*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2005. Том 46, № 4*

*УДК 515.14*

# ДИАДИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИАДИЧЕСКИЕ СУПЕРПАРАКОМПАКТНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

**Д. К. Мусаев**

**Аннотация:** Вводится понятие диадического суперпаракомпакта, обобщающее классическое понятие диадического бикомпакта, и дается аналог теоремы В. И. Кузьминова и Л. Н. Ивановского о диадичности пространства бикомпактной топологической группы для суперпаракомпактных групп. Кроме того, обобщается теорема Л. С. Понтрягина, утверждающая о существовании открытой бикомпактной подгруппы в любой окрестности единицы локальной бикомпактной вполне несвязной топологической группы.

**Ключевые слова:** диадическое отображение, суперпаракомпактное пространство, морфизм, группа.

Всюду ниже под пространством понимается топологическое пространство, под отображением — непрерывное отображение пространств.

Напомним основные для этой работы определения.

Определение 1 [1]. (а) Звездно-конечное открытое покрытие пространства называется *конечнокомпонентным*, если все его компоненты сцепленности конечны; (б) пространство называется *суперпаракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать конечнокомпонентное покрытие; (в) хаусдорфовы суперпаракомпактные пространства называются *суперпаракомпактами.*

Определение 2 [2]. (а) Сюръективное $T_2$-отображение [3] $f : X \to Y$ называется *диадическим*, если существует сюръективный морфизм $[1, 3]$ $\lambda : \pi \to f$, где $\pi : Y \times D^\tau \to Y$ — проекция; (б) хаусдорфово пространство $X$ называется *диадическим суперпаракомпактным*, если оно диадически отображается на некоторый нульмерный в смысле $\dim$ паракомпакт.

Следующее утверждение очевидно.

**Лемма 1.** *Проекция $pr : X \times B \to X$ произведения $X \times B$ любого пространства $X$ на диадический бикомпакт (в частности, компакт) является диадическим отображением. При этом существующий морфизм $\lambda : \pi \to pr$ совершенен, где $\pi : X \times D^\tau \to X$ — проекция.*

Определение 3 [4]. *Бикомпактным* называется совершенное (т. е. непрерывное, замкнутое и послойно бикомпактное) отображение.

Определение 4 [1, 3]. Ограничение отображения $f : X \to Y$ на (замкнутое, открытое, типа $F_\sigma$, типа $G_\delta$ и т. д., всюду плотное) подмножество пространства $X$ называется (*замкнутым*, *открытым*, *типа* $F_\sigma$, *типа* $G_\delta$ и т. д., *всюду плотным*) *подотображением отображения* $f$.

Для любого фиксированного топологического пространства $Y$ рассматривается категория $\mathrm{Top}_Y$ [5], объектами которой являются непрерывные отображения топологических пространств в пространство $Y$, а для объектов $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ морфизмом $f$ в $g$ считается такое непрерывное отображение $\varphi : X \to Z$, что $f = g \circ \varphi$. Символ $\lambda : f \to g$ есть запись того, что $\lambda$ — морфизм $f$ в $g$. Морфизм $\lambda : f \to g$ называется [1, 3] *инъективным*, *сюръективным*, *биективным*, *замкнутым*, *совершенным*, *открытым*, *вложением*, если соответственно таковым является отображение $\lambda : X \to Z$. Если (a) $[\lambda X] = Z$, (б) $\lambda : X \to Y$ является гомеоморфизмом, то морфизм $\lambda$ будет называться соответственно: (a) плотным, (б) изоморфизмом. Для морфизма $\lambda$ ограничение отображения $\lambda : X \to Z$ на подпространство пространства $X$ называется [1, 3] *подморфизмом морфизма* $\lambda$. Морфизм $\lambda : f \to g$ называется *продолжением морфизма* $\lambda^* : f^* \to g$, если $\lambda^*$ есть подморфизм морфизма $\lambda$ (точнее, если фиксирован изоморфизм отображения $f^*$ и некоторого подотображения отображения $f$).

