Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 514.745.82

МАГНИТНЫЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА ОДНОРОДНОМ СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

Д. И. Ефимов

Аннотация: Доказана некоммутативная интегрируемость магнитного геодезического потока, задаваемого формой Кириллова на орбите присоединенного представления компактной полупростой группы Ли. Отсюда вытекает, что на односвязном симплектическом многообразии, на котором транзитивно действует компактная полупростая группа Ли (т. е. многообразие однородное) магнитный геодезический поток, задаваемый однородной симплектической формой и некоторой метрикой, интегрируем в некоммутативном смысле.

Ключевые слова: магнитный геодезический поток, геодезический поток, форма Кириллова, симплектическое многообразие, однородное пространство, отображение момента, интегрируемые гамильтоновы системы.

1. Введение

В работе доказана

Теорема 1. *Пусть $M = \mathbf{G}/\mathbf{H}$ — односвязное однородное симплектическое многообразие, где $\mathbf{G}$ — компактная полупростая группа Ли. Тогда существует риманова метрика на M такая, что магнитный геодезический поток, задаваемый симплектической формой, интегрируем в некоммутативном смысле.*

Напомним основные определения. Пусть M^n — многообразие с римановой метрикой g_{ij}, которая задает изоморфизм касательного и кокасательного расслоений (преобразование Лежандра)

$$\xi \in T_x M^n \to p \in T_x^* M^n$$

по формуле

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \to p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_k = g_{ki}\xi^i,\ k = 1, \dots, n.$$

Симплектическая форма $\omega = dp_i \wedge dx^i$ задает на пространстве гладких функций на кокасательном расслоении скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} \right).$$

При этом пространство функций становится алгеброй Ли со скобками Пуассона в качестве коммутатора. Говорят, что функции f, g *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю: $\{f, g\} \equiv 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403).

Гамильтоновой системой с гамильтонианом $H : T^*M^n \to \mathbb{R}$ на симплектическом многообразии T^*M^n называется поток, который определяется уравнением
$$\frac{df}{dt} = \{f, H\},$$
задающим изменение любой гладкой функции вдоль потока. Функции, инвариантные относительно потока, называются *первыми интегралами* или *интегралами движения потока.*

Геодезический поток, описывающий движение частицы по инерции с кинетической энергией $|\dot{x}|^2/2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j/2$, задается гамильтонианом
$$H(x,p) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_ip_j,$$
где $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Включение магнитного поля согласно уравнениям Максвелла задается замкнутой 2-формой
$$F = \sum_{i<j} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$$
и состоит в деформации скобок Пуассона, которые принимают вид
$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}$$
(см. [1]). Полученная гамильтонова система называется *магнитным геодезическим потоком, заданным формой F.*

Гамильтонова система называется *интегрируемой* (в коммутативном смысле), если она имеет n первых интегралов в инволюции, градиенты которых независимы почти всюду на T^*M^n. Такое семейство первых интегралов называется *полным коммутативным набором* независимых интегралов.

Напомним определение некоммутативной интегрируемости [2] (см. также [3]). Пусть $\mathscr{F}$ — пространство первых интегралов гамильтоновой системы, которое образует алгебру Ли относительно скобки Пуассона. Для каждой точки $x \in M$ определим два подпространства в T^*_xM: $F_x \subset T^*_xM$ — пространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathscr{F}$, и $K_x \subset F_x$ — ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x.

Если имеется открытое всюду плотное подмножество $U \subset M$ (точек общего положения) такое, что для всех $x \in U$
$$\dim F_x + \dim K_x = \dim M,$$
то гамильтонова система называется *интегрируемой в некоммутативном смысле.* В этом случае число $\dim F_x$ называется *дифференциальной размерностью* алгебры интегралов $\mathscr{F}$, а $\dim K_x$ — *дифференциальным индексом.* Они соответственно обозначаются через $\operatorname{ddim}\mathscr{F}$ и $\operatorname{dind}\mathscr{F}$. Тогда условие некоммутативной интегрируемости можно записать в виде
$$\operatorname{ddim}\mathscr{F} + \operatorname{dind}\mathscr{F} = \dim M.$$

Согласно результатам Костанта [4] односвязное однородное симплектическое многообразие из теоремы 1 симплектоморфно орбите присоединенного представления группы $\mathbf{G}$. Поэтому теорема 1 немедленно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Рассмотрим орбиту присоединенного представления компактной полупростой группы Ли* $\mathbf{G}$ *и риманову метрику* g *индуцированную формой Киллинга на алгебре Ли. Рассмотрим также на орбите стандартную симплектическую структуру* Ω *(форму Кириллова). Тогда магнитный геодезический поток, задаваемый формой* Ω, *интегрируем в некоммутативном смысле.*

Для комплексных проективных пространств коммутативная интегрируемость магнитного геодезического потока доказана в [5].

