Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.95

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Н. В. Хуснутдинова

Аннотация: Для решений системы вырождающихся квазилинейных параболических уравнений доказаны внутренние шаудеровские оценки, с использованием которых установлена теорема существования решения задачи о продолжении теплового пограничного слоя сжимаемой жидкости в магнитном поле.

Ключевые слова: пограничный слой, равномерные оценки, предельный переход, разрешимость.

Для описания процесса фильтрации в тонком протяженном вдоль одного направления пористом пласте в условиях различия температуры жидкости и пласта использовалась модель магнитной гидродинамики типа теплового пограничного слоя. В переменных Мизеса эта модель приводится к системе двух сильно связанных квазилинейных уравнений, вырождающихся при нулевом значении одной из искомых компонент решения.

Основным результатом работы является доказательство *внутренних шаудеровских оценок* решений этой системы уравнений в гёльдеровских классах функций, с использованием которых установлена теорема существования решений задачи о продолжении теплового пограничного слоя сжимаемой жидкости в пористой среде или в магнитном поле.

1. Математическая модель

Рассмотрим задачу о продолжении стационарного теплового пограничного слоя сжимаемой жидкости с учетом внешних сил [1, с. 484, 635; 2, с. 231]:

$$\begin{cases} \rho(uu_x + vu_y) = (\mu u_y)_y - p_x - \gamma u, \quad (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \\ \rho(u\theta_x + v\theta_y) = (\lambda\theta_y)_y + up_x + \mu u_y^2 + \gamma u^2, \quad \rho = \rho(p,\theta),\ (x,y) \in D, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u_0(y), \quad u|_{y=0} = (v - v_0(x)) = 0, \quad \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = U(x), \\ \theta|_{x=0} = \theta_0(y), \quad \theta|_{y=0} = \theta_1(x), \quad \lim\limits_{y\to\infty} \theta(x,y) = \theta_\infty(x). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, $\vec{u} = (u,v)$ — вектор скорости потока, $\theta = \int\limits_{T_0}^{T} c_p(t)\,dt$ — энтальпия, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $p = p(x)$, T — температура, $\rho = \rho(p,\theta) \ge r_0 > 0$ — плотность, $\mu = \mu(\theta)$ — вязкость, $\lambda = \lambda(\theta)$ — коэффициент теплопроводности, в случае магнитной гидродинамики $\gamma = \gamma(x) = \mu_0^2\sigma_0 H^2 \ge 0$, μ_0 — магнитная проницаемость, H —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00131).

© 2005 Хуснутдинова Н. В.

заданная вертикальная компонента напряженности магнитного поля, $U(x)$ — скорость внешнего потока.

Применительно к задачам фильтрации согласно гипотезе Н. Е. Жуковского [3, с. 46] компонента внешней силы $F = \gamma u$ в (1) представляется в виде $\gamma = \mu(x)m(x)/k(x)$, где $m(x)$ — пористость пласта и $k(x)$ — проницаемость пористой среды.

Предполагается, что коэффициент сопротивления γ в силе Жуковского слабо меняется по толщине пограничного слоя, и полагается $\gamma = \gamma_\infty(x)$.

На внешней границе пограничного слоя ($y \to \infty$) выполняются соотношения

$$\rho_\infty UU' + p' + \gamma U(x) = 0, \quad \rho_\infty \theta'_\infty - p' - \gamma U(x) = 0, \quad \rho_\infty = \rho(p, \theta_\infty).$$

Математическим проблемам динамического пограничного слоя проводящей вязкой жидкости ($\theta = \mathrm{const}, \rho = \mathrm{const}$) посвящен ряд работ, ссылки на которые можно найти в [4].

Разрешимость начально-краевых задач для уравнений (1), (2) несжимаемой жидкости ($\rho = \mathrm{const}$) впервые установлена в работе автора [5], где при $p_x \leq 0$ доказана продолжимость решений на любой промежуток обтекаемой стенки. Обобщение этих результатов на случай сжимаемой жидкости проведено в [6].

При этом при дополнительных условиях на начальные функции и в предположении $\gamma = 0$ доказаны равномерные оценки модуля производных (u_y, θ_y), справедливые и для $\gamma \geq 0$.

В данной работе начальные профили считаются произвольными.

Предполагая, что $u(x, y) > 0$, $U = u_0(\infty) > 0$ — заданная постоянная, выполним замену переменных Мизеса $(x, y) \to (x, \psi)$ ($\psi = \psi(x, y)$ — функция тока):

$$\rho u = \psi_y, \quad \rho v - \rho_0 v_0 = -\psi_x, \quad \psi(x, 0) = 0, \quad \rho_0 v_0 = (\rho v)_{\psi=0}.$$

Отметим, что для $U = \mathrm{const}$ условия при $y \to \infty$ принимают вид

$$\theta_\infty = \theta_0(\infty) > 0, \quad p_x = -\gamma U < 0. \tag{3}$$

Краевая задача (1)–(3) при числе Прандтля, равном единице ($\mathrm{Pr} = 1$, т. е. $\mu(\theta) = \lambda(\theta)$), относительно вектор-функции

$$\vec{h} = (\omega, h), \quad \omega = u^2, \quad h = \theta + \frac{1}{2}\omega$$