**Предложение 1** [2]. *Любое диадическое отображение $f : X \to Y$ бикомпактно и открыто. Поэтому при диадическом отображении $f : X \to Y$ образ и прообраз суперпаракомпактны или нет одновременно.*

Доказательство. В силу диадичности отображения $f : X \to Y$ существует сюръективный морфизм $\lambda : \pi \to f$, где $\pi : Y \times D^\tau \to Y$. Поскольку проекция $\pi : Y \times D^\tau \to Y$ бикомпактна и открыта [6], а $\lambda : \pi \to f$ есть сюръективный морфизм, то отображение $f$ бикомпактно (см. [1, утверждение 2.3]) и отображение $f$ является (см. [7, лемма 1.2]) открытым. В силу того, что любое совершенное открытое отображение будет $\Lambda$-отображением [8], образ $Y$ суперпаракомпактного пространства $X$ при диадическом отображении $f : X \to Y$ суперпаракомпактен (см. [8, теорема 6]).

Обратно, если $f : X \to Y$ — диадическое отображение пространства $X$ на суперпаракомпактное пространство $Y$, пространство $X$ является суперпаракомпактным (см. [1, теорема 3]). Предложение доказано.

Поскольку любой нульмерный в смысле dim паракомпакт суперпаракомпактен (см. [1, предложение 2.4 ]), то из предложения 1 и определения 2 вытекают

**Следствие 1.** *Если $f : X \to Y$ есть диадическое отображение пространства $X$ на нульмерный в смысле* dim *паракомпакт, то пространство $X$ суперпаракомпактно.*

**Следствие 2.** *Любое диадическое суперпаракомпактное пространство суперпаракомпактно.*

Пример 1. Любое диадическое отображение $f : X \to Y$ бикомпактно и открыто (см. предложение 1). Отображение $g : A_1 \to Y$ «две стрелки» П. С. Александрова $A_1$ (см. [6]) в одноточечное пространство $Y$ бикомпактно и открыто, но не является диадическим отображением. Действительно, в противном случае существовал бы сюръективный морфизм $\lambda : \pi \to g$, где $\pi : Y \times D^\tau = D^\tau \to A_1$, и бикомпакт $A_1$ был бы диадическим бикомпактом.

Поскольку любое отображение диадического бикомпакта в одноточечное пространство является диадическим, согласно определению 2 имеет место

**Предложение 2.** *Любой диадический бикомпакт является диадическим суперпаракомпактом.*

Пример 2. Пусть пространство $X$ является дискретной суммой бесконечного числа отрезков $I_\alpha$, $\alpha \in A$, т. е. $X = d \cup \{I_\alpha, \alpha \in A, |A| \geq \aleph_0\}$. Тогда пространство $X$ (см. [1, предложение 1.1.S]) суперпаракомпактно и не бикомпактно. Поскольку пространство $X$ локально связно и фактор-пространство локально связного пространства является [6] локально связным, то пространство $X/C$ разбиения на его компоненты дискретно и поэтому суперпаракомпактно и $\dim X/C = 0$ (см. [1, теорема 2.2.S]).

Тогда легко видеть, что естественное фактор-отображение $p$ данного пространства $X$ на пространство $X/C$ разбиения его на компоненты является диадическим. Поэтому согласно определению 2 суперпаракомпакт $X$ — диадический суперпаракомпакт и в силу небикомпактности пространства $X$ оно не будет диадическим бикомпактом.

Оказывается, в классе связных пространств имеет место следующее

**Предложение 3.** *Для связного пространства $X$ следующие утверждения равносильны:* (а) *$X$ — диадический бикомпакт;* (б) *$X$ — диадический суперпаракомпакт.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б) вытекает из предложения 2. Если $X$ — диадический суперпаракомпакт, то по следствиям 2 и 2.4 из [1] пространство $X$ является диадическим континуумом, и поэтому существует диадическое отображение континуума на некоторый нульмерный в смысле dim бикомпакт $Y$. Тогда из нульмерности бикомпакта $Y$ и связности $X$ следует, что $Y$ есть одноточечное пространство. Следовательно, континуум $X$ является диадическим бикомпактом. Предложение доказано.

Пример 3. Стоун-чеховское расширение $\beta R$ числовой прямой $R$ не является диадическим бикомпактом (см. [9, утверждение 3.12.12(д)]). Поскольку числовая прямая $R$ связна, то $\beta R$ является континуумом (см. [9, теорема 6.1.14]) и поэтому суперпаракомпактно, но не диадически суперпаракомпактно. Действительно, в противном случае согласно предложению 3 бикомпакт $\beta R$ являлся бы диадическим бикомпактом.

