Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 512.553

КОКОНЕЧНО ПОЛУСОВЕРШЕННЫЕ МОДУЛИ

Х. Чалышиджи, А. Панжар

Аннотация: Известно, что проективный модуль M является $\oplus$-дополняемым тогда и только тогда, когда M полусовершенен. Показано, что проективный модуль M является $\oplus$-коконечно дополняемым (см. [1]) тогда и только тогда, когда M *коконечно полусовершенен* или, коротко, *кок-полусовершенен* (т. е. каждый конечнопорожденный факторный модуль в M имеет проективное накрытие). Кроме того, устанавливаются различные свойства кок-полусовершенных модулей. Если проективный модуль M полусовершенен, то каждый M-порожденный модуль кок-полусовершенен. Кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда каждый свободный R-модуль кок-полусовершенен.

Ключевые слова: полусовершенное кольцо, коконечный подмодуль, коконечно полусовершенные модули.

1. Введение

Всюду в этой статье R — ассоциативное кольцо с единицей и все модули суть унитальные правые R-модули. Пусть M есть R-модуль. Подмодуль N в M называют *малым* в M и используют обозначение $N \ll M$, если для любого подмодуля $K \subset M$ равенство $N + K = M$ влечет $K = M$. Эпиморфизм $f : M \to N$ называют *малым*, если $\operatorname{Ker} f \ll M$. Для подмодуля N в M подмодуль $L \subset M$ называют *дополнительным* к N в M, если L является наименьшим элементом в множестве модмодулей K в M таких, что $M = N + K$. L дополнительное к N в M тогда и только тогда, когда $M = N + L$ и $N \cap L \ll L$. R-модуль M называют *дополняемым*, если каждый подмодуль в M имеет дополнение в M, и *конечно дополняемым* или, короче, *f-дополняемым*, если каждый конечнопорожденный подмодуль в M имеет дополнение в M (см. [2]). Артиновы модули дополняемы. Следуя [3], M будем называть $\oplus$-*дополняемым*, если каждый подмодуль в M имеет дополнение, являющееся прямым слагаемым в M.

Подмодуль N R-модуля M называют *коконечным* в M, если фактор-модуль $\frac{M}{N}$ конечнопорожденный. R-модуль M называют *коконечно дополняемым*, если каждый коконечный подмодуль в M имеет дополнение в M, и *вполне коконечно дополняемым*, если для любого коконечного подмодуля N в M такого, что $M = N + K$, существует дополнение L в N такое, что $L \subset K$ (см. [4]). Аналогично M называют *вполне f-дополняемым*, если каждый конечнопорожденный подмодуль в M удовлетворяет этому условию (см. [2]). Как доказано в [4, теорема 2.8], R-модуль M коконечно дополняем тогда и только тогда, когда каждый максимальный подмодуль в M имеет дополнение в M. Следуя [1], R-модуль M будем называть $\oplus$-*коконечно дополняемым*, если каждый коконечный подмодуль в M имеет дополнение, являющееся прямым слагаемым в M.

Легко видеть, что в рамках введенных терминов справедливы следующие импликации:

$$\begin{tikzcd}
 & \oplus\text{-supplemented} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\oplus\text{-cofinitely supplemented} \arrow[dr] & & \text{supplemented}\ . \arrow[dl] \\
 & \text{cofinitely supplemented} &
\end{tikzcd}$$

Пусть M — R-модуль. Проективный R-модуль P вместе с малым эпиморфизмом $\pi : P \to M$ называют *проективным накрытием* M. Известно, что проективных накрытий может не оказаться, например, Z-модуль $\mathbf{Q}$ рациональных чисел не допускает проективного накрытия, потому что тривиальный подмодуль 0 является единственным малым подмодулем свободного Z-модуля. R-модуль M называют *полусовершенным*, если каждый фактор-модуль в M имеет проективное накрытие. Кольцо R называют *полусовершенным*, если R_R полусовершенно (см. [2]). В [5, теорема 2.1] показано, что кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда каждый конечнопорожденный свободный R-модуль $\oplus$-дополняем.

Основные свойства полусовершенных модулей и $\oplus$-дополняемых модулей можно найти в [2, 3].

2. Коконечно полусовершенные модули

Известно, что проективный модуль M $\oplus$-дополняем тогда и только тогда, когда M полусовершенно [6, лемма 2.1]. В этом разделе мы докажем аналогичную характеристику для $\oplus$-конечно дополняемых модулей.