с учетом (3) преобразуется в следующую:

$$\vec{l}(\vec{h}) \equiv \sigma\sqrt{\omega}\vec{h}_{\psi\psi} + a\vec{h}_\psi + \vec{f} = \vec{h}_x, \quad (x, \psi) \in R, \tag{4}$$

$$\vec{h}|_{x=0} = \vec{h}_0(\psi), \quad \vec{h}|_{\psi=0} = \vec{h}_1(x), \quad \lim_{\psi\to\infty} \vec{h}(x, \psi) = \vec{h}_\infty. \tag{5}$$

Здесь $R = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$, $\sigma = \sigma(p, \theta) = \mu\rho = \lambda\rho$,

$$a\vec{h}_\psi = (a_1\omega_\psi, a_2 h_\psi), a_1 = \sqrt{\omega}\sigma_\theta\left(h_\psi - \frac{1}{2}\omega_\psi\right) - \rho_0 v_0,$$

$$a_2 = \frac{\sigma\omega_\psi}{2\sqrt{\omega}} + \sqrt{\omega}\sigma_\theta\left(h_\psi - \frac{1}{2}\omega_\psi\right) - \rho_0 v_0,\ \vec{f} = (f, 0),\ f = \frac{2\gamma}{\rho}(U - \sqrt{\omega}),\ \vec{l} = (l_1, l_2).$$

В начально-краевых условиях (5)

$$\vec{h}_0(\psi) = (\omega_0(\psi), h_0(\psi)) \equiv \vec{h_0}[y(\psi)],$$

где зависимость $y = y(\psi)$ определяется из соотношения

$$\psi = \psi(0, y) = \int\limits_0^y \rho[(p(0), \theta^0(t))]u_0(t)\,dt,$$

$$\vec{h}_1(x) = (0, h_1(x)), \quad \vec{h}_\infty(x) = (U^2, h_\infty), \quad h_\infty = \theta_\infty + \frac{1}{2}U^2.$$

Предположения. (А) *Физические характеристики течения* $\sigma(p,\theta)$, $\rho(p,\theta)$, $p(x)$, $\gamma(x)$ *положительны и ограничены при* $0 < (p,\theta) < \infty$, $x \geq 0$ *и подчиняются естественным требованиям* [1, с. 635]*:*

$$\sigma_\theta(p,\theta) \leq 0, \quad \rho_\theta(p,\theta) \leq 0, \quad \rho_0(x)v_0(x) \leq 0.$$

Кроме того, выполняются стандартные условия гладкости и согласования:

(Б) $\{\sigma_{\theta\theta}(p,\theta), \rho_{\theta\theta}(p,\theta)\} \in C^{1+\alpha}(R)$, $\vec{h_0}(\psi) \in C^{2+\alpha}[0,\infty)$, $h_1(x) \in C^{1+\alpha}[0,X]$, $\{\rho_0(x), v_0(x), \gamma(x)\} \in C^\alpha[0,X]$;

(В) $\omega_0(\psi) > 0$, $h_0(\psi) - \frac{1}{2}\omega_0(\psi) > 0$, $\omega_0'(\psi) \geq 0$, $h_0'(\psi) = \theta_0'(\psi) + \frac{1}{2}\omega_0'(\psi) \leq 0$ *при* $\psi > 0$; $\omega_0(0) = 0$, $h_0(0) = h_1(0) > 0$ (*условия согласования*); $\omega_0'(0) > 0$, $h_0'(0) < 0$, $h_1'(x) = \theta_1'(x) \geq 0$ *при* $x \geq 0$; $h_\infty - \frac{1}{2}U^2 = \theta_\infty > 0$, $\lim\limits_{\psi\to\infty} \omega_0(\psi) = U^2$, $\lim\limits_{\psi\to\infty} h_0(\psi) = h_\infty = \theta_\infty + \frac{1}{2}U^2 = \mathrm{const} > 0$.

2. Регуляризация задачи (4), (5)

Определим функцию $\overline{\varphi}(\varphi)$, $\varphi \in [0,\infty)$, так, чтобы $\overline{\varphi}(\varphi) \equiv \varphi$ при $\varphi \in [m, M]$, а при $\varphi \notin [m, M]$ выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2}m \leq \overline{\varphi}(\varphi) \leq 2M,$$

при этом $\overline{\varphi}(\varphi) \in C^5(-\infty,\infty)$. Рассмотрим регуляризованное дифференциальное уравнение (4):

$$\vec{l}(\vec{h}) \equiv \sqrt{\overline{\omega}}\bar{\sigma}\vec{h}_{\psi\psi} + a^*\vec{h}_\psi + \vec{f^*} = \vec{h}_x. \tag{6}$$

