Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 514.764.22

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЭЛЕРОВЫ МЕТРИКИ НА ЛИНЕЙНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ РАССЛОЕНИЯХ И ГЕОМЕТРИЯ $K3$–ПОВЕРХНОСТЕЙ

Я. В. Базайкин

Аннотация: Построены метрики с группой голономии $SU(2)$ на касательных расслоениях к взвешенным комплексным прямым. Дано геометрическое описание окрестности пространства модулей специальных кэлеровых метрик на $K3$-поверхности.

Ключевые слова: специальные кэлеровы многообразия, $K3$-поверхность.

§ 1. Введение

В работе мы продолжаем изучение Риччи-плоских римановых метрик, построенных в [1]. При более детальном исследовании выяснилось, что они обладают рядом замечательных свойств и, в частности, имеют группу голономии $SU(2)$, т. е. являются специальными кэлеровыми.

Интерес к метрикам голономии $SU(2)$ обусловлен их применениями в математической физике. В теории суперструн и M-теории возникают компактные многообразия со специальными группами голономий. При этом если допустить наличие физически изолированных особенностей, то достаточно изучать асимптотически плоские метрики на нормальных расслоениях к этим особенностям. Таким образом, мы приходим к проблеме изучения асимптотически локально евклидовых метрик со специальными голономиями на расслоениях над орбифолдами.

Один из самых известных примеров специальных кэлеровых метрик — метрика Эгучи — Хансона [2] на кокасательном расслоении T^*S^2 к стандартной двумерной сфере (без особенностей). Метрика Эгучи — Хансона сыграла заметную роль в изучении специальных групп голономий. А именно, Пейдж [3] предложил описание пространства специальных кэлеровых метрик на $K3$-поверхности, в котором метрика Эгучи — Хансона выполняет функцию «элементарного кирпичика». Более точно, представим $K3$-поверхность при помощи конструкции Куммера, т. е. рассмотрим инволюцию плоского тора T^4, возникающую из центральной симметрии евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. После факторизации получаем орбифолд с 16 особыми точками, окрестности которых устроены как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Выполнив раздутие полученного орбифолда в окрестности каждой особой точки, получаем $K3$-поверхность. Топологически конструкция раздутия особой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403) и программы фундаментальных исследований РАН «Математические методы в нелинейной динамике» и гранта Минобразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 8311).

точки вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ устроена так: надо выколоть особенность и отождествить ее окрестность с пространством шарового расслоения в T^*S^2 без нулевого слоя S^2. Пейдж предложил рассмотреть на T^*S^2 метрику, гомотетичную метрике Эгучи — Хансона с достаточно малым коэффициентом гомотетии, так что на границе приклеиваемого шарового расслоения метрика становится сколь угодно близкой к плоской. После этого надо слегка деформировать метрику на торе так, чтобы получить гладкую метрику на $K3$-поверхности с голономией $SU(2)$. Простой подсчет степеней свободы при выполнении этой операции показывает, что таким образом получается 58-мерное семейство метрик, что совпадает с известными результатами о размерности пространства модулей таких метрик [4]. Позже идея Пейджа была использована Джойсом [5, 6] для построения первых компактных примеров многообразий с экзотическими группами голономий G_2 и $\mathrm{Spin}(7)$.

Двумерную сферу S^2 можно отождествлять с комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Рассмотрим ее естественное обобщение $\mathbb{C}P^1(k,l)$ — взвешенную комплексную прямую, являющуюся комплексным орбифолдом с двумя особыми точками. В предлагаемой работе получен следующий результат.

Теорема. *На кокасательном расслоении $M_{k,l} = T^*\mathbb{C}P^1(k,l)$ к взвешенной комплексной прямой существует метрика с группой голономии $SU(2)$.*

Эта метрика была найдена в специальной системе координат в [1] как решение уравнения нулевой кривизны Риччи на торических расслоениях над двумерными поверхностями. Там же доказано, что метрика имеет группу изометрий $U(1) \times U(1)$ и коогнородность два, кроме случая $k = l = 1$. При $k = l = 1$ наша метрика совпадает с метрикой Эгучи — Хансона.

Асимптотически построенные метрики ведут себя следующим образом. На бесконечности метрика стремится к евклидовой метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$, а в окрестности каждой из двух особых точек — к евклидовым метрикам на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$ соответственно. Поэтому, имея в виду идею Пейджа, мы предлагаем использовать метрики на $M_{k,l}$ для раздутия особенностей вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$ на орбифолдах с голономией $SU(2)$ в несколько шагов: последовательно заменяем каждую особенность двумя меньшего порядка, приклеивая пространство $M_{k,l}$ с построенной метрикой; в итоге можно надеяться «убрать» все особые точки.

В качестве приложения мы рассматриваем представление $K3$-поверхности как раздутие особенностей орбифолда $T^4/\mathbb{Z}_p$ при простом $p \neq 2$. Оказывается, что единственный возможный случай — это $p = 3$, где надо раздуть 9 особых точек вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$. Это делается в два шага: сначала при помощи $M_{1,2}$ получаем 9 особых точек вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ и затем убираем их при помощи $M_{1,1} = T^*S^2$. Каждый раз мы слегка деформируем метрику на «сшитом» пространстве и в итоге получаем $K3$-поверхность с семейством метрик голономии $SU(2)$. Простой подсчет показывает, что размерность полученного семейства равна 58 — ожидаемый результат. Однако описанные метрики на $K3$-поверхности существенно отличаются от семейства, построенного Пейджем: фактически мы даем асимптотическое описание пространства модулей метрик с голономией $SU(2)$ в окрестности плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_3$, в то время как Пейдж дал асимптотическое описание этого же пространства в окрестности плоской метрики на $T^4/\mathbb{Z}_2$. Для строгого обоснования нашей конструкции устанавливаем связь построенных метрик с мультиинстантонами [7, 8] — наши метрики являются предельным случаем мультиинстантона, отвечающего двум источникам с различными «массами».

В следующем параграфе рассматриваются взвешенные комплексные проективные пространства, описываются структура $M_{k,l}$ и метрика на нем. В § 3, 4 обсуждаются приложения к геометрии $K3$-поверхностей.