R-модуль M называют *коконечно полусовершенным* или, короче, *кок-полусовершенным*, если каждый конечнопорожденный фактор-модуль в M имеет проективное накрытие. Очевидно, полусовершенные модули кок-полусовершенны, и конечнопорожденные кок-совершенные модули полусовершенны. Однако кок-полусовершенные модули могут не быть полусовершенными (см. пример 2.3 ниже).

Теорема 2.1. *Пусть M — проективный модуль. Тогда M кок-полусовершенный тогда и только тогда, когда M $\oplus$-коконечно дополняем.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть N — коконечный подмодуль в M. Тогда $\frac{M}{N}$ конечнопорожденный и тем самым по предположению существует проективное накрытие а$\pi : P \to \frac{M}{N}$. Для канонического эпиморфизма $\sigma : M \to \frac{M}{N}$ ввиду проективности M найдется гомоморфизм $f : M \to P$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\sigma"] \\
P \arrow[r, "\pi"'] & \frac{M}{N}
\end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. $\pi \circ f = \sigma$). Так как π малый, f — эпиморфизм согласно [2, 19.2], поэтому f расщепляется (P проективно). Тогда по [7, 19.2] существует гомоморфизм $g : P \to M$ такой, что $f \circ g = 1_P$, откуда $\pi = \pi \circ f \circ g = \sigma \circ g$. Заметим, что $M = \operatorname{Ker} f \oplus g(P)$ и $\operatorname{Ker} f \leq N$, следовательно, $M = N + g(P)$. Пусть μ — ограничение σ на $g(P)$. Тогда $\pi = \mu \circ g$ и тем самым μ — накрытие.

Поскольку π малый, μ малый по [2, 19.3]. Значит, $\operatorname{Ker}\mu = N \cap g(P) \ll g(P)$. Отсюда $g(P)$ — дополнение N.

($\Leftarrow$) Пусть $\frac{M}{N}$ — конечнопорожденный фактор-модуль в M. Тогда N коконечно. Поскольку M $\oplus$-коконечно дополняемо, найдутся подмодули K, K' в M такие, что $M = N + K$, $N \cap K \ll K$ и $K \oplus K' = M$. Очевидно, K проективен. Взяв вложение $i : K \to M$ и канонический эпиморфизм $\sigma : M \to \frac{M}{N}$, получим, что $\sigma \circ i : K \to \frac{M}{N}$ — эпиморфизм и $\operatorname{Ker}\sigma \circ i = N \cap K \ll K$.

Следуя Гарсиа [8], будем говорить, что M — это *модуль со свойством слагаемых суммы* (summand sum property), если сумма двух прямых слагаемых в M снова прямое слагаемое в M.

Следствие 2.2. *Пусть M — проективный модуль со свойством слагаемых суммы. Тогда M — кок-полусовершенен тогда и только тогда, когда каждый простой фактор-модуль в M имеет проективное накрытие.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, пусть P — максимальный подмодуль в M. Тогда согласно предположениям $\frac{M}{P}$ имеет проективное накрытие. Поскольку P коконечен, из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что P имеет дополнение, являющееся прямым слагаемым в M. Отсюда M $\oplus$-коконечно дополняемо ввиду [1, теорема 2.3], так что M кок-полусовершенно.

Пример (см. [7, 11.3]). Пусть R — кольцо $K[[x]]$ всех степенных рядов $\sum\limits_{i=0}^{\infty} k_i x^i$ от переменной x с коэффициентами из поля K, являющегося локальным кольцом. Заметим, что R — полусовершенное кольцо, не являющееся совершенным. Тогда по [5, следствие 2.11] свободный (= проективный) R-модуль $R^{(N)}$ не будет $\oplus$-дополняемым и тем самым $R^{(N)}$ не полусовершенно ввиду [6, лемма 1.2]. Но $R^{(N)}$ $\oplus$-коконечно дополняемо в силу [1, теорема 2.9], так что оно кок-полусовершенно.

Пусть M — R-модуль и N — подмодуль в M. Говорят, что N *лежит выше прямого слагаемого в* M, если существует разложение $M = K \oplus K'$ такое, что $K \subset N$ и $K' \cap N \ll K'$ (см. [2, 41.11]).

