{\overline{F}(N)} \equiv e^{Q(N)}$. Применяя метод математической индукции, нетрудно показать, что

$$e^{Q(n+1)} \leq 1 + \alpha_n(1 + \beta_{n+1})$$

при достаточно большом N и при всех $n \geq N - 1$. Тогда из (25) следует, что

$$\alpha_n \leq 1 + \alpha_{n-1}(1 + \beta_n) \tag{26}$$

при $n \geq N$, откуда $\alpha_n \leq n\widetilde{K} \prod\limits_{j=N}^{n}(1 + \beta_j)$. Далее,

$$\prod_{j=N}^{n}(1 + \beta_j) = \exp\left\{\sum_{j=N}^{n} \ln(1 + \beta_j)\right\} \leq \exp\left\{\sum_{j=N}^{n} \beta_j\right\}$$
$$= \exp\left\{\widetilde{R}\sum_{j=N}^{n} j^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}\right\} \leq \exp\left\{\widetilde{R}\int\limits_{N-1}^{n} x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}\,dx\right\} \leq \exp\left\{\frac{\widetilde{R}}{\gamma + \frac{\lambda}{2}} n^{\gamma+\frac{\lambda}{2}}\right\}.$$

Возвращаясь к (26), получаем

$$\alpha_n \leq n\widetilde{K}\exp\left\{\frac{\widetilde{R}}{\gamma + \frac{\lambda}{2}} n^{\gamma+\frac{\lambda}{2}}\right\} \leq K\exp\{n^{\gamma+\lambda}\}$$

при некотором $K \equiv K(\lambda)$.

Теорема 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Из (14) следует, что $\xi^c \geq x_c$ п. н. для случайной величины ξ^c с распределением G_c.

Положим $d = (\overline{F}(x_c))^{-1}$. Тогда $d \geq c$, $\overline{G}_c(x) \leq \overline{G}_d(x)$ при всех x, $\overline{G_c^{*n}}(x) \leq \overline{G_d^{*n}}(x)$ при всех x и n. Заметим также, что $\overline{F}(x_d) = \overline{F}(x_c) = 1/d$.

Рассмотрим теперь

$$\sup_x \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)} = \max\left\{\sup_{x \leq nx_d} \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)}, \sup_{x > nx_d} \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)}\right\}. \tag{27}$$

Пусть сначала $x \leq nx_d$. При таких x

$$\overline{G_d^{*n}}(x) = \mathbf{P}\big(\xi_1^d + \cdots + \xi_n^d > x\big) = 1,$$

так как $\xi_i^d \geq x_d$ п. н. при всех i. Тогда

$$\sup_{x \leq nx_d} \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)} = \sup_{x \leq nx_d} \frac{1}{\overline{G}_d(x)} = \frac{1}{\overline{G}_d(nx_d)} = \frac{1}{d\overline{F}(nx_d)} \leq L_n \frac{1}{d\overline{F}(x_d)} = L_n.$$

Теперь рассмотрим $x > nx_d$. При таких x

$$\overline{G_d^{*n}}(x) = \mathbf{P}\big(\xi_1^d + \dots + \xi_n^d > x\big) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\xi_i^d > \frac{x}{n}\right) = n\overline{G}_d\left(\frac{x}{n}\right) = nd\overline{F}\left(\frac{x}{n}\right),$$

откуда сразу

$$\sup_{x>nx_d} \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)} \le \sup_{x>nx_d} \frac{n\overline{F}(\frac{x}{n})}{\overline{F}(x)} \le nL_n.$$

Возвращаясь к (27), получим

$$\sup_x \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)} \le nL_n.$$

Пусть $\log_k L_k \le l+\varepsilon$ при $k \ge N = N(\varepsilon)$. Тогда, используя (8) с $k = N$, приходим к оценке

$$\sup_x \frac{\overline{G_d^{*n}}(x)}{\overline{G}_d(x)} \le L_N n^{1+l+\varepsilon}.$$

Тем самым утверждение теоремы выполнено с $K = L_N$. $\square$

Доказательство теоремы 4 основано на следующих утверждениях.

Лемма 3. *Пусть $h(x)$ — неубывающая функция такая, что $h(x) \le x/2$ при всех $x > 0$ и $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Если распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}$, то существует число $c^* \ge 1$ такое, что при всех $c \ge c^*$*

$$\frac{\overline{G_c^{*2}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \le 2\exp\left\{\frac{Q(x)}{x}h(x)\right\} + \frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\}$$

при всех x, для которых $h(x) \ge x_c$.