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения и Я. В. Базайкина за полезные обсуждения.

2. Форма Кириллова

Рассмотрим орбиту M компактной группы Ли $\mathbf{G}$ в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку центр группы $\mathbf{G}$ тривиально действует на $\mathfrak{g}$, его можно считать тривиальным. Тогда алгебра Ли окажется полупростой, а группа $\mathbf{G}$ будет ее присоединенной группой. Будем считать, что M — полная орбита группы $\mathbf{G}$ в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем точку $W \in M$. При этом орбита M отождествляется с фактор-пространством

$$M = \mathbf{G}/\mathbf{H},$$

где $\mathbf{H}$ — стабилизатор точки W.

Форма Киллинга задает $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$-инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$ $(\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1})$

$$B(X,Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) \quad \forall g \in \mathbf{G},\ X,Y \in \mathfrak{g}, \tag{1}$$

которое индуцирует $\mathbf{G}$-инвариантную риманову метрику на орбите M. Алгебра $\mathfrak{g}$ может быть представлена в виде прямой суммы

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы $\mathbf{H}$ относительно формы Киллинга B. Тогда

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}. \tag{2}$$

Пространство $\mathfrak{m}$ отождествляется с $T_{\pi(e)}M = T_W M$ при помощи $\pi_*|_e$, где $\pi : \mathbf{G} \to M$ — каноническая проекция. Точку W орбиты M можно рассматривать и как элемент алгебры $\mathfrak{g}$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}(W), \quad \mathfrak{m} = \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(W).$$

Индуцированная формой Киллинга $\mathbf{G}$-инвариантная риманова метрика на орбите M имеет вид

$$\langle gX, gY \rangle = B(X,Y), \quad X,Y \in \mathfrak{m},\ gX, gY \in T_{\pi(g)}M. \tag{3}$$

С помощью формы Киллинга (1) определим $\mathbf{G}$-инвариантную 2-форму Ω на M:

$$\Omega(gX, gY) = B(W,[X,Y]), \quad X,Y \in \mathfrak{m},\ gX, gY \in T_{\pi(g)}M. \tag{4}$$

Форма Ω представляет собой симплектическую структуру на M, которая есть в точности симплектическая структура Кириллова (см., например, [6]).

Пусть теперь $A_\varphi = \exp(X\varphi)$ — однопараметрическая подгруппа $\mathbf{G}$, $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, которая является однопараметрической группой преобразований M и сохраняет метрику (3) и форму (4). Соответствующее поле Киллинга будет иметь вид Xg.

Лемма 2.1. *Для любого поля Киллинга $K = Xg$ существует такая функция f, что*

$$df = \Omega(K, \cdot).$$

Доказательство. Для поля Киллинга $K = Xg$ рассмотрим функцию

$$f_X(g) = B(W, g^{-1}Xg). \tag{5}$$

Подсчитаем значение дифференциала этой функции в точке $\pi(g)$ на векторе $gY \in T_{\pi(g)}M$, $Y \in \mathfrak{m}$:

$$df_X|_g(gY) = -\frac{d}{dt}\bigg|_0 B(W, \exp(-Yt)g^{-1}Xg\exp(Yt))$$
$$= B(W, [g^{-1}Xg, Y]) = \Omega(Xg, gY).$$

В силу произвольности вектора gY это доказывает утверждение леммы. $\square$

3. Отображение момента

Форма $\widetilde{\omega} = \omega + \varepsilon\Omega$, где ω — стандартная симплектическая форма на кокасательном расслоении M, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, Ω — форма (4), задает структуру симплектического многообразия на T^*M. Параметр ε позволяет проследить за деформацией геодезического потока с добавлением магнитного поля. Группа $\mathbf{G}$ действует на T^*M симплектическими диффеоморфизмами, причем это действие гамильтоново. Это значит, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическая группа $\exp(Xt)$ индуцирует векторное поле на T^*M, которое будет гамильтоновым с некоторой функцией Гамильтона, вид которой будет дан позже. Форма $\widetilde{\omega}$ устанавливает соответствие между ковекторами и векторами $\omega^1 \mapsto \eta$ по правилу

$$\omega^1(\xi) = \widetilde{\omega}(\xi, \eta).$$

В частности, каждой функции $f \in C^\infty(T^*M)$ можно сопоставить векторное поле $\operatorname{sgrad} f$ («косой градиент»):

$$df(\xi) = \widetilde{\omega}(\xi, \operatorname{sgrad} f).$$

Структуру алгебры Ли на $C^\infty(T^*M)$ задает скобка Пуассона

$$\{f, g\} = \widetilde{\omega}(\operatorname{sgrad} g, \operatorname{sgrad} f). \tag{6}$$

Используя риманову метрику, можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому все выкладки будем проводить в касательном расслоении.