Здесь

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}(\omega), \quad \bar{\sigma} = \sigma(p,\bar{\theta}), \quad \bar{\rho} = \rho(p,\bar{\theta}), \quad a^*\vec{h}_\psi = \big(a_1^*\omega_\psi, a_2^*h_\psi\big),$$

$$a_1^* = \sqrt{\overline{\omega}}\bar{\sigma}_\theta\left(h_\psi - \frac{1}{2}\omega_\psi\right) - \rho_0 v_0, \quad \vec{f^*} = (f^*, 0),$$

$$a_2^* = \frac{\bar{\sigma}\omega_\psi}{2\sqrt{\overline{\omega}}} + \sqrt{\overline{\omega}}\bar{\sigma}_\theta\left(h_\psi - \frac{1}{2}\omega_\psi\right) - \rho_0 v_0, \quad f^* = \left(\frac{2\gamma}{\bar{\rho}}\right)\frac{U^2 - \omega}{U + \sqrt{\overline{\omega}}}.$$

Произведем теперь регуляризацию начально-краевых условий (5) на границе конечной области $R_n = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < n\}$ так, чтобы в точках $(0,0)$ и $(0,n)$ выполнялись условия согласования до первого порядка включительно.

Подставим в уравнение (6) вектор-функцию $\vec{h}^0(\psi) = [\omega^0(\psi), h^0(\psi)]$, положим в его коэффициентах $x = 0$.

Для полученной таким образом системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $[\omega^0(\psi), h^0(\psi)]$, $\psi \in [0, \frac{1}{n}]$, рассмотрим краевую задачу

$$\vec{l^0}(\psi) \equiv \vec{l}(\vec{h}^0) = 0; \quad \vec{h}^0(0) = \vec{h}_0(1/n); \quad \vec{h}^0(1/n) = \vec{h}_0(2/n), \tag{7}$$

где $\vec{h_0}(\psi)$ определено в (5).

Покажем, что решения $\omega^0(\psi)$, $h^0(\psi)$ задачи (7) сохраняют знакоопределенность и монотонность начальных функций $\omega_0\big(\psi+\frac{1}{n}\big)$, $h_0\big(\psi+\frac{1}{n}\big)$. Для этого подставим в коэффициенты системы уравнений (7) произвольный вектор $\vec{h}^0_*(\psi) \in C^{1+\alpha}(0,1/n)$ и запишем ее в виде

$$l_1(\varphi) \equiv \varphi_{\xi\xi} - \gamma_1\varphi = 0,\ \varphi = \omega^0(\psi) - U^2; \quad l_2(h) \equiv h_{\eta\eta} = 0.$$

Здесь $h(\eta) = h^0[\psi(\eta)]$, $\gamma_1 = e^{2A_1}\cdot 2\gamma[(U+\sqrt{\overline{\omega}})\bar{\rho}\bar{\sigma}\sqrt{\overline{\omega}}]^{-1}$, $A_i = \int\limits_0^{\psi} b_i\,d\tau$, $b_i = a_i^*(\bar{\sigma}\sqrt{\overline{\omega}})^{-1}$, $i=1,2$, $\xi = \int\limits_0^{\psi} e^{-A_1}\,d\tau$, $\eta = \int\limits_0^{\psi} e^{-A_2}\,d\tau$.

Поскольку по построению

$$\varphi(0) = \omega_0(1/n) - U^2 \equiv \varphi_0 < 0, \quad \varphi(\xi_0) = \omega_0(2/n) - U^2 \equiv \varphi_1 < 0,$$

то согласно принципу максимума для решений уравнения $l_1(\varphi)=0$ имеем

$$\varphi(\xi) \le 0 \quad \text{при } \xi \in [0,\xi_0], \quad \xi_0 = \int\limits_0^{\psi_0} e^{-A_1}\,d\tau, \quad \psi_0 = \frac{1}{n},$$

и тем самым $\varphi_{\xi\xi} = \gamma_1\varphi \le 0$. Тогда, очевидно, линейная функция

$$F(\xi) = (\varphi_1 - \varphi_0)\xi\xi_0^{-1} + \varphi_0 \le \varphi(\xi)$$

является нижним барьером для $\varphi(\xi)$ и, следовательно,

$$\varphi'(0) \ge F'(0) = (\varphi_1 - \varphi_0)\xi_0^{-1} > 0.$$

Таким образом, $\omega^0_\psi = \varphi_\psi = \varphi_\xi e^{-A_1} \ge 0$, $\psi \in [0,\frac{1}{n}]$, ибо в силу принципа максимума функция $\varphi(\xi)$ не может иметь локальных экстремумов в интервале $(0,\xi_0)$. Полностью аналогично устанавливается неравенство $h^0_\psi \le 0$, $\psi \in [0,\frac{1}{n}]$. Проинтегрируем систему уравнений $l_1(\varphi)=0$, $l_2(h)=0$:

$$\vec{\varphi} = \vec{\Lambda}(\vec{\varphi}|\psi) + \vec{\Phi}_1, \quad \vec{\varphi} = (\varphi,h),\ \vec{\Lambda} = (\Lambda_1,\Lambda_2),\ \vec{\Phi}_k = (\Phi_k,H_k),$$