Лемма 4. *Если распределение F принадлежит классу $\mathscr{SC}$, то для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует $K \equiv K(\varepsilon,\delta)$ такое, что при всех $c \ge 1$ и при всех натуральных n*

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \le Ke^{c^\delta}(1+\varepsilon)^n.$$

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательству леммы 2.

Доказательство леммы 4. Нетрудно показать, что утверждение леммы можно доказывать при $c \ge c_1$ для любого конечного c_1. Заметим, что из утверждения 4 следует, что распределение G_c субэкспоненциально для каждого c. Тогда из (1) вытекает, что

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \le K_c(1+\varepsilon)^n$$

для каждого $c \ge 1$, причем в качестве констант K_c могут быть взяты числа $(\overline{F}(T_c))^{-1}$, где T_c таково, что

$$\sup_{x \ge T_c} \frac{\overline{G_c^{*2}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \le 2+\varepsilon.$$

Оценим сверху $(\overline{F}(T_c))^{-1}$ или T_c.

Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3 и $h(x) = x^{\kappa}$ при достаточно больших x. Здесь $0 < \kappa < 1-\gamma$. Из (11) следует, что $Q(x)h(x)/x \to 0$ при $x \to \infty$ и при всех x начиная с некоторого

$$2\exp\{Q(x)h(x)/x\} \leq 2 + \varepsilon/2.$$

Пусть $\frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} \leq \varepsilon/2$ при $x \geq V_c$. Очевидно, что $h(x) \geq x_c$ при $x \geq V_c$, и тогда $T_c \leq V_c$. Из (5) следует, что для любого $A > 0$ найдется число y_1 такое, что $Q(x) \geq A\ln x$ при $x \geq y_1$. Тогда

$$\frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} \leq \frac{2c}{1-\alpha}(h(x))^{A(\alpha-1)} = \frac{2c}{1-\alpha}x^{A\kappa(\alpha-1)}.$$

Значит, найдется $c_1 \geq c^*$ такое, что при $c \geq c_1$

$$V_c \leq \widetilde{A}c^{\frac{1}{A\kappa(1-\alpha)}},$$

где $\widetilde{A} = (\varepsilon(1-\alpha)/4)^{-\frac{1}{A\kappa(1-\alpha)}}$. Итак,

$$\frac{1}{\overline{F}(T_c)} = \exp\{Q(T_c)\} \leq \exp\{R(T_c)^{\gamma}\} \leq \exp\{R\widetilde{A}^{\gamma}c^{\frac{\gamma}{A\kappa(1-\alpha)}}\},$$

и если подобрать подходящим образом A, то $(\overline{F}(T_c))^{-1} \leq \exp\{R\widetilde{A}^{\gamma}c^{\delta/2}\} \leq Ke^{c^{\delta}}$ при $c \geq c_1$ и некотором K. $\square$

Доказательство теоремы 4. Из теоремы 2 следует, что утверждение теоремы можно доказывать для $c \geq c_1$ при некотором положительном конечном c_1. Ясно, что G_c — распределение на $\mathbb{R}_+$ при достаточно больших c. Будем далее рассматривать только такие c.

Заметим, что при $\lambda \geq 1-\gamma$ теорема верна в силу леммы 4. Рассмотрим случай $\lambda < 1-\gamma$. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3 и $h(x) = x^{\frac{\lambda}{2}}$ при достаточно больших x. Тогда

$$\frac{\overline{G_c^{*2}}(x) - 2\overline{G}_c(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq \frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} + 2\left(\exp\left\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\right\} - 1\right) \quad (28)$$

при $c \geq c^*$ и при $h(x) \geq x_c$, т. е. для $x \geq (x_c)^{\frac{2}{\lambda}}$. При $x \to \infty$

$$\exp\left\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\right\} - 1 \leq \exp\{\alpha Rx^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}\} - 1 \sim \alpha Rx^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}.$$

Следовательно, для всех x начиная с некоторого

$$2\left(\exp\left\{\alpha\frac{Q(x)}{x}h(x)\right\} - 1\right) \leq \widetilde{R}x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1},$$

где $\widetilde{R} > 2\alpha R$. Из (5) следует, что для любого $A > 0$ найдется число y_1 такое, что $Q(x) \geq A\ln x$ при $x \geq y_1$. Отсюда

$$\frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} \leq \frac{2c}{1-\alpha}(h(x))^{A(\alpha-1)} = \frac{2c}{1-\alpha}x^{A\frac{\lambda}{2}(\alpha-1)},$$