Автор признателен И. А. Тайманову за полезные обсуждения.

§ 2. Специальная кэлерова структура на $M_{k,l}$

Пусть $\mathbf{k} = (k_0, k_1, \dots, k_n)$ — набор взаимно простых целых положительных чисел. Рассмотрим действие $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ на $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ с весами $k_0, \dots, k_n$:

$$\lambda \in \mathbb{C}^* : (z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_0\lambda^{k_0}, z_1\lambda^{k_1}, \dots, z_n\lambda^{k_n}).$$

Множество орбит этого действия $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ обладает структурой комплексного орбифолда и называется *взвешенным комплексным проективным пространством.* Орбиту точки $(z_0, \dots, z_n)$ будем обозначать как $[z_0 : \dots : z_n]$. Структура особенностей орбифолда $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ может быть довольно сложна и, вообще говоря, зависит от свойств взаимной делимости различных наборов чисел из $k_0, \dots, k_n$. В случае, когда каждая пара чисел k_i, k_j взаимно проста (именно такой случай интересует нас), ситуация несколько упрощается и $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ обладает лишь дискретным набором изолированных особенностей $[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : \dots : 0], \dots, [0 : 0 : \dots : 1]$, вне которых является комплексным аналитическим многообразием. В качестве униформизующего атласа надо рассмотреть набор карт:

$$\phi_i(z_1, \dots, z_n) = [z_1 : \dots : z_i : 1 : z_{i+1} : \dots : z_n], \quad i = 0, \dots, n.$$

При этом для каждой карты униформизующей группой будет группа $\Gamma_i = \mathbb{Z}_{k_i}$, порожденная элементом $\omega_i = e^{\frac{2\pi i}{k_i}}$, действие которого задается следующим образом:

$$\omega_i(z_1, \dots, z_n) = \big(z_1\omega_i^{k_0}, \dots, z_i\omega_i^{k_{i-1}}, z_{i+1}\omega_i^{k_{i+1}}, \dots, z_n\omega_i^{k_n}\big).$$

Нам потребуется обобщение рассмотренной конструкции. Предположим, что у нас есть наборы $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_n)$, $\mathbf{l} = (l_0, \dots, l_m)$ попарно взаимно простых целых чисел, причем $k_i > 0$, $l_j < 0$. Формально, как и ранее, мы можем рассмотреть действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n+m+2}\backslash\{0\}$ с весами $k_0, \dots, k_n, l_0, \dots, l_m$. При этом в качестве пространства орбит $\mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbb{C}^{n+m+2}\backslash\{0\})/\mathbb{C}^*$ мы получим топологическое пространство, обладающее униформизующим атласом, который задается набором карт ϕ_i, ψ_j, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, определенных так же, как и выше. Однако полученное пространство орбит не обладает свойством хаусдорфовости: особые точки, соответствующие положительным весам, не отделены от особых точек, отвечающих весам отрицательным. Более точно, рассмотрим очевидное вложение $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \times \{0\}$ и $\mathbb{C}^{m+1} = \{0\} \times \mathbb{C}^{m+1}$ в $\mathbb{C}^{n+m+2} = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1}$. При переходе к пространству орбит получаем два орбифолда $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ и $\mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$, естественно вложенных в $\mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и покрывающих вместе все особые точки. Очевидно, что $\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ не отделимо от $\mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$ в фактор-топологии пространства орбит. Поэтому определим два взвешенных комплексных проективных пространства:

$$\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\backslash\mathbb{C}P^m(\mathbf{l}),$$

$$\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \mathbb{C}P^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})\backslash\mathbb{C}P^n(\mathbf{k}).$$

Ясно, что $\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ и $\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ являются некомпактными орбифолдами с униформизующими атласами, заданными наборами карт ϕ_i, $i = 0, \dots, n$, и

ψ_j, $j = 0, \dots, m$, соответственно. Заметим, что имеется очевидный изоморфизм комплексных многообразий $\mathbb{C}P_+^{n+m+1}(\mathbf{k},\mathbf{l})\backslash\mathbb{C}P^n(\mathbf{k})$ и $\mathbb{C}P_-^{n+m+1}(\mathbf{k},\mathbf{l})\backslash\mathbb{C}P^m(\mathbf{l})$, индуцированный тождественным преобразованием пространства $\mathbb{C}^{n+m+2}$.

Перейдем к описанию нужных нам пространств. Рассмотрим пару k, l взаимно простых положительных чисел. Мы получаем взвешенную комплексную проективную прямую $S^2(k,l) = \mathbb{C}P^1(k,l)$. В качестве униформизующего атласа на $S^2(k,l)$ выступают две карты ϕ_0, ϕ_1, задающие координаты $z \in \mathbb{C}$ и $w \in \mathbb{C}$:

$$\phi_0(z) = [1 : z], \quad \phi_1(w) = [w : 1].$$

Координаты связаны соотношением $z^k w^l = 1$. Таким образом, $S^2(k,l)$ имеет две особые точки $z = 0$ и $w = 0$ с униформизующими группами $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$ соответственно. Вне особых точек $S^2(k,l)$ обладает структурой комплексного многообразия, а топологически представляет собой двумерную сферу.

Рассмотрим теперь кокасательное расслоение $M_{k,l} = T^*S^2(k,l)$ и изучим его структуру. В касательном расслоении $T(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ естественно выделяется подрасслоение, состоящее из вертикальных касательных векторов относительно действия $\mathbb{C}^*$ (вертикальными называются векторы, касательные к орбитам действия). В кокасательном расслоении $T^*(\mathbb{C}^2\backslash\{0\}) = \Lambda^{1,0}\mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ рассмотрим подрасслоение E, состоящее из тех ковекторов, которые обращаются в нуль на вертикальных векторах. Нетрудно понять, что

$$E = \{(z_0(lz_2dz_1 - kz_1dz_2), z_1, z_2) \mid z_0 \in \mathbb{C}, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}\}.$$

Тогда действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ индуцирует действие $\mathbb{C}^*$ на E, которое устроено следующим образом:

$$\lambda \in \mathbb{C}^* : (z_0, z_1, z_2) \mapsto (z_0\lambda^{k+l}, z_1\lambda^{-k}, z_2\lambda^{-l}).$$

Поскольку фактор-пространство E по действию $\mathbb{C}^*$ очевидным образом совпадает с $T^*S^2(k,l)$, мы тем самым получили, что $M_{k,l}$ можно отождествить с $\mathbb{C}P_-^2(k+l, -k, -l)$. Прямая $S^2(k,l)$ при этом вложена в $M_{k,l}$ как комплексное подмногообразие с особенностями $\{z_0 = 0\}$.