где $\Phi_k = \omega_0\big(\frac{k}{n}\big) - U^2$, $H_k = h_0\big(\frac{k}{n}\big)$, $k=1,2$. Операторы Λ_k определяются формулами

$$\Lambda_1 = \int\limits_0^{\xi}(\xi-t)\varphi(t)\,dt - \frac{\xi}{\xi_0}\int\limits_0^{\xi_0}(\xi_0-t)\varphi(t)\,dt + \frac{\xi}{\xi_0}(\Phi_2-\Phi_1),$$

$$\Lambda_2 = \frac{\eta}{\eta_0}(H_2-H_1), \quad \eta_0 = \int\limits_0^{\psi_0} e^{-A_2}\,d\tau, \quad \psi_0 = \frac{1}{n}.$$

При этом $\vec{\Lambda}(\vec{\varphi}|\psi) : C^{1+\alpha}(J) \to C^{2+\alpha}(J)$, $J=(0,1/n)$, $\vec{\Lambda}(\vec{\varphi}|0) = 0$ и согласно предположениям (B) имеем

$$c_1\frac{1}{n} \le \big|\vec{\Phi}_2 - \vec{\Phi}_1\big| \le c_2\frac{1}{n},$$

$$c_1 = \min|\omega_0'(0), h_0'(0)|, \quad c_2 = \max_{\psi\le 1}\big|\omega_0'(\psi), h_0'(\psi)\big|.$$

Таким образом, нелинейный оператор $\vec{\Lambda}(\vec{\varphi})$ является компактным и непрерывным в $C^{1+\alpha}(J)$, и, очевидно, при достаточно малом $\psi_0 = 1/n$ по теореме Шаудера уравнение

$$\vec{\varphi} = \vec{\Lambda}(\vec{\varphi}) + \vec{\Phi}_1$$

имеет по крайней мере одно решение $\vec{\varphi} \in C^{2+\alpha}(J)$, $\alpha > 0$. Тем самым разрешима и задача (7) при $n \gg 1$.

Продолжим векторы $\vec{h}^0(\psi)$, $\psi \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, и $\vec{h}_0\left(\psi + \frac{1}{n}\right)$, $\psi \geq \frac{2}{n}$, на промежуток $\psi \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ с сохранением их гладкости, полагая соответственно $\vec{h}^0_*(\psi)$ и $\vec{h}^*_0(\psi)$ при $\psi \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

При этом потребуем выполнения неравенств

$$\omega^0_*(\psi) \leq \delta_0 = \frac{1}{2}[\omega_0(3/n) + \omega_0(2/n)], \quad \omega^*_0(\psi) \geq \delta_0,$$

$$h^0_*(\psi) \geq \delta_1 = \frac{1}{2}[h_0(3/n) + h_0(2/n)], \quad h^*_0(\psi) \leq \delta_1,$$

и сохранения монотонности продолженных функций, т. е.

$$\left(\omega^0_{*\psi}, \omega^*_{0\psi}\right) \geq 0, \quad \left(h^0_{*\psi}, h^*_{0\psi}\right) \leq 0, \quad \psi \in [1/n, 2/n].$$

Введем вектор $\vec{h}_0(\psi, n)$ регуляризованных начальных данных:

$$\vec{h}_0(\psi, n) = \vec{h}^0(\psi), \psi \in [0, 1/n]; \quad \vec{h}_0(\psi, n) = \vec{h}_0(\psi + 1/n), \quad \psi \geq \frac{2}{n},$$

$$\vec{h}_0(\psi, n) = [1 - g(n\psi - 1)]\vec{h}^0_*(\psi) + g(n\psi - 1)\vec{h}^*_0(\psi) \equiv \vec{H}^0(\psi), \quad \psi \in [1/n, 2/n],$$

где

$$g(\xi) = g_0(\xi)/g_0(1), \quad g_0(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \tau^5 (1 - \tau)^5 \, d\tau, \quad \xi = n\psi - 1.$$

Тогда $\vec{h}_0(\psi, n) \in C^4[0, n]$, при этом $\omega_{0\psi}(\psi, n) \geq 0$, $h_{0\psi}(\psi, n) \leq 0$.

Построим теперь вектор $\vec{h}_1(x, n) \in C^4[0, X]$, регуляризующий граничные данные при $\psi = 0$ так, чтобы

$$\omega_1(x, n) = \omega_0(1/n), \quad x \in [0, X],$$

$$h_1(x, n) = h_0(1/n), \quad x \in [0, 1/n], \quad h_1(x, n) = h_1(x), \quad x \geq 2/n, \quad h'_1(x, n) \geq 0.$$

При $\psi = n$ положим

$$\vec{h}_0(n, n) = \vec{h}_0(n + 1/n), \quad x \in [0, X].$$

Аналогично построениям в окрестности точки $(0, 0)$ решим систему уравнений (7) относительно искомого вектора $\vec{h}^n(\psi)$, $\psi \in \left[n - \frac{1}{n}, n\right]$ при краевых условиях

$$\vec{h}^n(n - 1/n) = \vec{h}_0(n), \quad \vec{h}^n(n) = \vec{h}_0(n + 1/n)$$

и убедимся в том, что $\omega^n_\psi(\psi) \geq 0$, $h^n_\psi(\psi) \leq 0$, $\psi \in \left[n - \frac{1}{n}, n\right]$.