Определение 5. Отображение $f : X \to Y$ назовем: $(a_1)$ *послойно диадическим*; $(a_2)$ *послойно суслинским*; $(a_3)$ *послойно с первой аксиомой счетности*; $(a_4)$ *послойно метризуемым*, если для любой точки $y \in Y$ каждый слой $f^{-1}y$ (т. е. прообраз $f^{-1}y$) является соответственно: $(A_1)$ диадическим бикомпактом; $(A_2)$ пространством со свойством Суслина; $(A_3)$ пространством с первой аксиомой счетности; $(A_4)$ метризуемым.

**Предложение 4.** *Если $f : X \to Y$ — диадическое отображение, то отображение $f$ является послойно диадическим. Кроме того, если отображение $f$ является еще и послойным с первой аксиомой счетности, то отображение $f$ послойно метризуемо.*

Доказательство. Поскольку отображение $f : X \to Y$ диадическое, то отображение $f$ хаусдорфово и согласно определению 2 существует сюръективный морфизм $\lambda : \pi \to f$, где $\pi : Y \times D^\tau \to Y$ — проекция. Поэтому для любой точки $y \in Y$ слой $f^{-1}y$ есть диадический бикомпакт как непрерывный образ слоя $\pi^{-1}y = D^\tau \times y = D^\tau$. Следовательно, отображение $f$ послойно диадично. При этом если еще отображение $f$ является послойным с первой аксиомой счетности, то каждый слой $f^{-1}y$, $y \in Y$, метризуем (см. [5, теорема 6.29]) и поэтому отображение $f$ послойно метризуемо согласно определению 5. Предложение доказано.

В силу теоремы Марчевского — Шпильрайна (см. [5, терема 6.15]) из предложения 4 вытекает

**Следствие 3.** *Послойно диадическое отображение является послойно Суслинским.*

**Предложение 5.** *Пусть даны отображения $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$ и $\lambda : f \to g$ есть сюръективный морфизм. Если отображение $g$ хаусдорфово и $f$ является диадическим, то диадическим будет и отображение $g$.*

Доказательство. В силу диадичности отображения $f$ существует (см. определение 2) сюръективный морфизм $\mu : \pi \to f$, где $\pi : Y \times D^\tau \to Y$ — проекция.

Поскольку $\mu : \pi \to f$ и $\lambda : f \to g$ — морфизмы, то $\pi = f \circ \mu$, $f = g \circ \lambda$ и $\pi = g \circ \lambda \circ \mu$. Положим $\sigma = \lambda \circ \mu$. Так как $\mu$ и $\lambda$ — сюръективные морфизмы, то отображение $\sigma$ — сюръективный морфизм отображения $\pi : Y \times D^\tau \to Y$ в отображение $g : Z \to Y$, т. е. $\sigma : \pi \to g$.

Следовательно, отображение $g$ является диадическим согласно определению 2. Предложение доказано.

Как известно (см. [5, теорема 22]), всякий бикомпакт веса $\tau$ есть непрерывный образ лежащего в $D^\tau$ нульмерного бикомпакта веса $\tau$. Аналогом этого утверждения является

**Теорема 1.** *Всякий суперпаракомпакт веса $\tau$ является непрерывным образом нульмерного в смысле* dim *суперпаракомпакта веса $\tau$, лежащего в произведении $X_0 \times D^\tau$ нульмерного в смысле* dim *паракомпакта $X_0$ веса $\leq \tau$ на обобщенный канторов дисконтинуум $D^\tau$ веса $\tau$.*