Пространство T_XTM, $X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M$, можно отождествить с (см. [7])

$$\left\{ \left(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w \right), v, w \in \mathfrak{m} \right\} \subset T_X(T\mathbf{G}) = T_X(\mathbf{G} \times \mathfrak{g}).$$

Симплектическая структура на пространстве T_XTM определяется с помощью формы (1):

$$\widetilde{\omega}_X\left(\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1 \right), \left(v_2, -\frac{1}{2}[v_2, X] + w_2 \right) \right)$$
$$= B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

Используя симплектическое действие группы $\mathbf{G}$ на TM, можно получить выражение для симплектической структуры в произвольной точке $gX \in TM$, $X \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$. Справедлива (см. [7])

Лемма 3.1. *Симплектическая структура на TM в точке gX имеет вид*

$$\widetilde{\omega}_{gX}\left(g_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right), g_{*|X}\left(v_2, -\frac{1}{2}[v_2, X] + w_2\right)\right)$$
$$= B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2). \qquad \square$$

$\mathbf{G}$-инвариантные функции f на TM находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантными функциями $\theta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, соответствие устанавливается по правилу (см., например, [7])

$$f(gX) = \theta(X), \quad X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M,\ gX \in T_{\pi(g)}M. \tag{7}$$

Градиент $\nabla\theta(X)$ произвольной функции $\theta \in C^\infty(\mathfrak{g})$ в точке $X \in \mathfrak{g}$ определяется с помощью формы Киллинга следующим образом:

$$d\theta(X)(Y) = B(\nabla\theta(X), Y), \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

С помощью градиента можно выписать одно полезное свойство $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций:

$$[\nabla\theta(X), X]_{\mathfrak{h}} = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{m}. \tag{8}$$

Здесь $\xi_{\mathfrak{m}}$ обозначает ортогональную проекцию $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ параллельно подалгебре $\mathfrak{h}$, а $\xi_{\mathfrak{h}} = \xi - \xi_{\mathfrak{m}}$.

В случае магнитного геодезического потока нам удобнее будет рассматривать немного модифицированное соответствие (7), а именно

$$f(gX) = \theta(X - \varepsilon W), \quad X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M,\ gX \in T_{\pi(g)}M. \tag{9}$$

Это корректное определение, так как θ — $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантная функция, а $hWh^{-1} = W\ \forall h \in \mathbf{H}$. При этом свойство (8) можно записать в виде

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W), X - \varepsilon W]_{\mathfrak{h}} = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{m} \tag{10}$$

или

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W), X]_{\mathfrak{h}} = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{m}, \tag{11}$$

или

$$[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{h}} = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{m}. \tag{12}$$

Их эквивалентность следует из (2) и того, что $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}\ \mathrm{ad}(W)$.

Предложение 1. *Пусть $f : TM \to \mathbb{R}$ — произвольная $\mathbf{G}$-инвариантная функция, определенная $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантной функцией $\theta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ по правилу (9). Гамильтоново векторное поле функции f дается формулой*

$$\operatorname{sgrad} f(gX) = g_{*|X}\left(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w\right),$$

где $v = \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}$ и $w = -\frac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]$.

Доказательство. Согласно предложению 3.4 из [2] для любых $v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
&df_{gX}\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right)\right)\\
&\quad = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \left(\theta\left(X - \varepsilon W + tw_1 - \frac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2)\right)\right)\\
&\quad = B\big(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1 - \frac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}\big)\\
&\quad = B\left(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1) - \frac{1}{2}B(\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, [v_1, X]\right)\\
&\quad = B(\nabla\theta(X - \varepsilon W), w_1) - B\left(-\frac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X], v_1\right)\\
&\quad = \widetilde{\omega}_{gX}\left(g_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right), \operatorname{sgrad} f(gX)\right)\\
&\quad = B(w_1, v) - B(w, v_1) + \varepsilon B(W, [v_1, v]) = B(v, w_1) - B(w + \varepsilon[W, v], v_1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v = \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}} \quad w = -\frac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]. \qquad \square$$