Затем произведем продолжения $\vec{h}^n_*(\psi)$, $\vec{h}^*_0\left(\psi + \frac{1}{n}\right)$ векторов $\vec{h}^n(\psi)$, $\vec{h}_0\left(\psi + \frac{1}{n}\right)$ на промежуток $\psi \in \left[n - \frac{2}{n}, n - \frac{1}{n}\right]$ с сохранением гладкости и монотонности их компонент.

Окончательно вектор $\vec{h}_0(\psi, n)$, $\psi \in [0, n]$, начальных данных принимает вид

$$\vec{h}_0(\psi, n) = \begin{cases} \vec{h}^0(\psi), & \psi \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ \vec{H}^0(\psi), & \psi \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]; \\ \vec{h}_0(\psi + \frac{1}{n}), & \psi \in \left[\frac{2}{n}, n - \frac{2}{n}\right]; \\ \vec{H}^n(\psi), & \psi \in \left[n - \frac{2}{n}, n - \frac{1}{n}\right]; \\ \vec{h}^n(\psi), & \psi \in \left[n - \frac{1}{n}, n\right]. \end{cases}$$

Здесь $\vec{H}^n(\psi)$ представляется в форме, аналогичной $\vec{H}^0(\psi)$.

Рассмотрим в областях $R_n = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < n\}$ вспомогательные начально-краевые задачи для решений $\vec{h}(x, \psi, n)$ уравнения (6):

$$\vec{h}|_{x=0} = \vec{h}_0(\psi, n), \quad \vec{h}|_{\psi=0} = \vec{h}_1(x, n), \quad \vec{h}|_{\psi=n} = \vec{h}_0(n + 1/n), \tag{8}$$

где $\omega_1(x, n) = \omega_0\left(\frac{1}{n}\right)$.

Очевидно, функции $\omega(x, \psi, n)$, $h(x, \psi, n)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами, удовлетворяющими по построению в точках $(0, 0)$, $(0, n)$ условиям согласования до первого порядка включительно.

Полученная для $\vec{h}(x, \psi, n)$ краевая задача (6), (8) при каждом $n > 0$ имеет классическое решение, причем $\vec{h}(x, \psi, n) \in C^{3+\alpha}(R_n)$ [7, с. 683, 364].

3. Оценки решений регуляризованных задач (6), (8)

Лемма 1. *При $(x, \psi) \in R_n$ справедливы неравенства*

$$\omega_0(1/n) \le \omega(x, \psi, n) \le U^2, \quad h_0(n + 1/n) \le h(x, \psi, n) \le h_1(x, n), \tag{9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \psi}(x, \psi, n) \le 0. \tag{10}$$

Для доказательства (9) установим неотрицательность разностей

$$s_1 = \omega(x, \psi, n) - \omega_0(1/n), \quad s_2 = U^2 - \omega(x, \psi, n),$$

$$s_3 = h(x, \psi, n) - h_0(n + 1/n), \quad s_4 = h_1(x, n) - h(x, \psi, n).$$

На параболической границе

$$\Gamma_n = \{x = 0,\ 0 \le \psi \le n\} \cup \{\psi = 0, n,\ 0 \le x \le X\}$$

области R_n в силу условий (B) имеем

$$s_i(x, \psi, n) \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Считая коэффициенты $\sqrt{\bar{\omega}}\bar{\sigma}$, a_1^*, a_2^*, $c = 2\gamma[\bar{\rho}(U + \sqrt{\bar{\omega}})]^{-1}$ уравнений (6) заданными функциями, приходим к линейным параболическим уравнениям для $s_i(x, \psi, n)$:

$$\sqrt{\bar{\omega}}\bar{\sigma} s_{i\psi\psi} + k_i s_{i\psi} + c_i s_i - s_{ix} = d_i,$$

где $k_1 = k_2 = a_1^*$, $k_3 = k_4 = a_2^*$; $c_1 = c_2 = -c$; $c_3 = c_4 = d_2 = d_3 = 0$; $d_1 = -c\left[U^2 - \omega_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, $d_4 = -h_{1x}(x, n)$.

Так как $d_i(x, \psi) \le 0$, $c_i(x, \psi) \le 0$ при $(x, \psi) \in R_n$ и $s_i(x, \psi, n) \ge 0$ при $(x, \psi) \in \Gamma_n$, то согласно принципу максимума $s_i(x, \psi, n) \ge 0$ всюду в области R_n, т. е. выполняются неравенства (9).

Далее, из доказанных для $h(x,\psi,n)$ неравенств (9) имеем

$$h|_{\psi=n} = h_0(n+1/n) = \min_{R_n} h \le h(x,\psi,n) \le \max_{R_n} h = h_1(x,n), \quad h_{1x}(x,n) \ge 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial \psi}(x,\psi,n) \le 0 \quad \text{при } (x,\psi) \in \Gamma_n. \tag{11}$$

В области R_n функция $r(x,\psi) = \frac{\partial h}{\partial \psi}$ является решением однородного параболического уравнения с ограниченными коэффициентами:

$$(\sqrt{\overline{\omega}}\bar{\sigma} r)_{\psi\psi} - \rho_0 v_0 r_\psi - r_x = 0. \tag{12}$$

Условия (11), (12) обеспечивают по принципу максимума неположительность $r(x,\psi)$ всюду в области R_n, т. е. справедливость (10). Лемма доказана.