Доказательство. Можем предполагать (см. [1, теорема 3.3.S]), что суперпаракомпакт $X$ веса $\tau$ есть замкнутое подпространство произведения $X_0 \times I^\tau$ нульмерного в смысле dim паракомпакта $X_0$ веса $\leq \tau$ на тихоновский кирпич $I^\tau$. Тихоновский кирпич $I^\tau$ есть непрерывный образ $D^\tau$, т. е. (см. [5, предложение 6.3]) существует сюръективное отображение $\varphi : D^\tau \to I^\tau$. Положим $\psi = \mathrm{id}_{X_0} \times \varphi : X_0 \times D^\tau \to X_0 \times I^\tau$. Отображение $\psi$ совершенно [9] как произведение совершенных отображений $\mathrm{id}_{X_0} : X_0 \to X_0$ и $\varphi : D^\tau \to I^\tau$. Тогда пространство $\psi^{-1}X$ есть суперпаракомпакт (см. [1, теорема 3.1]) и суперпаракомпакт $X$ — непрерывный образ суперпаракомпакта $\psi^{-1}X \subseteq X_0 \times D^\tau$ при совершенном отображении $\psi|_{\psi^{-1}X}$. Произведение $X_0 \times D^\tau$ суперпаракомпактно (см. [10, следствие 1]), и очевидно, что $\dim(X_0 \times D^\tau) = 0$. Тогда в силу монотонности размерности dim по замкнутым подмножествам имеем $\dim(\psi^{-1}X) = 0$, и так как $\omega(X_0 \times D^\tau) = \tau$, то $\omega(\psi^{-1}X) \leq \tau$. С другой стороны, $\omega X \leq \omega\psi^{-1}X$ (см. [6, гл. 6, предложение 41]). Итак, $\omega\psi^{-1}(X) = \tau$. Теорема доказана.

Определение 6 [11]. (а) Для пространства $X$, его подпространства $W$ и множества $B \subset X \backslash W$ (точки $x \in X \backslash W$) будем говорить, что покрытие $\lambda$ пространства $W$ *выкалывает множество* $B$ (*точку* $x$) в $X$, если $B \cap (\bigcup[\lambda]_X) = \varnothing$ ($x \notin \bigcup[\lambda]_X$);

(б) для кардинального числа $\tau \geq \omega$ покрытие $\lambda$ пространства $X$ назовем *$\tau$-покрытием*, если $|\lambda| \leq \tau$.

Определение 7 [1]. Тихоновское пространство $X$ называется: (а) ($\tau$-) П-*полным*, если для любой точки $x \in \beta X \backslash X$ существует такое ($\tau$-) конечнокомпонентное покрытие пространства $X$, выкалывающее точку $x$ в $\beta X$; (б) *слабо* ($\tau$-)

П-*полным*, если для любой точки $x \in \beta X \backslash X$ существует открыто-замкнутое $\tau$-покрытие пространства $X$, выкалывающее точку $x$ в $\beta X$.

Определение 8. Пространство $X$ называется $(A_1)$ $K$-*компонентным*, $(A_2)$ *пространством класса* $K$ [1], если соответственно выполняются следующие условия:

$(a_1)$ все компоненты пространства $X$ бикомпактны;

$(a_2)$ $X$ является $K$-компонентным, и в любой окрестности каждой компоненты содержится ее открыто-замкнутая окрестность.

Поскольку в любом вполне несвязном пространстве $X$ компоненты его тривиальны, т. е. все они одноточечны, согласно определению 8 имеем

**Предложение 6.** *Любое вполне несвязное пространство* $X$ *класса* $K$ *является индуктивно нульмерным* $T_1$-*пространством* (*следовательно, тихоновским*).

Пример 4. Любое индуктивно нульмерное $T_0$-пространство является пространством класса $K$, а любое вполне несвязное пространство $K$-компонентно. Поскольку пример $X_0$ — «Веер Кнастера и Куратовского» (см. [9]) — является одномерным вполне несвязным метрическим пространством, то пространство $X_0$ $K$-компонентно и не является пространством класса $K$ согласно предложению 6. Очевидно, что связное двоеточие — пространство класса $K$ и в силу его нетихоновости оно не слабо П-полное пространство.

**Теорема 2.** *Для локально бикомпактного хаусдорфова пространства* $X$ *следующие условия равносильны:*

(а) $X$ *является пространством класса* $K$;

(б) $X$ $K$-*компонентно.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б) очевидно.

Пусть пространство $X$ является $K$-компонентным и $C$ — какая-нибудь его компонента, а $W$ — ее произвольная окрестность.

Поскольку $X$ — локально бикомпактное хаусдорфово пространство и компонента $C$ бикомпактна, существует (см. [12, § 15, предложение G]) такая открыто-замкнутая в $X$ окрестность $O$, что $C \subset O \subset W$. Поэтому $X$ является пространством класса $K$, и теорема доказана.