Следствие 1. *Если $f_1, f_2 : TM \to \mathbb{R}$ — две $\mathbf{G}$-инвариантные функции, соответствующие $\theta_1, \theta_2 : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, то их скобка Пуассона имеет вид*

$$\{f_1, f_2\}(gX) = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)]).$$

Доказательство. Если в доказательстве предыдущего предложения вместо w_1 и v_1 подставить соответствующие выражения для $\operatorname{sgrad} f_2(gX)$, то получаем

$$\begin{aligned}
&df_1|_{gX}(\operatorname{sgrad} f_2(gX)) = \{f_1, f_2\}(gX) = \widetilde{\omega}_{gX}(\operatorname{sgrad} f_2(gX), \operatorname{sgrad} f_1(gX))\\
&\quad = B\left(\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), -\frac{1}{2}[\nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}B([\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X], \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}})\\
&\quad = -B(X, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}])\\
&\qquad + \varepsilon B(W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}])\\
&\quad = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}])\\
&\quad = -B(X - \varepsilon W, [\nabla\theta_1(X - \varepsilon W), \nabla\theta_2(X - \varepsilon W)]).
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались свойством (10) $\operatorname{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантности функций θ_1, θ_2, соотношениями (2) и тем, что $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker}\ \operatorname{ad}(W)$. $\square$

Функция Гамильтона геодезического потока имеет вид

$$H(gX) = h(X) = \frac{1}{2}B(X, X), \quad X \in \mathfrak{m},$$

и отличается на константу от функции

$$\widetilde{H}(gX) = h(X - \varepsilon W) = \frac{1}{2}B(X - \varepsilon W, X - \varepsilon W) = H(gX) + \frac{\varepsilon^2}{2}B(W, W), \tag{13}$$

а их гамильтоновы векторные поля совпадают:

$$\operatorname{sgrad} \widetilde{H}(gX) = \operatorname{sgrad} H(gX) = g_{*|X}(X, -\varepsilon[W, X]_{\mathfrak{m}}).$$

Таким образом, $\widetilde{H}$ можно рассматривать в качестве гамильтониана геодезического потока. Из следствия 1 сразу следует, что $\widetilde{H}$ коммутирует с любой $\mathbf{G}$-инвариантной функцией, т. е. они являются интегралами геодезического потока.

Если рассматривать стандартную скобку Пуассона (т. е. при $\varepsilon = 0$), то по теореме Нётер компонента импульса вдоль поля Киллинга $K = Yg$, соответствующего однопараметрической группе $A_\varphi = \exp(Y\varphi)$, будет линейным первым интегралом любого потока с $\mathbf{G}$-инвариантным гамильтонианом. Если перейти к касательному расслоению, то интеграл будет иметь вид

$$\widetilde{I}_Y(gX) = B(X, g^{-1}Yg).$$

Однако после деформации скобки Пуассона функция $\widetilde{I}_Y$ перестает быть интегралом и ее нужно немного изменить, чтобы она сохранялась потоком.

Предложение 2. *Линейным интегралом потока с $\mathbf{G}$-инвариантной функцией Гамильтона, который соответствует полю Киллинга $K = Yg$, будет функция*

$$I_Y = \widetilde{I}_Y - \varepsilon f_Y,$$

где функция f_Y определена в (5).

Доказательство. Подсчитаем дифференциал функции в произвольной точке gX, $g \in \mathbf{G}$, $X \in \mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned} d(I_Y)_{gX}&\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \left(B\left(X + tw_1 - \frac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2), e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \varepsilon B(W, e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1})\right) \\ &= B\left(g^{-1}Yg, w_1 - \frac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}\right) + B(X, [g^{-1}Yg, v_1]) - \varepsilon B(W, [g^{-1}Yg, v_1]) \end{aligned}$$

(подставляем гамильтоново поле $\mathbf{G}$-инвариантной функции Гамильтона, т. е. $v_1 = \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}$ и $w_1 = -\frac{1}{2}[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]$)

$$\begin{aligned} &= B(g^{-1}Yg, -[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \\ &\qquad + B(X, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) - \varepsilon B(W, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \end{aligned}$$

(слагаемые с ε сокращаются, а так как θ $\operatorname{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантна и, следовательно, справедливо (12), можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ скобки Ли)

$$\begin{aligned} &= B(g^{-1}Yg, -[\nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}, X]) \\ &\qquad + B(X, [g^{-1}Yg, \nabla\theta(X - \varepsilon W)_{\mathfrak{m}}]) \equiv 0. \quad \square \end{aligned}$$

Отображение момента $P : TM \to \mathfrak{g}$ определяется следующим образом:

$$B(P(\varkappa), X) := I_X(\varkappa), \quad \varkappa \in TM, \ X \in \mathfrak{g},$$

где I_X дано в предложении 2.