Из неравенств (9), (10) и условий (B) на h вытекают также оценки для $\theta(x,\psi,n) = h(x,\psi,n) - \frac{1}{2}\omega(x,\psi,n)$:

$$0 < \theta_\infty = h_\infty - \frac{1}{2}U^2 \le \theta(x,\psi,n) \le h_1(X), \quad (x,\psi) \in R_n,$$

гарантирующие положительность и ограниченность $\theta(x,\psi,n)$ при любом n $(n \gg 1)$.

Подчинив константы M, m в определении срезки $\overline{\varphi}(\varphi)$ условиям

$$M > \max\{U^2, \theta_1(X)\}, \quad m < \omega_0(1/n),$$

приходим к тождествам

$$\overline{\omega}(\omega) = \omega, \quad \bar{\theta}(\theta) = \theta, \quad \bar{\sigma}(\sigma) = \sigma, \quad \bar{\rho}(\rho) = \rho.$$

Таким образом, решения $\vec{h}(x,\psi,n)$ задачи (6), (8) являются одновременно и решениями краевой задачи (4), (8), т. е. срезки у $\overline{\omega}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$ снимаются.

4. Нижний «барьер» для $\omega(x,\psi,n)$

Лемма 2. *В области R_n выполняется неравенство*

$$q(x,\psi) \equiv e^{-\beta x} z(\psi) \le \omega(x,\psi,n) - \omega_0(1/n), \tag{13}$$

где $z(\psi) = m_1(\psi + \psi^{4/3})$ при $0 \le \psi \le 1$; $2m_1 \le z(\psi) \le m_2$, $|z', z''| \le m_3$ при $\psi \ge 1$; $m_i > 0$, $\beta > 0$ — некоторые постоянные.

Барьерная функция $q(x,\psi)$ впервые использована в [4, с. 34].

В области R_n функция $\omega = \omega(x,\psi,n)$ удовлетворяет уравнению

$$L(\omega) \equiv \sqrt{\omega}\sigma\omega_{\psi\psi} + a_3(x,\psi)\omega_\psi - \omega_x = a_4(x,\psi), \tag{14}$$

где в силу (A), (9), (10)

$$a_3 = \sqrt{\omega}|\sigma_\theta||h_\psi| + |\rho_0 v_0| \ge 0, \quad a_4 = -\frac{2\gamma}{\rho}(U - \sqrt{\omega}) - \frac{1}{2}\sqrt{\omega}|\sigma_\theta|\omega_\psi^2 \le 0.$$

Выберем постоянные m_1, m_2 настолько малыми, чтобы функция

$$z = \omega(x,\psi,n) - q(x,\psi)$$

при любом $\beta > 0$ была неотрицательной на параболической границе Γ_n области R_n. Так как $a_3 z'(\psi) \geq 0$, $\sqrt{z(\psi)}z''(\psi) \to 0$ при $\psi \to \infty$ и $z(\psi) \geq z(\psi_0)$ $\forall \psi \geq \psi_0 > 0$, при достаточно большом $\beta \geq \beta_0 \gg 1$ получим

$$L(q) \equiv \sigma e^{-\beta x}(\sqrt{e^{-\beta x}z}z'' + a_3 z' + \beta z) > 0, \quad (x, \psi) \in R_n.$$

Таким образом, при $(m_1, m_2) \ll 1$, $\beta \geq \beta_0 \gg 1$ для $w = \omega - q$ выполняются неравенства

$$w|_{\Gamma_n} \geq 0, \quad L(\omega) - L(q) \equiv L_0(w) < 0, \quad (x, \psi) \in R_n,$$

где L_0 — параболический оператор. Отсюда согласно принципу максимума вытекает неотрицательность $w(x, \psi)$ при $(x, \psi) \in R_n$, т. е. $q(x, \psi)$ является нижним «барьером» для $\omega(x, \psi, n)$. Лемма доказана.

Отметим очевидное следствие неравенства (13): $\omega_\psi|_{\psi=0} > 0$.

Кроме того, в силу (13) для $\vec{h}(x, \psi, n)$ имеют место внутренние оценки, зависящие лишь от расстояния δ до границ $\psi = 0$, $\psi = n$:

$$\|\vec{h}(x, \psi, n)\|^{(2+\alpha)}_{R(\delta)} \leq M_1(\delta), \tag{15}$$

где $R(\delta) = \{0 \leq x \leq X,\ \delta \leq \psi \leq n - \delta\}$.

Действительно, согласно (13) система уравнений (4) в области $R(\delta)$ является равномерно параболической с константой параболичности, зависящей лишь от расстояния δ до границ $\psi = 0$, $\psi = n$. Поэтому к решениям задачи (4), (8) применимы известные в теории равномерно параболических уравнений результаты [7, с. 670].