Таким образом, $M_{k,l}$ является комплексным орбифолдом с двумя особыми точками и униформизующими группами $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$ в этих точках. В частности, если одно из чисел k, l равно единице, то особенность только одна, а если $k = l = 1$, то мы получаем кокасательное расслоение над стандартной двумерной сферой без особенностей. Рассмотрим две карты с локальными координатами $(z, \alpha) \in \mathbb{C}^2$ и $(w, \beta) \in \mathbb{C}^2$, задающие атлас на $M_{k,l}$:

$$\psi_1(\alpha, z) = [\alpha : 1 : z], \quad \psi_2(\beta, w) = [\beta : w : 1].$$

Системы координат связаны соотношениями $z^k w^l = 1$, $\alpha z = \beta w$. При этом униформизующие группы $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_l$, действующие в каждой системе координат, будут представлены в группе $SU(2)$, стандартно действующей на $\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{Z}_k = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \mid \omega \in \mathbb{C},\ \omega^k = 1 \right\},$$

$$\mathbb{Z}_l = \left\{ \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \mid \omega \in \mathbb{C},\ \omega^l = 1 \right\}.$$

Прямая $S^2(k,l)$ вложена в $M_{k,l}$ как комплексное подмногообразие (с особенностями) $\{\alpha = \beta = 0\}$.

В дальнейшем нам понадобится аналитическая структура $M_{k,l}$ на бесконечности. Поэтому рассмотрим изоморфизм комплексных многообразий

$$\begin{gathered}\tau_{k,l} : (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l})\backslash\{0\} = \mathbb{C}P^2_+(k+l,-k,-l)\backslash\{[1:0:0]\} \to M_{k,l}\backslash S^2(k,l),\\ \tau_{k,l}[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : z_1 : z_2].\end{gathered} \tag{1}$$

Нетрудно убедиться в том, что $\tau_{k,l}$ «вклеивает» вместо нуля в $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ прямую $S^2(k,l)$. При этом различные орбиты действия $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, «пересекающиеся» в точке $0 \in \mathbb{C}^2$, уже не будут пересекаться в $M_{k,l}$ — аналог операции раздутия.

В работе [1] были построены Риччи-плоские метрики на $M_{k,l}$ с использованием специальных координат ρ, θ, ϕ, ψ. Орбифолд $M_{k,l}$ возникал как цилиндр расслоения линзового пространства $L(-1, k+l)$ над $S^2(k,l)$. При этом (θ, ϕ, ψ) были координатами в $L(-1, k+l)$, а ρ — координата вдоль образующей цилиндра. Метрики выглядели следующим образом:

$$\begin{aligned}ds^2 = (\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta)(d\rho^2 + d\theta^2) + \frac{\operatorname{sh}^2\rho}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}(d\psi + \cos\theta d\phi)^2\\ + \frac{\sin^2\theta}{\operatorname{ch}\rho - a\cos\theta}(ad\psi + \operatorname{ch}\rho d\phi)^2,\end{aligned} \tag{2}$$

где $a = \frac{l-k}{l+k}$. При $k = l = 1$ (т. е. при $a = 0$) метрика (2) совпадает с метрикой Эгучи — Хансона коодноростности один. При $a \neq 0$ мы получаем новые метрики коодноростности два.

Легко заметить, что пространство $L(-1, k+l)$ является сферическим подрасслоением в $T^*S^2(k,l) = M_{k,l}$ над $S^2(k,l)$. Это позволяет установить связь между координатами $(\theta, \rho, \psi, \phi)$ и (z, α) или (w, β). А именно, рассмотрим следующую замену координат:

$$z = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{l/k}} e^{-il(a\psi+\phi)}, \quad \alpha = kl \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{1+\frac{l}{k}} e^{il(\psi+\phi)},$$

$$w = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{k/l}} e^{ik(a\psi+\phi)}, \quad \beta = kl \operatorname{sh}\frac{\rho}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{1+\frac{k}{l}} e^{ik(\psi-\phi)}.$$

Метрика ds^2 после такой замены становится гладкой в каждой из двух карт (точные выражения для метрики в переменных (z, α) и (w, β) достаточно громоздки, и мы их здесь не приводим).

Напомним, что риманова метрика на двумерном комплексном многообразии (орбифолде) называется *специальной кэлеровой*, если ее группа голономии лежит в группе $SU(2)$, стандартно представленной в касательном пространстве. Одним из основных результатов статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пространство $M_{k,l}$ с метрикой* (2) *является специальным кэлеровым орбифолдом.*

Доказательство. Предъявим кэлерову форму ω, согласованную с метрикой (2):

$$\omega = \operatorname{sh}\rho\, d\rho \wedge d\psi - a\sin\theta\, d\theta \wedge d\psi + \operatorname{sh}\rho\cos\theta\, d\rho \wedge d\phi - \operatorname{ch}\rho\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что эта форма гладкая вне особых точек и замкнута (а следовательно, параллельна). Отсюда немедленно можно заключить, что $M_{k,l}$ является кэлеровым многообразием и группа голономии лежит в $U(2)$. Далее, известный в дифференциальной геометрии результат (см., например, [9]) гласит, что гладкая кэлерова метрика с нулевой кривизной Риччи на односвязном многообразии является специальной кэлеровой, т. е. ее группа голономии лежит в $SU(2)$. Этот результат носит локальный характер, поэтому применительно к нашему случаю можно сделать вывод, что параллельный перенос вдоль маленьких петель вдали от пары особых точек попадает в $SU(2)$. В перенос «вокруг» особой точки дает вклад кроме всего прочего униформизующая группа орбифолда. Однако элементы униформизующих групп тоже лежат в $SU(2)$, поэтому группа голономии $M_{k,l}$ совпадает с $SU(2)$.