и если A подобрано подходящим образом, то $\frac{2c}{1-\alpha}\exp\{(\alpha-1)Q(h(x))\} \leq x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}$ при $x > N_c = (2c/(1-\alpha))^{\frac{1}{A}}$. Возвращаясь к (28), получаем, что при $c \geq c^*$ и $x \geq \max\{(x_c)^{\frac{2}{\lambda}}, (2c/(1-\alpha))^{\frac{1}{A}}\}$ выполнено неравенство

$$\frac{\overline{G_c^{*2}}(x) - 2\overline{G}_c(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq (1+\widetilde{R})x^{\gamma+\frac{\lambda}{2}-1}.$$

Мы считаем здесь, что $(x_c)^{\frac{2}{\lambda}} \geq y_1$ для $c \geq c^*$. Обозначим для краткости $\alpha_{n,c} = \sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)}$. При $n < N_c$ воспользуемся леммой 4 и получим $\alpha_{n,c} \leq \widetilde{K} \exp\{c^{\frac{\lambda}{2}} + N_c \ln(1+\varepsilon)\}$ для всех $n < N_c$. При $c \geq c^*$, повторяя с очевидными изменениями доказательство теоремы 2, получим, что при всех n

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq \widetilde{K} n \exp\left\{c^{\frac{\lambda}{2}} + N_c \ln(1+\varepsilon) + \frac{1+\widetilde{R}}{\gamma + \frac{\lambda}{2}} n^{\gamma + \frac{\lambda}{2}}\right\}. \tag{29}$$

Из (5) следует, что для любого $A > 0$ найдется число $c_1 \geq c^*$ такое, что $Q(x_c) \geq A \ln x_c$ при $c \geq c_1$. Имеем $\ln c = Q(x_c) > A \ln x_c$, т. е. $x_c < c^{\frac{1}{A}}$ при $c \geq c_1$. Тогда $N_c \leq S c^{\frac{\lambda}{2}}$ для некоторого S, так как A и $\widetilde{A}$ могут быть сколь угодно большими. Теперь из (29) получаем, что

$$\sup_x \frac{\overline{G_c^{*n}}(x)}{\overline{G}_c(x)} \leq K \exp\{c^{\lambda} + n^{\gamma+\lambda}\}$$

для некоторого $K \equiv K(\lambda)$. Тем самым теорема 4 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Пусть $\nu = (\tau_1, Y_1, \dots, Y_{\tau_1})$. Тогда из условий (А) и (Б) имеем

$$\mathbf{P}\big(\xi_j^{Y_j} > x | \nu\big) \sim c_{Y_j} \overline{F}(x) \quad \mathbf{P}_\nu\text{-п. н.} \tag{30}$$

и

$$b_{Y_j} \equiv \sup_x \frac{\mathbf{P}\big(\xi_j^{Y_j} > x | \nu\big)}{\overline{F}(x)}. \tag{31}$$

Из утверждений 3 и 1 имеем также

$$\frac{\mathbf{P}\left(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1} \xi_j^{Y_j} > x | \nu\right)}{\overline{F}(x)} \to \sum_{j=1}^{\tau_1} c_{Y_j} \quad \mathbf{P}_\nu\text{-п. н.} \tag{32}$$

Рассмотрим случайные величины η_d, имеющие распределения G_d, введенные в (14). Заметим, что если $d_1 \leq d_2$, то $\eta_{d_1} \leq \eta_{d_2}$ п. н. Кроме того, из условия (Б) следует неравенство $\xi_i^y \leq \eta_{b(y)}$ п. н. при всех i. Тогда

$$\frac{\mathbf{P}\left(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1} \xi_j^{Y_j} > x | \nu\right)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{\overline{G_{B_{\tau_1}}^{*\tau_1}}(x)}{\overline{F}(x)} \quad \mathbf{P}_\nu\text{-п. н.}$$

Из теоремы 3 вытекает оценка

$$\frac{\overline{G_{B_{\tau_1}}^{*\tau_1}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K B_{\tau_1} \tau_1^{1+l+\varepsilon} \quad \mathbf{P}_\nu\text{-п. н.} \tag{33}$$