Теорема 2.3. *Пусть M — проективный модуль. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *M кок-полусовершенен;*

(2) *M $\oplus$-коконечно дополняем;*

(3) *каждый коконечный подмодуль в M лежит выше прямого слагаемого в M.*

Если M f-дополняем, то (1)–(3) *эквивалентны также утверждению*

(4) *M вполне коконечно дополняем.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) по теореме 2.1.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть N — коконечный подмодуль в M. Согласно предположениям существуют подмодули K, K' в M такие, что $M = N + K$, $N \cap K \ll K$ и $M = K \oplus K'$. Ввиду [2, 41.14], так как M проективен, найдется подмодуль $K'' \subset N$ такой, что $M = K'' \oplus K'$.

(3) $\Rightarrow$ (2) очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4) Из определений вытекает, что M коконечно дополняем. Тогда M вполне коконечно дополняем в силу [4, предложение 2.12].

(4) $\Rightarrow$ (3) Если M f-дополняем, то, как и в доказательстве утверждения [2, 41.15], легко получить, что M вполне f-дополняем. Пусть N — коконечный

подмодуль в M. Согласно предположениям найдется подмодуль K в M такой, что $M = N + K$ и $N \cap K \ll K$. Заметим, что

$$\frac{M}{N} = \frac{N+K}{N} \cong \frac{K}{N \cap K}$$

конечнопорожденный и тем самым K конечнопорожденный ввиду [2, 19.6]. Поскольку M вполне f-дополняем, существует подмодуль $L \subset N$ такой, что $M = L + K$ и $L \cap K \ll L$. Заметим, что $L \cap K \subset N \cap K \ll N$, так что K и L взаимно дополняются в M. Из [2, 41.14] следует, что $M = L \oplus K$.

Предложение 2.4. *Каждый гомоморфный образ кок-полусовершенного модуля кок-полусовершенен.*

Доказательство. Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм и M — кок-полусовершенный модуль. Пусть $\frac{f(M)}{U}$ — конечнопорожденный фактор-модуль в $f(M)$. Рассмотрим эпиморфизм

$$\psi : M \to \frac{f(M)}{U}, \quad m \mapsto f(m) + U.$$

Так как M кок-полусовершенен, из естественного изоморфизма

$$\frac{M}{f^{-1}(U)} \cong \frac{f(M)}{U}$$

получаем, что $\frac{f(M)}{U}$ имеет проективное накрытие. Отсюда $f(M)$ кок-полусовершенен.

Следствие 2.5. *Фактор-модуль кок-полусовершенного модуля кок-полусовершенен.*

Модуль N называют *малым накрытием* модуля M, если существует малый эпиморфизм $f : N \to M$ (см. [9]).

Предложение 2.6. *Малое накрытие кок-полусовершенного модуля кок-полусовершенно.*

Доказательство. Пусть N — малое накрытие M и $f : N \to M$ — малый эпиморфизм. Для конечнопорожденного фактор-модуля $\frac{N}{U}$ в N гомоморфизм

$$\varphi : \frac{N}{U} \to \frac{M}{f(U)}, \quad n + U \mapsto f(n) + f(U),$$

является эпиморфизмом и $\operatorname{Ker}\varphi \ll \frac{N}{U}$, поскольку $\operatorname{Ker} f \ll N$. Заметим, что

$$\frac{M}{f(U)} = \varphi(\frac{N}{U}) \cong \frac{\frac{N}{U}}{\frac{U + \operatorname{Ker} f}{U}},$$

так что $\frac{M}{f(U)}$ конечнопорожденный. Ввиду того, что M кок-полусовершенен, $\frac{M}{f(U)}$ имеет проективное накрытие $\pi : P \to \frac{M}{f(U)}$. Так как P проективен, найдется гомоморфизм $h : P \to \frac{N}{U}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\pi"] \\ \frac{N}{U} \arrow[r, "\varphi"'] & \frac{M}{f(U)} \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\pi = \varphi \circ h$. Значит, h — накрытие согласно [2, 19.2] и π малый, поэтому h малый по [2, 19.3]. Отсюда P — проективное накрытие $\frac{N}{U}$.

Следствие 2.7. *Если* $N \ll M$ *и* $\frac{M}{N}$ *кок-полусовершенно, то* M *кок-полусовершенно.*

Следствие 2.8. *Пусть* $\pi : P \to M$ *— проективное накрытие* M*. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) M *кок-полусовершенно;*

(2) P *кок-полусовершенно;*

(3) P $\oplus$*-коконечно дополняемо.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из предложения 2.6.

(2) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 2.4.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) в силу теоремы 2.1 (P проективно).