Теорема доказана.

§ 3. Приложения к геометрии $K3$-поверхностей

Конструкция Куммера. Напомним построение $K3$-поверхности при помощи конструкции Куммера. Рассмотрим комплексный двумерный тор $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$, где $\Lambda = \{(a+ib, c+id) \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$ — решетка в $\mathbb{C}^2$. Определим инволюцию $\sigma : T^4 \to T^4$ как

$$\sigma : (z_1, z_2) + \Lambda \mapsto (-z_1, -z_2) + \Lambda.$$

Инволюция σ имеет 16 неподвижных точек, а именно точки (z_1, z_2) при $z_i \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$. Если на T^4 рассмотреть плоскую метрику, то σ становится изометрией и $X = T^4/\sigma$ представляет собой специальный кэлеров орбифолд с 16 особыми точками. Окрестность каждой точки при этом устроена как $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$. Теперь рассмотрим комплексную поверхность Y, получаемую раздутием каждой из 16 особых точек — это и есть $K3$-поверхность.

Конструкцию раздутия можно представить следующим образом. Пусть $u = (u_1, u_2)$ — евклидовы координаты в $\mathbb{C}^2$; рассмотрим шаровую окрестность $\Delta = \{|u|^2 \leq \varepsilon\}/\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, в которой будет происходить раздутие. Теперь рассмотрим $M_{1,1} = T^*S^2$ и отображение $\tau_{1,1} : \mathbb{C}^2\backslash\{0\} \to M_{1,1}\backslash S^2$, построенные в (1). Отображение $\tau_{1,1}$ индуцирует комплексный изоморфизм открытого подмногообразия $\Delta\backslash\{0\}$ и открытого подмногообразия в $M_{1,1}\backslash S^2$. Выкалывая точку $0 \in \Delta$ и производя отождествление по указанному изоморфизму, получаем комплексное многообразие без особой точки.

Конструкция Пейджа. Известно [4], что Y обладает 58-мерным семейством $\mathscr{S}$ метрик с голономией $SU(2)$. Пейдж в работе [3] предложил геометрическое описание пространства модулей метрик с голономией $SU(2)$. Опишем вкратце его подход. Рассматривая всевозможные плоские метрики на T^4, получаем семейство $\mathscr{S}_2$ метрик голономии $SU(2)$ на орбифолде X. Окрестности 16 особых точек X изометричны окрестности нуля в $\mathbb{C}/\{\pm 1\}$. Для каждой особой точки вырежем ее окрестность $(0, \varepsilon_1) \times S^3/\{\pm 1\}$. Тогда «воротник» края $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times S^3/\{\pm 1\}$ «почти» изометричен открытому шаровому слою $M_{1,1}$ с метрикой, гомотетичной метрике Эгучи — Хансона, с коэффициентом гомотетии t. Уменьшая t, мы можем сделать метрики сколь угодно близкими на воротнике, причем обе метрики имеют голономию $SU(2)$. Далее, используя аналитический аппарат, можно показать, что если окрестность достаточно мала, то деформация обеих метрик дает гладкую метрику на Y с голономией $SU(2)$. Строгое обоснование этой конструкции было дано позже в работах [10, 11, 5].

Такой взгляд на пространство модулей $K3$-поверхности дает геометрически прозрачное истолкование размерности 58. Действительно, пространство $\mathscr{S}_2$ десятимерно. Далее, в окрестности каждой особой точки метрики из $\mathscr{S}_2$ обладают на $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \times S^3/\{\pm 1\}$ группой изометрии $SO(4)$. Подгруппа $U(2) \subset SO(4)$ оставляет метрику Эгучи — Хансона инвариантной. Это дает нам семейство метрик размерности $\dim(SO(4)/U(2)) = 2$. Если учесть параметр t, мы получаем трехмерное семейство различных метрик в окрестности каждой особой точки. Итак, учтя все особые точки, приходим к тому, что размерность всего построенного семейства равна $10 + 16 \cdot 3 = 58$. Фактически Пейдж предложил геометрическое описание пространства модулей $\mathscr{S}$ метрик голономии $SU(2)$ на Y в окрестности предельного семейства $\mathscr{S}_2$.

Разрешение особенностей типа $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ при помощи $M_{k,l}$. Мы предлагаем смотреть на $M_{k,l}$ как на пространство, позволяющее разрешить особенности высокого порядка, сводя их к особенностям меньшего порядка. Более точно, рассмотрим особую точку некоторого комплексного многообразия, в окрестности которой многообразие устроено как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$. Пусть $u = (u_1, u_2)$ — евклидовы координаты в $\mathbb{C}^2$ и $\Delta = \{|u|^2 \leq \varepsilon\}/\mathbb{Z}_{k+l}$ — окрестность многообразия, в которой происходит раздутие. Далее, рассмотрим $M_{k,l}$ и определенное в (1) отображение $\tau_{k,l} : (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}) \backslash \{0\} \to M_{k,l} \backslash S^2(k,l)$. Это отображение индуцирует комплексный изоморфизм многообразия $\Delta \backslash \{0\}$ и открытого подмногообразия в $M_{k,l} \backslash S^2(k,l)$. Удалив особую точку $0 \in \Delta$ и произведя отождествление по указанному изоморфизму, получим комплексное многообразие, в котором вместо одной особой точки вида $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{k+l}$ появились две особые точки типов $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_l$. Далее, итерируя конструкцию, можно разрешить все получившиеся особые точки.