5. Интегральные оценки, предельный переход

Введем обозначения:

$$(g, f) = \iint\limits_{R_N} gf\, dx d\psi, \quad R_N = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < N\}.$$

Лемма 3. *Для решений $\vec{h}(x, \psi, n)$ задачи* (6), (8) *справедливы равномерные по n интегральные оценки*

$$\left(\omega^{-\frac{1}{2}-\beta}, \omega_\psi^2\right) \leq M_1, \quad \left(\sqrt{\omega}, h_\psi^2\right) \leq M_1, \quad \beta < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Умножим уравнения (6), записанные в дивергентной форме, первое — на $\omega^{-\beta}$, второе — на $h_1(x, n) - h(x, \psi)$ и проинтегрируем их по области R_1.

Полученные равенства после элементарных преобразований примут вид

$$\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(\sigma\omega^{-\frac{1}{2}-\beta}, \omega_\psi^2\right) + \int\limits_0^X (\sigma\omega^{\frac{1}{2}-\beta}\omega_\psi)_{\psi=0}\, dx = \int\limits_0^X (\sigma\omega^{\frac{1}{2}-\beta}\omega_\psi)_{\psi=1}\, dx$$
$$- \frac{1}{1-\beta}\left[\int\limits_0^X (\rho_0 v_0 \omega^{1-\beta})\Big|_{\psi=0}^{\psi=1} dx + \int\limits_0^1 \omega^{1-\beta}\Big|_{x=0}^{x=X} d\psi\right] + (f^*, \omega^{-\beta});$$

$$\left(\sigma\sqrt{\omega}, h_\psi^2\right) = -\int\limits_0^X [\sigma(h_1-h)\sqrt{\omega}h_\psi]_{\psi=1}\,dx$$
$$-\int\limits_0^X \rho_0 v_0 (h_1-h)^2|_{\psi=1}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (h_1-h)^2\Big|_{x=0}^{x=X}\,d\psi.$$

Здесь интегралы, стоящие в правых частях полученных равенств, ограничены в силу оценок (9), (12), (15) и тем самым ограничены и положительные интегралы в левых частях константами, не зависящими от n. Лемма доказана.

Интегрированием по области R_N обеих частей уравнений (6), умноженных соответственно на $\omega^{-1/2}g(x,\psi)$ и $g(x,\psi) \in \overset{\circ}{C}{}^1(R_N)$, получим следующие тождества:

$$\Lambda_N^1(\vec{h}, g) \equiv (\sqrt{\omega}, g_x) - \frac{1}{2}(\sigma\omega_\psi - 2\rho_0 v_0\sqrt{\omega}, g_\psi) + \frac{1}{2}(f^*\omega^{-\frac{1}{2}}, g) = 0, \qquad (17)$$

$$\Lambda_N^2(\vec{h}, g) \equiv (h, g_x) - (\sigma\sqrt{\omega}h_\psi - \rho_0 v_0 h, g_\psi) = 0. \qquad (18)$$

Оценим входящие в (17), (18) интегралы через постоянные N и $K(g,N) \equiv \|g\|_{C^1(R_N)}$.

Очевидно, заслуживают внимания оценки интегралов, содержащих произведения $\omega_\psi g_\psi, h_\psi g_\psi$. Проведем такую оценку с использованием неравенств (16) при $\beta = -\frac{1}{2}$ на примере интеграла $I = (\sigma g_\psi, \omega_\psi)$:

$$|I| \le (\sigma g_\psi, \sigma g_\psi)^{\frac{1}{2}}(\omega_\psi, \omega_\psi)^{\frac{1}{2}} \le K_0 N^{\frac{1}{2}},$$

где K_0 зависит от $K(g,N)$ и оценки нормы ω_ψ в (16) при $\beta = -\frac{1}{2}$. Остальные интегралы оцениваются аналогично.

Таким образом, приходим к неравенствам

$$\Lambda_N^i(\vec{h}, g) \le K_0(g,N)N^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \qquad (19)$$

где постоянная K_0 не зависит от n.

Разобьем входящие в тождества (17), (18) интегралы по R_N на сумму интегралов по R_δ, $0<\delta<1$, и по $R_{\delta,N} = R_N \setminus R_\delta$.

Положим в (17), (18)

$$\Lambda_N^i(\vec{h}, g) \equiv \Lambda_{\delta,N}^i(\vec{h}, g) + \Lambda_\delta^i(\vec{h}, g) = 0 \quad (0<\delta<N), \quad i = 1, 2, \qquad (20)$$

где в $\Lambda_{\delta,N}^i$ интегралы берутся по $R_{\delta,N}$.

Для доказательства предельного при $n\to\infty$ перехода в (20) воспользуемся схемой, принятой в [8].

В области $R_{\delta,N}$ для произвольного $\delta > 0$ в силу оценки (15) множества функций $\vec{h}(x,\psi,n)$ компактны в пространствах $C^{2+\alpha_0}(R_{\delta,N})$ при любом α_0, $0 < \alpha_0 < \alpha$.

Выберем из последовательности $\vec{h}_n \equiv \vec{h}(x,\psi,n)$ сходящуюся подпоследовательность $\vec{h}_{n_k} \to \vec{h}$ в $C^{2+\alpha_0}(R_{\delta,N})$, $\alpha_0 > 0$, и в интегралах $\Lambda_{\delta,N}^i(\vec{h}_{n_k}, g)$ перейдем к пределу при $n_k\to\infty$.