Лемма 3.2. *Отображение момента $P : TM \to \mathfrak{g}$ имеет вид*
$$P(gY) = \mathrm{Ad}(g)(Y - \varepsilon W),$$
где $gY \in T_{\pi(g)}M$, $Y \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$.

Доказательство. Для произвольного $X \in \mathfrak{g}$ имеем
$$\begin{aligned} B(P(gY), X) &= \widetilde{I}_X(gY) - \varepsilon f_X(g) = B(Y, g^{-1}Xg) - \varepsilon B(W, g^{-1}Xg) \\ &= B(gYg^{-1}, X) - \varepsilon B(gWg^{-1}, X) = B(g(Y - \varepsilon W)g^{-1}, X). \quad \square \end{aligned}$$

Отображение момента постоянно на траекториях любого потока задаваемого $\mathbf{G}$-инвариантным гамильтонианом, так как функции I_X являются его интегралами. Поэтому каждая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ генерирует первый интеграл такого потока I_h:
$$I_h := h \circ P \in C^\infty(TM).$$
В частности, если $X \in \mathfrak{g}$ рассмотреть как функцию на $\mathfrak{g}$ (значение на элементе Y равно $B(X, Y)$), то это определение I_X совпадает с предыдущим. Таким образом, имеется отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(TM)$, $h \mapsto I_h$.

Для $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g})$ их скобка Ли — Пуассона, которую мы будем обозначать через $\{\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g}$, имеет вид
$$\{h_1, h_2\}_\mathfrak{g}(X) = B(X, [\nabla h_1(X), \nabla h_2(X)]). \tag{14}$$

Предложение 3. *Отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(TM)$, $h \mapsto I_h = h \circ P$, задает гомоморфизм алгебр, т. е.*
$$I_{\{h_1,h_2\}_\mathfrak{g}} = \{I_{h_1}, I_{h_2}\} \quad \textit{для всех } h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}).$$

Докажем следующую вспомогательную лемму (см. [2, предложение 3.6]).

Лемма 3.3. *Гамильтоново векторное поле функции $I_h = h \circ P$ имеет вид*
$$\mathrm{sgrad}\, I_h(gX) = g_{*|X}\left(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w\right),$$
где
$$v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_\mathfrak{m}, \quad w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_\mathfrak{m} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_\mathfrak{m}, X]_\mathfrak{m},$$
$$\zeta = \nabla h(\mathrm{Ad}(g)(X - \varepsilon W)).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предложения 1 выписывается дифференциал: для $v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$
$$\begin{aligned} &d(I_h)_{gX}\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\big(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\big)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \left(h \circ \mathrm{Ad}\left(ge^{tv_1})(X - \varepsilon W + tw_1 - \frac{1}{2}t[v_1, X]_\mathfrak{m} + O(t^2)\right)\right) \\ &= B\big(\zeta, \mathrm{Ad}(g)\big([v_1, X - \varepsilon W] + w_1 - \frac{1}{2}[v_1, X]_\mathfrak{m}\big)\big) \\ &= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + B\left(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X - \varepsilon W] - \frac{1}{2}[v_1, X]_\mathfrak{m}\right) \\ &= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + +B(v_1, [X - \varepsilon W, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta]) - \frac{1}{2}B((\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_\mathfrak{m}, [v_1, X]) \\ &= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) - B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X - \varepsilon W], v_1) - B\big(-\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_\mathfrak{m}, X], v_1\big) \\ &= B(v, w_1) - B(w + \varepsilon[W, v], v_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, \quad w + \varepsilon[W, v] = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X - \varepsilon W]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}},$$

$$w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}.$$

Так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и W коммутирует с любым вектором из $\mathfrak{h}$, то слагаемые с ε сокращаются и остается окончательное выражение для w. $\square$

Доказательство предложения 3. Возьмем поля $\mathrm{sgrad}\, I_{h_1}$, $\mathrm{sgrad}\, I_{h_2}$ и подставим в (6), где выражение для $\widetilde{\omega}$ дано в лемме 3.1:

$$\begin{aligned}
\{I_{h_1}, I_{h_2}\}(gX) &= \widetilde{\omega}_{gX}(\mathrm{sgrad}\, I_{h_2}, \mathrm{sgrad}\, I_{h_1}) \\
&= B\Big([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad - B\Big([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad + \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}$$

(можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ коммутаторов, ибо $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = 0$)

$$\begin{aligned}
&= B\Big([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X] - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad - B\Big([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X] - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad + \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}$$