Используя условие (17), по теореме о мажорируемой сходимости имеем

$$\frac{\mathbf{P}\left(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1} \xi_j^{Y_j} > x\right)}{\overline{F}(x)} \equiv \mathbf{E} \frac{\mathbf{P}\left(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1} \xi_j^{Y_j} > x | \nu\right)}{\overline{F}(x)} \to \mathbf{E} \sum_{j=1}^{\tau_1} c_{Y_j} = C \cdot \mathbf{E}\tau_1. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 6. Проведем доказательство аналогично доказательству теоремы 5. Соотношения (30) и (31) имеют место в силу условий

(А) и (Б). Из леммы 1 и утверждения 2 следует, что распределение F субэкспоненциально, поэтому имеет место (32). Можно считать, что условие (19) выполнено с $\varepsilon < 1-\gamma$. Положим в теореме 4 $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда вместо оценки (33) при некотором K будет

$$\frac{\overline{G^{*\tau_1}_{B_{\tau_1}}}(x)}{\overline{F}(x)} \le K \exp\bigl\{B_{\tau_1}^{\frac{\varepsilon}{2}} + \tau_1^{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}\bigr\} \quad \mathbf{P}_\nu\text{-п. н.}$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, получим

$$\mathbf{E}\exp\bigl\{B_{\tau_1}^{\frac{\varepsilon}{2}} + \tau_1^{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}\bigr\} \le \mathbf{E}e^{2B_{\tau_1}^{\frac{\varepsilon}{2}}}\mathbf{E}e^{2\tau_1^{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}} < \infty$$

в силу условия (19). Тогда по теореме о мажорируемой сходимости имеем

$$\frac{\mathbf{P}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1}\xi_j^{Y_j} > x\Bigr)}{\overline{F}(x)} \equiv \mathbf{E}\frac{\mathbf{P}\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{\tau_1}\xi_j^{Y_j} > x|\nu\Bigr)}{\overline{F}(x)} \to \mathbf{E}\sum_{j=1}^{\tau_1} c_{Y_j} = C\cdot\mathbf{E}\tau_1. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 7. Заметим сначала, что если F удовлетворяет условиям теоремы 5 или теоремы 6, то распределение F^s субэкспоненциально (в первом случае это следует из утверждения 3 и условий теоремы 7, во втором — из леммы 1 и утверждения 2). Приведем теперь утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству следствия 1.

Лемма 5. $\mathbf{P}(M_{\tau_1} > x) \sim \mathbf{P}(S_{\tau_1} > x)$ *при* $x\to\infty$.

Продолжим доказательство теоремы 7. Обозначим

$$\varphi_1 = S_{T_1},$$

а при $i>1$

$$\varphi_i = \sum_{k=T_{i-1}+1}^{T_i}\xi_k^{Y_k}.$$

Очевидно, что $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\overline{H}(x) = \mathbf{P}(\varphi_1 > x)$. Из условий теоремы 7 и леммы 5 вытекает, что при $x\to\infty$

$$\overline{H}(x) \sim \mathbf{P}(M_{\tau_1} > x) \sim C\cdot\mathbf{E}\tau_1\overline{F}(x).$$

Пусть теперь $\widetilde{S}_n = \sum\limits_{i=1}^n \varphi_i$ и $\widetilde{M} = \sup\limits_n \widetilde{S}_n$. Заметим, что случайные величины

$$\psi_1 = \max_{n\le T_1} S_n, \quad \psi_i = \max_{T_{i-1}+1\le n\le T_i}\sum_{k=T_{i-1}+1}^{n}\xi_k^{Y_k},\ i\ge 2,$$

также независимы и одинаково распределены. Из леммы 5 следует, что $\mathbf{P}(\psi_i > x) \sim \mathbf{P}(\varphi_i > x)$ при $x\to\infty$ для каждого i. Тогда $M = \sup\limits_n\sum\limits_{i=1}^n\psi_i$ и $\mathbf{P}(M>x)\sim P(\widetilde{M} > x)$ при $x\to\infty$. Из утверждения 4 заключаем, что H^s субэкспоненциально и

$$\overline{H^s}(x) \sim C\cdot\mathbf{E}\tau_1\overline{F^s}(x) \quad \text{при } x\to\infty.$$

Отсюда, используя утверждение 5, имеем

$$\mathbf{P}(M > x) \sim \mathbf{P}(\widetilde{M} > x) \sim \frac{C \cdot \mathbf{E}\tau_1}{a}\overline{F^s}(x)$$

при $x \to \infty$. $\square$

Как нам стало известно, в книге А. А. Боровкова и К. А. Боровкова, готовящейся к печати с предварительным названием «Асимптотический анализ случайных блужданий. Регулярное распределение скачков», получены результаты, близкие к следствиям 1 и 2 настоящей работы. Для распределений с правильно меняющимися или семиэкспоненциальными хвостами найдены также условия, достаточные для выполнения соотношения

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{P}(S_n > x)}{\overline{F}(x)} \to \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \quad \text{при } x \to \infty$$

и произвольной последовательности $\{a_n\}$, образующей абсолютно сходящийся ряд. Автор благодарит А. А. Боровкова за информацию о данной книге, а также за ценные замечания при подготовке настоящей работы.