Определение 9 [2]. Топологическую группу $G$, пространство которой $(a_1)$ $K$-компонентно; $(a_2)$ класса $K$ [1]; $(a_3)$ слабо П-полно; $(a_4)$ П-полно; $(a_5)$ суперпаракомпактно, назовем соответственно $(A_1)$ $K$-*компонентной*; $(A_2)$ *группой класса* $K$; $(A_3)$ *слабо* П-*полной*; $(A_4)$ П-*полной*; $(A_5)$ суперпаракомпактной.

Из теоремы 2.1.СП в [1], леммы 1.1.П в [1] и примера 4 следует, что любая суперпаракомпактная отделимая группа П-полная, любая П-полная группа слабо П-полная, любая слабо П-полная группа является группой класса $K$ и, наконец, любая группа класса $K$ будет $K$-компонентной. Обратное, вообще говоря, неверно (см. пример 4).

**Теорема 3.** *Для сильно паракомпактной отделимой группы* $G$ *следующие утверждения равносильны:* (а) $G$ *есть группа класса* $K$; (б) $G$ *суперпаракомпактно;* (в) *компонента* $C$ *единицы группы* $G$ *бикомпактна, а фактор-группа* $G/C$ *суперпаракомпактна и нульмерна в смысле* dim; *при этом пространство группы* $G$ *гомеоморфно топологическому произведению* $C \times G/C$ *компоненты* $C$ *на пространство группы* $G/C$.

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Если сильно паракомпактная отделимая группа $G$ является группой класса $K$, то группа $G$ суперпаракомпактна (см. [10, теорема 5]).

(б)⇒(в). Если группа $G$ суперпаракомпактна, то фактор-группа $G/C$ есть отделимая суперпаракомпактная группа и $\dim G/C = 0$ (см. [1, теорема 2.2.S]). Тогда очевидно, что и $\operatorname{ind} G/C = 0$.

Поскольку группа $G$ сильно паракомпактна, компонента $C$ единицы группы $G$ бикомпактна и $\operatorname{ind} G/C = 0$, то пространство группы $G$ гомеоморфно (см. [13, следствие 5]) топологическому произведению $C \times G/C$ компоненты $C$ на фактор-пространство $G/C$.

(в)⇒(а). Если компонента $C$ единицы группы $G$ бикомпактна, а фактор-группа $G/C$ суперпаракомпактна, то топологическое произведение $C \times G/C$ пространств группы $C$ и $G/C$ суперпаракомпактно (см. [10, следствие 1]). Поэтому и пространство группы $G$ суперпаракомпактно, следовательно, группа $G$ суперпаракомпактна согласно определению 9. Тогда группа $G$ является группой класса $K$ (см. [1, теорема 2.1.СП, следствие 1.2]). Теорема доказана.

Теорема 3 является аналогом теоремы Мостерта [14] о том, что пространство локально бикомпактной топологической группы $G$ гомеоморфно топологическому произведению ее компоненты $C$ на фактор-пространство $G/C$.

Поскольку пространство любой локально бикомпактной топологической группы сильно паракомпактно [15], из теоремы 3 вытекают

**Следствие 4.** (а) *Локально бикомпактная отделимая группа $G$ суперпаракомпактна тогда и только тогда, когда $G$ является $K$-компонентной;*

(б) *локально связная группа $G$ суперпаракомпактна тогда и только тогда, когда группа $G$ является $K$-компонентной.*

**Следствие 5.** *Локально связная отделимая $K$-компонентная* (*в частности, суперпаракомпактная*) *группа $G$ конечной размерности есть группа Ли.*

Доказательство. В силу локальной связности и $K$-компонентности группы $G$ компонента $C$ единицы группы $G$ открыта и бикомпактна и поэтому группа $G$ локально бикомпактна.

Поскольку группа $G$ локально связна, локально бикомпактна и конечномерна, то известно (см. [13]), что $G$ есть группа Ли. Следствие доказано.

Следствие 5 является обобщением соответствующего утверждения для бикомпактных топологических групп [12].