(разложим $\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{h}}$ и получим)

$$\begin{aligned}
&= B\Big(\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad + B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) \\
&\quad - B\Big(\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\Big) \\
&\quad - B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) \\
&\quad - \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}$$

(добавим $B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) \equiv 0$, которое ничего не меняет, и заметим, что первое и третье слагаемые совпадают)

$$\begin{aligned}
&= B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}} \\
&\quad + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) - \varepsilon B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], W)
\end{aligned}$$

(если аналогичную процедуру проделать со вторым слагаемым, то получим)

$$\begin{aligned}
&= B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], X) - \varepsilon B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], W) \\
&= B([\zeta_1, \zeta_2], \mathrm{Ad}(g)(X - \varepsilon W)) = I_{\{h_1, h_2\}_{\mathfrak{g}}}(gX).
\end{aligned}$$

Это в точности выражение (14) для h_1 и h_2. $\square$

4. Доказательство теоремы 2

Мы воспользуемся схемой, предложенной в [8].

Рассмотрим два семейства функций: $\mathscr{F}_1$ — множество функций вида $I_h = h\circ P$, $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$, $P : TM \to \mathfrak{g}$ — отображение момента; $\mathscr{F}_2$ — множество $\mathbf{G}$-инвариантных функций $f_\theta(gX) = \theta(X - \varepsilon W)$ на TM, где θ — $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантная функция на $\mathfrak{g}$. Функции из $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ являются первыми интегралами магнитного геодезического потока, задаваемого гамильтонианом (13).

Для функций из $\mathscr{F}_1$ в силу предложения 3 справедливо соотношение

$$\{I_{h_1}, I_{h_2}\} = I_{\{h_1,h_2\}_\mathfrak{g}},$$

а для функций из $\mathscr{F}_2$ (следствие 1) — соотношение

$$\{f_{\theta_1}, f_{\theta_2}\}(gX) = -\{\theta_1, \theta_2\}_\mathfrak{g}(X - \varepsilon W). \tag{15}$$

Как уже отмечалось, по теореме Нётер функции I_h являются первыми интегралами любого потока с гамильтонианом из $\mathscr{F}_2$, поэтому

$$\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2\} = 0. \tag{16}$$

Из этих трех соотношений вытекает замкнутость $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ относительно скобки Пуассона. Остается показать выполнение условий некоммутативной интегрируемости:

$$\mathrm{ddim}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) + \mathrm{dind}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \dim TM. \tag{17}$$

Подпространства, порожденные дифференциалами функций из множеств $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, имеют вид

$$F_1 = \{dI_h(X),\ I_h \in \mathscr{F}_1\}, \quad F_2 = \{df_\theta(X),\ f_\theta \in \mathscr{F}_2\}.$$

Пусть аннуляторы элемента X обозначаются символами

$$\mathrm{Ann}_\mathfrak{g}(X) = \{Y \in \mathfrak{g}, [Y, X] = 0\}, \quad \mathrm{Ann}_\mathfrak{h}(X) = \{V \in \mathfrak{h}, [V, X] = 0\} = \mathrm{Ann}_\mathfrak{g}(X) \cap \mathfrak{h}.$$

Лемма 4.1. *Для $X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}M$ такого, что $X - \varepsilon W$ находится в общем положении, имеют место следующие соотношения:*

$$\mathrm{ddim}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \dim(F_1 + F_2) = 2\dim\mathfrak{m} - \dim(\mathrm{Ann}_\mathfrak{g}(X - \varepsilon W))_\mathfrak{m},$$

$$\mathrm{ddim}(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(\mathrm{Ann}_\mathfrak{g}(X - \varepsilon W))_\mathfrak{m}.$$

Доказательство. Так как симплектическая структура устанавливает изоморфизм $I : T^*_X TM \to T_X TM$, $df(X) \mapsto \mathrm{sgrad}\, f(X)$, можно вместо F_1 и F_2 рассматривать

$$IF_1 = \{\mathrm{sgrad}\, I_h(X), I_h \in \mathscr{F}_1\}, \quad IF_2 = \{\mathrm{sgrad}\, f_\theta(X), f_\theta \in \mathscr{F}_2\}.$$