Имея в виду обобщить конструкцию Пейджа, рассмотрим следующий вопрос: какие группы $\mathbb{Z}_p \subset SU(2)$ при $p > 2$ могут действовать на $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$ изометриями? Ясно, что после подходящего выбора унитарного базиса можно считать, что

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \begin{pmatrix} \omega^q & 0 \\ 0 & \overline{\omega}^q \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Z} \right\},$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi}{p} i}$ — примитивный корень из единицы степени p. Рассмотрим $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ — ненулевой элемент решетки. Пусть $\Pi = \{(\lambda_1 z, \lambda_2 \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}\}$ — вещественная двумерная плоскость, инвариантная относительно $\mathbb{Z}_p$. Поскольку Λ инвариантна относительно действия $\mathbb{Z}_p$, то $\Pi \cap \Lambda$ является решеткой, содержащей векторы $\lambda, \lambda\omega, \lambda\omega^2$. Следовательно, существует полином второй степени с целыми коэффициентами, корнем которого является примитивный корень ω. Значит, этот полином является полиномом деления круга, что оставляет только три возможности: $p = 3, 4$ и 6. Однако случаи $p = 4, 6$ означают наличие особых точек в $T^4/\mathbb{Z}_p$, окрестности которых не будут моделироваться конусом $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$, и мы не сможем их разрешить при помощи нашей конструкции. Остается единственный случай $p = 3$, который мы и разберем подробно.

Предположим, что плоская метрика на $\mathbb{C}^2$ задается вещественной частью стандартного эрмитова произведения и $\Lambda_0 = \{a e_1 + b e_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, где $e_1 = 1$, $e_2 = e^{\frac{\pi}{3} i}$. Предыдущие рассуждения показывают, что общая решетка Λ, инвариантная относительно действия $\mathbb{Z}_3$, имеет вид

$$\Lambda = \{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) \mid z_1, z_2 \in \Lambda_0\} \cong \Lambda_0 \oplus \Lambda_0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — комплексные параметры, от которых зависит Λ, и $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$. Действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $T^4 = \mathbb{C}^2/\Lambda$ порождено преобразованием

$$\gamma : (z_1, z_2) + \Lambda \mapsto (z_1 e^{\frac{2\pi}{3} i}, z_2 e^{-\frac{2\pi}{3} i}) + \Lambda.$$

Фактор-пространство $X = T^4/\mathbb{Z}_3$ является кэлеровым орбифолдом с девятью особыми точками, которые соответствуют неподвижным относительно γ точкам в T^4. Эти точки имеют вид $(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$, где $z_i \in \left\{0, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2, \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2\right\}$. Будем обозначать через $\{s_1, \dots, s_9\}$ особые точки в X. Пусть $\mathscr{S}_3$ — пространство модулей плоских метрик на X с голономией $SU(2)$, отвечающих всем возможным значениям параметров λ_i, μ_i. Действие группы $U(2) \subset GL_{\mathbb{C}}(2)$ оставляет метрику на $\mathbb{C}^2$ инвариантной и, следовательно, индуцирует тривиальное действие на $\mathscr{S}_3$. Поэтому $\dim(\mathscr{S}_3) = \dim(GL_{\mathbb{C}}(2)/U(2)) = 4$.

Пусть X' — комплексная поверхность, получаемая последовательным разрешением X в особых точках при помощи $M_{1,2}$ и $M_{1,1}$. А именно, пусть $B_i \subset T^4/\mathbb{Z}_3$, $i = 1, \dots, 9$, — открытые шары радиуса ε с центрами в особых точках X, $B'_i \subset B_i$ — замкнутые шары с теми же центрами радиуса $\varepsilon' < \varepsilon$. Таким образом, мы получили систему концентрических окрестностей особых точек в X: $s_i \in B'_i \subset B_i$. Выберем достаточно малое ε, начиная с которого $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Ясно, что $B_i \backslash B'_i$ диффеоморфно $(\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3$. Рассмотрим пространство $M_{1,2}$ с метрикой $t^2 ds^2$, где ds^2 — метрика (2) при $a = 1/3$. В пространстве $M_{1,2}$ рассмотрим воротник $\tau_{1,2}((\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3)$, где отображение $\tau_{k,l}$ определено в (1). Тогда при $t \to 0$ отображение $\tau_{1,2}$, определенное на воротнике, стремится к изометрии. Рассмотрим орбифолд Y, полученный отождествлением $X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{9} B'_i\right)$ с девятью экземплярами $\tau_{1,2}((0, \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3)$ при помощи отображения $\tau_{1,2}$, ограниченного на воротник $(\varepsilon', \varepsilon) \times S^3/\mathbb{Z}_3$. На областях склейки метрика $t^2 ds^2$ будет сколь угодно мало отличаться от локально плоской метрики на X при $t \to 0$. Орбифолд Y будет иметь девять особенностей $s'_1, \dots, s'_9$, в окрестности которых будет локально устроен как $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Теперь совершенно аналогично рассмотрим достаточно малые $\delta' < \delta < \varepsilon'$ и систему концентрических окрестностей $s'_i \in C'_i \subset C_i$ в Y радиусов δ' и δ. При помощи отображения $\tau_{1,1}$ осуществим отождествление $Y \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{9} C'_i\right)$ с девятью экземплярами $\tau_{1,1}((0, \delta) \times S^3/\mathbb{Z}_2) \subset M_{1,1}$ по воротнику $(\delta', \delta) \times S^3/\mathbb{Z}_2$ и получим комплексную поверхность X' без особенностей. При этом в областях склейки метрика на Y будет сколь угодно близка к метрике $u^2 ds'^2$ при $u, \delta \to 0$, где ds'^2 — метрика (2) на $M_{1,1}$ при $a = 0$. Пусть $d\tilde{s}^2$ — метрика на Y, получающаяся сглаживанием метрик на X, $M_{1,2}$ и $M_{1,1}$ в областях описанного отождествления.

Напомним, что $\mathscr{S}$ — пространство модулей метрик с группой голономии $SU(2)$ на $K3$-поверхности, $\mathscr{S}_3$ — пространство модулей плоских метрик на X с группой голономии $SU(2)$.

Теорема 2. *Поверхность X' является $K3$-поверхностью, и, следовательно, $\mathscr{S}_3$ предельно для $\mathscr{S}$. Достаточно малая окрестность $\mathscr{S}_3$ в $\mathscr{S}$ состоит из 58-мерного семейства метрик, получающихся малой деформацией семейства метрик $d\tilde{s}^2$, построенных описанным выше способом при $\delta, t, u \to 0$.*

Доказательство этой теоремы приведено в следующем параграфе.