**Теорема 4** [2]. *Если $G$ — локально бикомпактная отделимая $K$-компонентная* (*в частности, суперпаракомпактная*) *группа, то в любой окрестности компоненты $C$ единицы группы $G$ содержится открытая бикомпактная подгруппа группы $G$.*

Доказательство. По теореме 2 $G$ — группа класса $K$ и естественное отображение $p : G \to G/C$ совершенно [13] и является [12] открытым гомеоморфным отображением топологической группы $G$ на фактор-группу $G/C$. При этом фактор-группа $G/C$ локально бикомпактна и очевидно, что $\operatorname{ind} G/C = 0$. Пусть $O$ — произвольная окрестность компоненты $C$ единицы группы $G$. В силу замкнутости отображения $p$ у единицы $e$ группы $G/C$ существует (см. [12, теорема 16]) такая открытая бикомпактная подгруппа $H$ группы $G/C$, что $p^{-1}H \subseteq O$. Известно [12], что множество $p^{-1}H$ есть открытая подгруппа группы $G$. Ясно, что $C \subseteq p^{-1}H \subseteq O$. Бикомпактность подгруппы $p^{-1}H$ вытекает из совершенности отображения $p$. Теорема доказана.

Отметим, что данная теорема является обобщением соответствующего утверждения для вполне несвязных локально бикомпактных топологических групп [12].

Определение 10. Топологическую группу $G$ назовем *диадической*, если ее пространство является диадическим суперпаракомпактом.

**Теорема 5** [2]. *Любая суперпаракомпактная группа $G$-диадически суперпаракомпактна.*

Доказательство. Поскольку группа $G$ суперпаракомпактна, по теореме 3 компонента $C$ группы $G$ бикомпактна и пространство группы $G$ гомеоморфно топологическому произведению $G \times G/C$ пространства своей компоненты $C$ на фактор-пространство $G/C$ группы $G$. Согласно теореме Л. Н. Ивановского [16] и В. И. Кузьминова [17] группа $C$ диадична, поэтому $C$ является образом $D^\tau$ при некотором непрерывном отображении $\varphi$.

Тогда сюръективное отображение

$$g = \varphi \times \mathrm{id} : D^\tau \times G/C \to C \times G/C$$

как произведение непрерывных отображений $\varphi : D^\tau \to C$ и $\mathrm{id}_{G/C} : G/C \to G/C$ непрерывно и является сюръективным морфизмом отображения $\pi : D^\tau \times G/C \to G/C$ на естественное отображение $p : C \times G/C \to G/C$. Поэтому естественное отображение $p$ диадично. Так как фактор-пространство $G/C$ согласно теореме 3 есть нульмерный в смысле $\dim$ суперпаракомпакт, согласно определениям 2 и 10 суперпаракомпактная группа является диадической. Теорема доказана.

Из данной теоремы в силу [10, теорема 5] вытекают

**Следствие 6.** *Сильно паракомпактная или финально компактная группа $G$ диадически суперпаракомпактна тогда и только тогда, когда группа $G$ является $K$ компонентной.*

**Следствие 7.** *Локально бикомпактная (локально связная) группа $G$ диадически суперпаракомпактна тогда и только тогда, когда группа $G$ является $K$-компонентной.*

**Теорема 6.** *Пространство полно метризуемой не локально бикомпактной суперпаракомпактной группы $G$ веса $\tau$ гомеоморфно топологическому произведению $B(\tau)\times K$ бэровского пространства $B(\tau)$ веса $\tau$ на компакт $K$, являющийся пространством компоненты единицы группы $G$.*

Доказательство. По теореме 3 пространство группы $G$ гомеоморфно топологическому произведению $C \times G/C$ компоненты $C$ единицы группы $G$ на фактор-пространство группы $G/C$ и $\dim G/C = 0$. Поскольку произведение $C \times G/C$ не локально бикомпактно, пространство $G/C$ не локально бикомпактно и $\omega(G/C) \geq \aleph_0$. Так как

$$\omega(K \times G/C) = \max\{\omega(K); \omega(G/C)\} \quad \text{и} \quad \omega(G/C) \geq \omega(K),$$

имеем $\omega(G/C) = \tau$. В силу того, что пространство группы $G/C$ полно метризуемо и не локально бикомпактно, оно гомеоморфно [6, 9] бэровскому пространству $B(\tau)$ веса $\tau$. Теорема доказана.