Пусть R — кольцо и P — прямая сумма проективных полусовершенных R-модулей P_i ($i \in I$). Из [2, 42.4] видим, что условие $\operatorname{Rad} P \ll P$ необходимо для того, чтобы P было полусовершенным модулем. Здесь $\operatorname{Rad} P$ — радикал Якобсона P. Однако в следующей теореме мы покажем, что если P — прямая сумма проективных кок-полусовершенных R-модулей P_i ($i \in I$), то P будет прямо кок-полусовершенной, минуя необходимость этого условия.

Теорема 2.9. *Прямая сумма* $\bigoplus\limits_{i \in I} P_i$ *проективных модулей* P_i *кок-полусовершенна тогда и только тогда, когда каждое слагаемое* P_i *кок-полусовершенно.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть P_i ($i \in I$) — набор проективных R-модулей и $P = \bigoplus\limits_{i \in I} P_i$ — кок-полусовершенный R-модуль. Так как $P_i \cong \frac{P}{\bigoplus_{j \in I - \{i\}} P_j}$ для всех $i \in I$, согласно следствию 2.5 каждый P_i кок-полусовершенен.

($\Leftarrow$) Поскольку каждый P_i проективен и кок-полусовершенен, по теореме 2.1 каждый P_i $\oplus$-коконечно дополняем, так что P $\oplus$-коконечно дополняем согласно [1, теорема 2.6]. Отсюда P кок-полусовершенен по теореме 2.1.

Следствие 2.10. *Пусть* M *— проективный модуль. Тогда* M $\oplus$*-коконечно дополняем тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое в* M *является* $\oplus$*-коконечно дополняемым.*

Пусть M и N — R-модули. Говорят, что N (*конечно*) M*-порожденный*, если существует эпиморфизм $f : M^{(\Lambda)} \to N$ для некоторого (конечного) множества индексов Λ (см. [2]).

Ввиду [5, следствие 2.11; 6, лемма 2.1] R является правым совершенным кольцом тогда и только тогда, когда каждый свободный правый R-модуль полусовершенен. Докажем аналогичный результат для полусовершенных колец. Для этого нам потребуется следующая

Лемма 2.11. *Пусть* M *— проективный модуль. Если* M *полусовершенен, то каждый* M*-порожденный модуль кок-полусовершенен. Если* M *конечнопорожденный, то верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Так как M полусовершенен, M $\oplus$-дополняем и тем самым M $\oplus$-коконечно дополняем. По теоремам 2.1 и 2.9 $M^{(\Lambda)}$ кок-полусовершенен для любого множества индексов Λ. Тогда по предложению 2.4 получаем требуемый результат. Обратно, допустим, что M конечнопорожденный. По предположению M кок-полусовершенен, так что M полусовершенен.

Теорема 2.12. *Для кольца* R *эквивалентны следующие утверждения:*

(1) R *полусовершенно;*

(2) *каждый конечнопорожденный свободный* R*-модуль полусовершенен;*

(3) *Каждый свободный R-модуль кок-полусовершенен.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) ввиду [5, теорема 2.1; 6, лемма 2.1].
(1) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает из леммы 2.11.

Авторы благодарны профессору К. Ализаде за его интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Çalışıcı H., Pancar A.* ⊕-cofinitely supplemented modules // Czech. Math. J. 2004. V. 54, N 129. P. 1083–1088.
2. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
3. *Mohamed S. H., Müller B. J.* Continuous and Discrete Modules. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London Math. Soc.; LNS 147).
4. *Alizade R., Bilhan G., Smith P. F.* Modules whose maximal submodules have supplements // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 6. P. 2389–2405.
5. *Keskin D., Smith P. F., Xue W.* Rings whose modules are ⊕-supplemented // J. Algebra. 1999. V. 218. P. 470–487.
6. *Harmancı A., Keskin D., Smith P. F.* On ⊕-supplemented modules // Acta Math. Hungar. 1999. V. 83. P. 161–169.
7. *Kasch F.* Modules and rings. London: Acad. Press, 1982.
8. *Garcia J. L.* Properties of direct summands of modules // Comm. Algebra. 1989. V. 17. P. 73–92.
9. *Lomp C.* On semilocal modules and rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 1921–1935.

Статья поступила 29 марта 2004 г.

H. Çalışıcı (Чалышиджи Хамза)
Department of Mathematics, Faculty of Education
Ondokuz Mayıs University, 05189, Amasya-Turkey
hcalisici@omu.edu.tr

A. Pancar (Панжар Али)
Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science
Ondokuz Mayıs University, 55139, Samsun-Turkey
apancar@omu.edu.tr