§ 4. Связь с мультиинстантонами и доказательство теоремы 2

Для строгого обоснования описанной выше конструкции проще всего воспользоваться связью построенных нами метрик с мультиинстантонами. А именно, мультиинстантоны [7] — метрики с группой голономии $SU(2)$ следующего вида:

$$ds^2 = \frac{1}{U}(d\tau + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x})^2 + U d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, переменная τ является периодической,

$$U = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{grad} U,$$

и $\mathbf{x}_i$ — набор из s различных точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Мультиинстантон (3) является гладкой римановой метрикой на некотором четырехмерном многообразии.

Пусть $d\sigma$ — форма площади поверхности уровня функции U в пространстве $\mathbb{R}^3$. Несложно проверить, что форма

$$\omega_1' = dU \wedge (d\tau + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{x}) + |\operatorname{grad} U| U d\sigma \tag{4}$$

является замкнутой кэлеровой формой, согласованной с метрикой (3).

Рассмотрим предельный случай, когда точек всего две: $\mathbf{x}_1 = (-1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$, причем первая имеет кратность l, вторая — k. Зададим координаты (r, θ, ϕ, ψ) следующим образом:

$$x_1 = \operatorname{ch}\rho \cos\theta, \quad x_2 = \operatorname{sh}\rho \sin\theta \cos\psi, \quad x_3 = \operatorname{sh}\rho \sin\theta \sin\psi, \quad \tau = (l + k)\phi.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что в таких координатах мультиинстантон (3) совпадает с метрикой (2) с точностью до умножения на константу, т. е. построенная нами метрика на $T^*\mathbb{C}P^1(k, l)$ является предельным случаем мультиинстантона.

Теперь мы можем доказать теорему 2. Наше доказательство аналогично рассуждениям из [5], поэтому мы постараемся, насколько это возможно, сохранить соответствующие обозначения. Пусть T^4 — плоский тор с определенным выше действием группы $\mathbb{Z}_3$, рассмотрим тор $T^7 = T^3 \times T^4$ с плоской метрикой и распространим действие $\mathbb{Z}_3$ на T^7, положив его тривиальным на T^3. Тогда множеством S особых точек в $T^7/\mathbb{Z}_3$ будет дизъюнктное объединение девяти торов T^3, причем окрестность T множества S изометрична дизъюнктному объединению девяти экземпляров $T^3 \times B^4_\zeta/\mathbb{Z}_3$, где B^4_ζ — открытый шар радиуса ζ в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ для подходящей константы $\zeta > 0$.

Выберем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим мультиинстантон $ds^2(t)$ на четырехмерном многообразии M_t, заданный тремя следующими точками: $\mathbf{x}_1 = (-4t^2/3, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (2t^2/3, t^2\varepsilon, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (2t^2/3, -t^2\varepsilon, 0)$. Обозначим через U_t соответствующий потенциал. Пусть $\overline{U}(\mathbf{x}) = 3/|\mathbf{x}|$ — потенциал центра тяжести, рассмотренного с кратностью три. Легко проверить, что для $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$

$$|\nabla^i(U_t(\mathbf{x}) - \overline{U}(\mathbf{x}))| = O(t^4) \tag{5}$$

при $t \to 0$ и при всех $i \geq 0$, где ∇^i — совокупность частных производных порядка i. Метрика $d\bar{s}^2$, построенная по потенциалу $\overline{U}$, изометрична плоской метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$, причем каждая область $\{|\mathbf{x}| \leq r^2\}$ изометрична шару B^4_r. Из (5) следует, что

$$|\nabla^i(ds^2(t) - d\bar{s}^2)| = O(t^4) \tag{6}$$

при $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$ и $t \to 0$.

Теперь вырежем каждую из девяти окрестностей $B^4_\zeta/\mathbb{Z}_3$ особых точек в $X = T^4/\mathbb{Z}_3$ и вклеим вместо нее область в M_t, определенную условием $|\mathbf{x}| \leq \zeta^2$.

Получим гладкое четырехмерное многообразие X'. В X' определим три области A, B, C следующим образом: область A состоит из объединения окрестностей, заданных условием $|\mathbf{x}| \leq \zeta^2/9$ в каждом из девяти приклеенных экземпляров M_t; область C представляет собой дополнение в X' к вклеенным окрестностям и изометрична $X \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{9} B^4_\zeta\right)$; наконец, $B = X' \backslash (A \cup C)$.

Рассмотрим кэлеровы формы $\omega_1'(t)$ и $\overline{\omega}_1$ метрик $ds^2(t)$ и $d\bar{s}^2$, описанные в (4). Поскольку метрика $ds^2(t)$ имеет группу голономии $SU(2)$, то на кэлеровом многообразии $(M_t, \omega_1'(t))$ имеется параллельная комплексная форма объема $\mu(t)$. Положим

$$\omega_2'(t) = \mathrm{Re}(\mu(t)), \quad \omega_3'(t) = \mathrm{Im}(\mu(t)).$$

Тогда тройка параллельных кэлеровых форм $\omega_1'(t)$, $\omega_2'(t)$, $\omega_3'(t)$ задает гиперкомплексную структуру на M_t с метрикой $ds^2(t)$. Аналогично построим тройку параллельных постоянных форм $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3$, которые задают плоскую гиперкомплексную структуру на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ с метрикой $d\bar{s}^2$.

Из (4) и (5) следует, что

$$|\nabla^k(\omega_i'(t) - \overline{\omega}_i)| = O(t^4), \quad i = 1, 2, 3,$$

при $t \to 0$ и $|\mathbf{x}| > \zeta^2/16$.