**Теорема 7.** *Пространство $n$-мерной метризуемой абелевой суперпаракомпактной группы $G$ веса $\leq \tau$ вкладывается в произведение $B(\tau)\times R^{n+2}$ бэровского пространства $B(\tau)$ веса $\tau$ и $(n+2)$-мерного евклидова пространства $R^{n+2}$.*

Доказательство. По теореме 3 пространство группы $G$ гомеоморфно топологическому произведению $C\times G/C$ компоненты единицы группы $G$ на фактор-пространство $G/C$ и $\dim G/C = 0$. Пространство $G/C$ метризуемо (см. [8, предложение 1]), $\dim G/C = 0$, и $\omega(G/C) \leq \tau$. Тогда существует (см. [9, теорема 7.3.15]) вложение $f$ пространства $G/C$ в бэровское пространство $B(\tau)$ веса $\tau$.

Так как $\dim(K\times G/C) \leq \dim K + \dim G/C$ [18] и $\dim G/C = 0$, то $\dim K = n$. Следовательно, по теореме М. Богнара [19] существует вложение $g$ пространства $K$ в $(n+2)$-мерное евклидово пространство $R^{n+2}$. Простое произведение $f\times g$ вложений $f$ и $g$ есть [9] вложение произведения $G/C\times K$ в произведение $B(\tau)\times R^{n+2}$. Теорема доказана.

Теорема 7 аналогична теореме М. Богнара о вложимости $n$-мерной локально компактной топологической абелевой группы со счетной базой в $(n+2)$-мерное евклидово пространство $R^{n+2}$.

Из теоремы 7 и предложения 5.1 в [1] вытекает

**Следствие 8.** *Пространство $n$-мерной полной метризуемой абелевой суперпаракомпактной группы $G$ веса $\leq \tau$ замкнуто вкладывается в произведение $B(\tau)\times R^{n+2}$ бэровского пространства $B(\tau)$ веса $\tau$ на $(n+2)$-мерное евклидово пространство $R^{n+2}$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Мусаев Д. К., Пасынков Б. А.* О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. Ташкент: Фан, 1994.
2. *Мусаев Д. К.* Диадические отображения и аналог теоремы В. И. Кузьминова и Л. Н. Ивановского о диадичности пространства бикомпактной топологической группы для суперпаракомпактных групп // Тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент, 16–19 ноября 2004 г. Т. 2. С. 198–200.
3. *Пасынков Б. А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 72–102.
4. *Вайнштейн И. А.* О замкнутых отображениях метрических пространств // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 4. С. 319–321.
5. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
7. *Пасынков Б. А.* Частичные топологические произведения // Тр. Моск. мат. об-ва. 1965. Т. 13. С. 136–245.
8. *Мусаев Д. К.* Характеризации суперпаракомпактных пространств и их $\Lambda$-отображения // Докл. АН УзССР. 1983. № 6. С. 7–8.
9. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
10. *Мусаев Д. К.* О суперпаракомпактных пространствах // Докл. АН УзССР. 1983. № 2. С. 5–6.
11. *Мусаев Д. К.* О характеризации полных отображений посредством морфизмов в нульмерные // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 72–97.
12. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
13. *Пасынков Б. А.* О топологических группах // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 2. С. 286–289.
14. *Mostert P. S.* Sections in principal fibre spaces // Duke Math. J. 1956. V. 23, N 1. P. 57–71.
15. *Архангельский А. В.* О совпадении размерности $\operatorname{ind} G$ и $\dim G$ для локально бикомпактных групп // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 980–981.

**16.** *Ивановский Л. Н.* Диадичность бикомпактных фактор-пространств локально бикомпактных групп // Тез. докл. Всесоюз. топологической конф., 1959. Тбилиси. С. 22–28.

**17.** *Кузьминов В. И.* О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 4. С. 727–729.

**18.** *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.

**19.** *Богнар М.* Вложение локально компактных топологических абелевых групп в евклидово пространство // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 133–136.

*Статья поступила 17 января 2005 г.*

*Мусаев Давлатали Кахарович*
*Институт Математики АН РУз,*
*ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700125, Узбекистан*
`mathinst@uzsci.net`