В силу оценок (9), (13) и (16) подынтегральные функции в интегралах $\Lambda_\delta^i(\vec{h}_n, g)$ по области R_δ слабо компактны соответственно в следующих пространствах:

$$\sqrt{\omega_n} \text{ и } h_n \text{ в } L_p\ \forall p>1, \quad \sigma\omega_{n\psi} \text{ и } \sigma\omega^{\frac{1}{4}}h_{n\psi} \text{ в } L_2, \quad f^*\omega_n^{-\frac{1}{2}} \text{ в } L_p,\ 1<p<2.$$

Тем самым в этих интегралах можно выделить слабо сходящиеся в указанных пространствах подпоследовательности и перейти в них к пределу при $n_k \to \infty$. Обозначим полученный функционал через $\Lambda^i_{*\delta}(\vec{h}, g)$ и отметим, что его представление через вектор $\vec{h}$ неизвестно, но при каждом δ, $0 < \delta \ll 1$, для него выполняются следствия оценки (19):

$$\left|\Lambda^i_{*\delta}(\vec{h}, g)\right| \leq K_0(g)\delta^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Из (21) следует, что $\left|\Lambda^i_{*\delta}(\vec{h}, g)\right| \to 0$ при $\delta \to 0$.

В результате описанного предельного перехода в (17), (18) при $n \to \infty$ приходим к интегральным тождествам

$$\Lambda^i_N(\vec{h}, g) \equiv \Lambda^i_{\delta,N}(\vec{h}, g) + \Lambda^i_{*\delta}(\vec{h}, g), \quad 0 < \delta < N, \ i = 1, 2, \tag{22}$$

в которых интегралы в $\Lambda^i_{\delta,N}(\vec{h}, g)$ по области $R_{\delta,N} = (0, X) \times (\delta, N)$ определены равенствами (17), (18), (20).

Докажем справедливость последнего граничного условия (5). Положим

$$B_1 = U^2 - \omega(x, \psi), \quad B_2 = h(x, \psi) - h_\infty, \quad c = -\frac{2\gamma}{\rho}(U + \sqrt{\omega})^{-1}$$

и получим из (4) уравнения для B_i:

$$L_1(B_1) \equiv (\sigma\sqrt{\omega}B_{1\psi})_\psi - \rho_0 v_0 B_{1\psi} - B_{1x} = cB_1,$$

$$L_2(B_2) \equiv (\sigma\sqrt{\omega}B_{2\psi})_\psi - \rho_0 v_0 B_{2\psi} - B_{2x} = 0.$$

При этом $B_i(0, \psi) \to 0$ при $\psi \to \infty$, $|B_i| \leq M_0 = \text{const}$.

Рассмотрим в области $R_{1,\infty} = \{0 < x < X, \ 1 < \psi < \infty\}$ функции

$$\Phi_i = Me^{Kx-\psi} + \varepsilon + B_i(x, \psi), \quad i = 1, 2.$$

Очевидно, при достаточно больших M и $K = \text{const} > 0$ имеют место неравенства

$$\Phi_i(x, \psi)|_{\Gamma_1} \geq 0, \quad L_i(\Phi_i) - L_i(B_i) \equiv L^*_i(\Phi_i - B_i) < 0, \quad (x, \psi) \in R_{1,\infty},$$

где Γ_1 — параболическая граница области $R_{1,\infty}$, L^*_i — параболические операторы.

Отсюда по принципу максимума вытекает неотрицательность $\Phi_i(x, \psi)$ в области $R_{1,\infty}$, т. е.

$$0 < U^2 - \omega(x, \psi) \leq Me^{Kx-\psi} + \varepsilon, \quad 0 < h(x, \psi) - h_\infty \leq Me^{Kx-\psi} + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε полученные неравенства обеспечивают выполнение последнего граничного условия в (5).

Определение. Вектор-функция $\vec{h}(x, \psi) \in C^{2+\alpha}(R_{\delta,N})$ $\forall N > \delta > 0$ с ограниченными и положительными при $\psi > 0$ компонентами, удовлетворяющая уравнениям (4), начальным условиям $\vec{h}|_{x=0} = \vec{h}_0(\psi)$ при $\psi > \delta$ $\forall \delta > 0$ и условиям (5) при $(N, \psi) \to \infty$, называется *обобщенным решением* задачи (4), (5), если для $\vec{h}(x, \psi)$ выполняются интегральные тождества (17), (18) в форме (22).

Теорема. *При выполнении условий* (А), (Б), (В) *существует обобщенное решение* $\vec{h}(x, \psi)$ *задачи* (4), (5), *удовлетворяющее неравенствам* (9), (13), (15), (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
2. *Бай Ши-и* Магнитная гидродинамика и динамика плазмы. М.: Мир, 1964.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
4. *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука, 1997.
5. *Хуснутдинова Н. В.* Краевая задача для системы уравнений температурного пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 1. С. 64–67.
6. *Хуснутдинова Н. В.* Тепловой пограничный слой на пластине // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 3. С. 605–608.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. *Хуснутдинова Н. В.* Об отрыве пограничного слоя // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1195–1210.

Статья поступила 21 мая 2003 г., окончательный вариант — 22 ноября 2004 г.

Хуснутдинова Нила Валеевна
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090