Рассмотрим объединение шаровых слоев B. Существуют 1-формы $\eta_i'(t)$ и $\bar{\eta}_i$ такие, что $\omega_i'(t) = d\eta_i'(t)$, $\overline{\omega}_i = d\bar{\eta}_i$, причем

$$|\nabla^k(\eta_i'(t) - \bar{\eta}_i)| = O(t^4)$$

при $t \to 0$. Рассмотрим вещественную гладкую возрастающую функцию $u(r)$, определенную на отрезке $[0, \zeta]$ и обладающую следующими свойствами:

$$0 \leq u(r) \leq 1; \quad u(r) = 0 \text{ при } 0 \leq r \leq \zeta/3; \quad u(r) = 1 \text{ при } \zeta/2 \leq r \leq \zeta.$$

Положим $\eta_i(t) = u\bar{\eta}_i + (1 - u)\eta_i'(t)$ и $\omega_i(t) = d\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, мы построили тройку замкнутых 2-форм на X', которые совпадают с формами $\overline{\omega}_i$ в области C и с формами $\omega_i'(t)$ в области A. При этом легко увидеть, что в области $B \cup C$

$$|\nabla^k(\omega_i(t) - \overline{\omega}_i)| = O(t^4) \tag{7}$$

при $t \to 0$.

Напомним определение G_2-структуры. Зададим 3-форму ϕ_0 на пространстве $\mathbb{R}^7$ со стандартными евклидовой метрикой и ориентацией следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_0 = y_1 \wedge y_2 \wedge y_7 + y_1 \wedge y_3 \wedge y_6 + y_1 \wedge y_4 \wedge y_5 + y_2 \wedge y_3 \wedge y_5 \\ - y_2 \wedge y_4 \wedge y_6 + y_3 \wedge y_4 \wedge y_7 + y_5 \wedge y_6 \wedge y_7,\end{aligned}$$

где $y_1, \dots, y_7$ — стандартный ортонормированный положительно ориентированный базис в $(\mathbb{R}^7)^*$. При этом двойственная относительно оператора Ходжа 4-форма выглядит так:

$$\begin{aligned}* \phi_0 = y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 \wedge y_4 + y_1 \wedge y_2 \wedge y_5 \wedge y_6 - y_1 \wedge y_3 \wedge y_5 \wedge y_7 + y_1 \wedge y_4 \wedge y_6 \wedge y_7 \\ + y_2 \wedge y_3 \wedge y_6 \wedge y_7 + y_2 \wedge y_4 \wedge y_5 \wedge y_7 + y_3 \wedge y_4 \wedge y_5 \wedge y_6.\end{aligned}$$

Подгруппа в $GL_+(\mathbb{R}^7)$, сохраняющая форму ϕ_0 или $*\phi_0$, совпадает с группой G_2.

Если теперь M — семимерное ориентированное многообразие, то пусть $\Lambda^3_+ M$ и $\Lambda^4_+ M$ — подрасслоения в $\Lambda^3 T^* M$ и $\Lambda^4 T^* M$, образованные формами, которые в каждой точке $p \in M$ в подходящем ориентированном базисе $T^*_p M$ имеют вышеуказанный вид ϕ_0 и $*\phi_0$. Нетрудно увидеть, что $\Lambda^3_+ M$ и $\Lambda^4_+ M$ являются открытыми подрасслоениями в $\Lambda^3 T^* M$ и $\Lambda^4 T^* M$, и мы имеем естественное отображение отождествления $\Theta : \Lambda^3_+ M \to \Lambda^4_+ M$, которое относит каждой форме локального вида ϕ_0 форму локального вида $*\phi_0$. Говорят, что сечение ϕ расслоения $\Lambda^3_+ M$ *задает G_2-структуру на M*. Такая форма ϕ однозначно определяет риманову метрику, относительно которой оператор отождествления Θ становится оператором Ходжа $*$. Если к тому же формы ϕ и $*\phi$ являются замкнутыми, то G_2-структура не имеет кручения и группа голономии риманова многообразия M содержится в $G_2 \subset SO(7)$.

Зададим на $T^3 \times X = T^7/\mathbb{Z}_3$ плоскую G_2-структуру $\bar{\phi}$ и двойственную ей $*\bar{\phi}$ следующим образом:

$$\bar{\phi} = \overline{\omega}_1 \wedge \delta_1 + \overline{\omega}_2 \wedge \delta_2 + \overline{\omega}_3 \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3,$$

$$*\bar{\phi} = \overline{\omega}_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \overline{\omega}_2 \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \overline{\omega}_3 \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_1,$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — постоянные ортонормированные 1-формы на T^3, распространенные на весь $T^7/\mathbb{Z}_3 = T^3 \times X$. Определим на $M = T^3 \times X'$ следующие 3- и 4-формы:

$$\phi_t = \omega_1(t) \wedge \delta_1 + \omega_2(t) \wedge \delta_2 + \omega_3(t) \wedge \delta_3 + \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3,$$

$$v_t = \omega_1(t) \wedge \delta_2 \wedge \delta_3 + \omega_2(t) \wedge \delta_3 \wedge \delta_1 + \omega_3(t) \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 + \frac{1}{2}\omega_1(t) \wedge \omega_1(t).$$

Ясно, что в области $T^3 \times C$ определенные таким образом формы совпадают соответственно с $\bar{\phi}$ и $*\bar{\phi}$. Поскольку все формы $\omega_i(t)$ и δ_i замкнуты, то формы ϕ_t и v_t тоже замкнуты на M.

В областях $T^3 \times A$ и $T^3 \times C$ тройка форм $\omega_i(t)$ является тройкой кэлеровых форм, задающих гиперкомплексную структуру, поэтому форма ϕ_t задает G_2-структуру без кручения и $v_t = \Theta(\phi_t)$. В области $T^3 \times B$ тройка $\omega_i(t)$ уже не задает, вообще говоря, гиперкомплексную структуру, тем самым мы даже не можем априори гарантировать, что ϕ_t задает G_2-структуру. Однако $\Lambda^3_+(M)$ открыто в $\Lambda^3 T^*(M)$, поэтому из (7) следует, что при достаточно малом t будет $\phi_t \in C^\infty\bigl(\Lambda^3_+(M)\bigr)$. При этом форма v_t, вообще говоря, отличается от $\Theta(\phi_t)$. Определим 3-форму ψ_t на M соотношением $*\psi_t = \Theta(\phi_t) - v_t$, где оператор Ходжа определен относительно римановой метрики g, заданной G_2-структурой ϕ_t. Очевидно, что $d^*\psi_t = d^*\phi_t$.