Напомним, что явный вид гамильтоновых векторных полей функций I_h и f_θ в точке $X \in \mathfrak{m}$ имеет вид (предложение 1, лемма 3.3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgrad}\, I_h(X) &= \left(\nabla h(\xi)_\mathfrak{m}, -\frac{1}{2}[\nabla h(\xi)_\mathfrak{m}, X] + [\nabla h(\xi), X]_\mathfrak{m} - \frac{1}{2}[\nabla h(\xi)_\mathfrak{m}, X]_\mathfrak{m}\right),\\
\mathrm{sgrad}\, f_\theta(X) &= \left(\nabla \theta(\xi)_\mathfrak{m}, -\frac{1}{2}[\nabla \theta(\xi)_\mathfrak{m}, X] - \frac{1}{2}[\nabla \theta(\xi)_\mathfrak{m}, X]_\mathfrak{m} - \varepsilon[W, \nabla\theta(\xi)_\mathfrak{m}]\right),
\end{aligned} \tag{18}$$

где $\xi = X - \varepsilon W$. Множество $\mathfrak{m} - \varepsilon W = \{\xi = X - \varepsilon W : X \in \mathfrak{m}\}$ инвариантно относительно присоединенного действия группы $\mathbf{H}$:

$$\mathrm{Ad}(\mathbf{H})(\mathfrak{m} - \varepsilon W) \subset (\mathfrak{m} - \varepsilon W),$$

так как $\mathfrak{m}$ ортогонально $\mathfrak{h}$ и $\mathbf{H}$ стабилизирует W. $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантные функции θ из $\mathscr{F}_2$ являются инвариантами этого действия. Известно, что при линейном действии компактной алгебры Ли всегда существует набор инвариантов, разделяющий орбиты общего положения. Таким образом, число функционально независимых $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций равно коразмерности орбиты группы $\mathbf{H}$ при действии на $\mathfrak{m} - \varepsilon W$,

$$l = \dim \mathfrak{m} - (\dim \mathfrak{h} - \dim \mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi))$$

для элемента общего положения $\xi \in (\mathfrak{m} - \varepsilon W)$. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_l$ — функционально независимые $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантные функции на $\mathfrak{m} - \varepsilon W$. Рассмотрим орбиту представления $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$, проходящую через ξ, тогда ее размерность равна

$$s = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi).$$

Пусть функции $h_1, \dots, h_s : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ функционально независимы на орбите в точке ξ, т. е. $\{[\nabla h_i(\xi), \xi]\}$ образуют базис касательного пространства орбиты и, значит, в частности, $\nabla h_i(\xi) \notin \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)$. Тогда в качестве независимых функций на TM в точке X можно взять следующие функции:

$$I_{h_1}, \dots, I_{h_s}, f_{\theta_1}, \dots, f_{\theta_l}. \tag{19}$$

Для X такого, что ξ в общем положении, функции $f_{\theta_1}, \dots, f_{\theta_l}$ функционально независимы в точке X.

Предположим, что

$$\sum_i a_i \,\mathrm{sgrad}\, I_{h_i}(X) + \sum_j b_j \,\mathrm{sgrad}\, f_{\theta_j}(X) = 0.$$

Тогда с учетом (18) получаем

$$\sum_i a_i \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}} + \sum_j b_j \nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}} = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \left\{ -\frac{1}{2}[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] + [\nabla h_i(\xi), X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} \right\} \\ + \sum_j b_j \left\{ -\frac{1}{2}[\nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}, X] - \frac{1}{2}[\nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[W, \nabla \theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}] \right\} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\sum a_i \{[\nabla h_i(\xi), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon[W, \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}]\} = 0. \tag{22}$$

Так как $[W, \mathfrak{h}] = 0$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, имеем

$$[W, \nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}}] = [W, \nabla h_i(\xi)]_{\mathfrak{m}}.$$

Поэтому (22) принимает вид (с учетом того, что $\xi = X - \varepsilon W$)

$$\sum a_i [\nabla h_i(\xi), \xi]_{\mathfrak{m}} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum a_i[\nabla h_i(\xi),\xi] = \sum a_i[\nabla h_i(\xi),\xi]_{\mathfrak{h}} \sum a_i[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{m}},\xi]_{\mathfrak{h}} + \sum a_i[\nabla h_i(\xi)_{\mathfrak{h}},\xi]_{\mathfrak{h}}. \quad (23)$$

Из (20) и того, что для $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантных функций θ_j выполняется $[\nabla\theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}},\xi]_{\mathfrak{h}} = 0$ (см. (10)), получается, что первая сумма в (23) равна нулю. Вторая сумма равна нулю, так как $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{h}$ — аннулятор W. Тем самым $\sum a_i[\nabla h_i(\xi),\xi] = 0$, что возможно, только когда $a_i = 0$ $\forall i$, ибо h_i независимы на орбите в точке ξ. Тогда в силу независимости функций f_{θ_j} следует, что $b_j = 0$ $\forall j$. Таким образом, функции (19) независимы в X.