Автор благодарит С. Г. Фосса и Н. И. Чернову за постоянное внимание, полезные и стимулирующие обсуждения и важные советы, Д. Э. Денисова за полезные замечания и комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching Processes. Berlin: Springer Verl., 1972.
2. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 4. С. 660–675.
3. *Боровков А. А.* Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.
4. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.* Modelling Extremal Events. Berlin: Springer Verl., 1997.
5. *Mikosch T., Nagaev A.* Rates in approximations to ruin probabilities for heavy-tailed distributions // Extremes. 2001. V. 4, N 1. P. 67–78.
6. *Greenwood P., Monroe I.* Random stopping preserves regular variation of process distributions // Ann. Probab. 1977. V. 5. P. 42–51.
7. *Боровков А. А., Утев С. А.* Оценки для распределений сумм, остановленных в марковский момент времени // Теория вероятностей и ее применения. 1993. Т. 38, № 2. С. 259–273.
8. *Borovkov A. A., Borovkov K. A.* On large deviation probabilities for random walks. I. Regularly varying tails. II. Regularly exponential distribution tails // Theory Probab. Appl. 2001. V. 16. P. 209–232.
9. *Коршунов Д. А.* Вероятности больших уклонений максимумов сумм независимых слагаемых с отрицательным средним и субэкспоненциальным распределением // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 387–397.
10. *Foss S., Zachary S.* The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift // Ann. Appl. Probab. 2003. V. 13. P. 37–53.
11. *Klüppelberg C.* Subexponential distributions and integrated tails // J. Appl. Probab. 1988. V. 35. P. 325–347.
12. *Чистяков В. П.* Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 4. С. 710–718.
13. *Cline D. B. H.* Convolution tails, product tails and domains of attraction // Probab. Theory Related Fields. 1986. V. 72. P. 529–557.

14. *Нагаев А. В.* Об одном свойстве сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее применения. 1977. Т. 22, № 2. С. 335–346.
15. *Foss S., Zachary S.* Asymptotics for the maximum of a modulated random walk with heavy-tailed increments // Analytic Methods in Applied Probability (in memory of Fridrih Karpelevich), Amer. Math. Soc. Transl. 2002. V. 207, N 2. P. 37–52.
16. *Arndt K.* Asymptotic properties of the distribution of the supremum of a random walk on a Markov chain. // Probab. Appl. 1980. V. 25. P. 309–324.
17. *Alsmeyer G., Sgibnev M.* On the tail behaviour of the supremum of a random walk defined on a Markov chain // Yokohama Math. J. 1999. V. 46. P. 139–159.
18. *Asmussen S., Schmidli H., Schmidt V.* Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps // Adv. Appl. Probab. 1999. V. 31, N 2. P. 422–447.
19. *Takine T.* Subexponential asymptotics of the waiting time distribution in a single-server queue with multiple Markovian arrival streams // Stoch. Models. 2001. V. 17, N 4. P. 429–448.
20. *Meyn S. P., Tweedie R. L.* Markov Chains and Stochastic Stability. London: Springer-Verl., 1993.
21. *Embrechts P., Goldie C. M.* On convolution tails // Stoch. Proc. Appl. 1982. V. 13. P. 263–278.
22. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
23. *Pakes A. G.* On the tail of waiting-time distribution // J. Appl. Probab. 1975. V. 12. P. 555–564.
24. *Veraverbeke N.* Asymptotic behavior of Wiener–Hopf factors of a random walk // Stoch. Proc. Appl. 1977. V. 5. P. 27–37.

Статья поступила 1 октября 2003 г., окончательный вариант — 24 марта 2004 г.

Шнеер Всеволод Владиславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Current address:
Vsevolod Shneer
Department of AMS
Heriot-Watt University
Edinburg
Scotland
EH14 4AS

sevashneer@ngs.ru