Пусть теперь h — произвольная функция такая, что ее градиент в ξ принадлежит аннулятору ξ:

$$[\nabla h(\xi),\xi] = [\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}},\xi] + [\nabla h(\xi)_{\mathfrak{h}},\xi] = 0. \quad (24)$$

Из (24), $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и того, что $\mathfrak{h}$ — аннулятор W, вытекает

$$[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}},\xi]_{\mathfrak{h}} = 0,$$

а значит, для элемента общего положения ξ получим

$$\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}} = \sum_j c_j \nabla\theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}} \quad (25)$$

для каких-то определенных $c_j \in \mathbb{R}$. Так как $\nabla h(\xi) \in \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)$, имеем

$$0 = [\nabla h(\xi),\xi]_{\mathfrak{m}} = [\nabla h(\xi),X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[\nabla h(\xi),W]_{\mathfrak{m}} = [\nabla h(\xi),X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon[\nabla h(\xi)_{\mathfrak{m}},W],$$

т. е. с учетом (25)

$$[\nabla h(\xi),X]_{\mathfrak{m}} = -\sum_j c_j\varepsilon[W,\nabla\theta_j(\xi)_{\mathfrak{m}}]. \quad (26)$$

Из (18), (25), (26) следует равенство

$$\operatorname{sgrad} I_h(X) = \sum_j c_j \operatorname{sgrad} f_{\theta_j}(X),$$

т. е. градиент $\operatorname{sgrad} I_h(X)$ линейно выражается через градиенты $\operatorname{sgrad} f_{\theta_j}(X)$. Заодно получили, что $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}$. Первое утверждение леммы вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}\dim(F_1+F_2) = s+l &= \dim\mathfrak{m} - \dim\mathfrak{h} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi) + \dim\mathfrak{g} - \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)\\ &= 2\dim\mathfrak{m} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi) - \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) = 2\dim\mathfrak{m} - \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}},\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}\dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi) &= \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}} + \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi)\cap\mathfrak{h})\\ &= \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}} + \dim\mathrm{Ann}_{\mathfrak{h}}(\xi). \qquad \square\end{aligned}$$

Подсчитаем дифференциальный индекс $\mathrm{dind}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)$, т. е. размерность ядра ограничения пуассоновой структуры на линейном подпространстве F_1+F_2. Для этого представим пространство F_1+F_2 в виде

$$F_1+F_2 = A \oplus B \oplus C,$$

где $B = F_1 \cap F_2$, $F_1 = A \oplus B$, $F_2 = B \oplus C$. Из (16) следует, что матрица пуассоновой структуры на TM, ограниченная на $F_1 + F_2$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \{\cdot,\cdot\}|_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\cdot,\cdot\}|_C \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Отметим, что (как и в [8]) матрица $(\{\cdot,\cdot\}|_A)$ невырожденна, поскольку она фактически является матрицей ограничения скобки Ли — Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ на касательное пространство в точке ξ к орбите присоединенного представления $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$, проходящей через ξ. Тогда коранг матрицы (27) равен корангу матрицы $(\{\cdot,\cdot\}|_{F_2})$, которая в силу (15) является матрицей ограничения скобки Ли — Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ на линейное подпространство

$$J = J|_\xi = \{\nabla\theta(\xi)_{\mathfrak{m}},\ \theta - \ \mathrm{Ad}(\mathbf{H})\text{-инвариантная функция}\}.$$

Лемма 4.2. *Для элемента общего положения $\xi \in \mathfrak{m} - \varepsilon W$*

$$\mathrm{Ker}\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}|_J = (\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}.$$

Доказательство этой леммы можно перенести из [8] на наш случай фактически без изменений.

Таким образом,

$$\mathrm{dind}(\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2) = \mathrm{dind}\,\mathscr{F}_1 = \mathrm{dind}\,\mathscr{F}_2 = \mathrm{ddim}(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2) = \dim(\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(\xi))_{\mathfrak{m}}. \tag{28}$$

Условие некоммутативной интегрируемости (17) следует из леммы 4.1 и (28). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 3–49.
2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 2. С. 46–56.
3. *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва. 1972. Т. 26, № 1. С. 181–198.
4. *Костант Б.* Квантование и унитарные представления // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 1. С. 163–225.
5. *Ефимов Д. И.* Магнитный геодезический поток в однородном поле на комплексном проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 566–576.
6. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972.
7. *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 495–517.
8. *Болсинов А. В., Йованович Б.* Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 7. С. 21–40.

Статья поступила 20 августа 2004 г.

Ефимов Дмитрий Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dmtefimov@yandex.ru