Следующие теоремы доказаны в [5].

Теорема А. *Пусть $E_1, \dots, E_5$ — положительные константы. Тогда существуют положительные константы κ, K, зависящие от $E_1, \dots, E_5$, такие, что для любого $0 < t < \kappa$ имеет место следующее свойство.*

Пусть M — компактное семимерное многообразие и ϕ — гладкая замкнутая форма из $C^\infty\bigl(\Lambda^3_+ M\bigr)$. Предположим, что ψ — гладкая 3-форма на M такая, что $d^*\psi = d^*\phi$, удовлетворяющая условиям:

(i) $\|\psi\|_2 \le E_1 t^4$ *и* $\|\psi\|_{C^{1,1/2}} \le E_1 t^4$,

(ii) *если* $\chi \in C^{1,1/2}(\Lambda^3 T^* M)$ *и* $d\chi = 0$, *то*

$$\|\chi\|_{C^0} \le E_2(t\|\nabla\chi\|_{C^0} + t^{-7/2}\|\chi\|_2),$$

$$\|\nabla\chi\|_{C^0} + t^{1/2}[\nabla\chi]_{1/2} \le E_3(\|d^*\chi\|_{C^0} + t^{1/2}[d^*\chi]_{1/2} + t^{-9/2}\|\chi\|_2),$$

(iii) $1 \le E_4 \operatorname{vol}(M)$,

(iv) *если* f — *гладкая вещественная функция и* $\int\limits_M f\,d\mu = 0$, *то* $\|f\|_2 \le E_5\|df\|_2$.

Тогда существует $\eta \in C^\infty(\Lambda^2 T^*M)$ *такое, что* $\|d\eta\|_{C^0} \le Kt^{1/2}$ *и* $\tilde\phi = \phi + d\eta$ *является гладкой* G_2*-структурой на* M *без кручения.*

Теорема B. *Пусть* $D_1, \dots, D_5$ — *положительные константы. Тогда существуют положительные константы* $E_1, \dots, E_5$ *и* λ, *зависящие только от* $D_1, \dots, D_5$, *такие, что для каждого* $t \in (0, \lambda]$ *имеет место следующее свойство.*

Пусть M — *компактное семимерное многообразие и* ϕ — *замкнутая форма из* $C^\infty(\Lambda^3_+ M)$. *Пусть* g — *метрика, ассоциированная с* ϕ. *Предположим, что* ψ — *гладкая* 3*-форма на* M *такая, что* $d^*\phi = d^*\psi$, *удовлетворяющая условиям:*

(i) $\|\psi\|_2 \le D_1 t^4$ *и* $\|\psi\|_{C^2} \le D_1 t^4$,

(ii) *радиус инъективности* $\delta(g)$ *удовлетворяет неравенству* $\delta(g) \ge D_2 t$,

(iii) *тензор Римана* $R(g)$ *метрики* g *удовлетворяет неравенству* $\|R(g)\|_{C^0} \le D_3 t^{-2}$,

(iv) *объем* $\operatorname{vol}(M)$ *удовлетворяет неравенству* $\operatorname{vol}(M) \ge D_4$,

(v) *диаметр* $\operatorname{diam}(M)$ *удовлетворяет неравенству* $\operatorname{diam}(M) \le D_5$.

Тогда условия (i)–(iv) *теоремы* A *выполнены для* (M, ϕ).

Мы хотим применить эти теоремы к форме ϕ_t на M с ассоциированной метрикой g. Действительно, из (7) следует выполнение условия (i), условие (iv) вытекает тривиальным образом из самой конструкции. Далее, заметим, что $ds^2(t) = t^2\,ds^2(1)$. Отсюда получаем, что радиус инъективности растет линейно с ростом t, что доказывает (ii) и (iii). Это же соображение показывает ограниченность диаметра, т. е. (v). Значит, существует близкая к ϕ_t G_2-структура $\tilde\phi$ без кручения. Пусть g' — ассоциированная с ней метрика с группой голономии G_2 на $M = T^3 \times X'$.

Поскольку X односвязно, то и X' односвязно, поэтому $\pi_1(T^3 \times X') = \mathbb{Z}^3$, следовательно, из [5] мы можем сделать вывод, что группа голономии (M, g') равна $SU(2) \subset G_2$. Значит, метрика на M — прямое произведение плоской метрики на T^3 и метрики ds'^2 с группой голономии $SU(2)$ на X'. В частности, отсюда следует, что X' является $K3$-поверхностью.

Выясним, как выглядит метрика ds'^2 вблизи удаленных особых точек, т. е. в области A. Метрика g на $T^3 \times X'$, близкая к g' в области A, является прямым произведением плоской метрики на T^3 и мультиинстантона $ds^2 = ds^2(t)$. При $t \to 0$ мультиинстантон ds^2 стремится к плоской метрике на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$, а при $\varepsilon \to 0$ — к метрике (2) на $M_{1,2}$. Значит, метрика ds^2 при $\varepsilon \to 0$ получается из X описанным в теореме 2 разрешением особых точек при помощи $M_{1,2}$. Если теперь ограничиться небольшой окрестностью точек $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ и выбрать ε настолько малым, чтобы $\mathbf{x}_1$ давала вклад в потенциал U_t, малый по сравнению с вкладом $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, то метрика ds^2 в этой окрестности будет близка к метрике (2) на $M_{1,1}$. Итак, метрика ds^2 получается указанным в теореме 2 двойным разрешением особых точек X, а метрика ds'^2 — ее малой деформацией.

Оценим размерность построенного семейства метрик. При разрешении особенностей s_i свобода приклеивания $M_{1,2}$ определяется группой $U(2)$, оставляющей инвариантной комплексную структуру на T^4. Однако метрика на $M_{1,2}$ имеет группу изометрий $U(1) \times U(1) \subset U(2)$, поэтому если мы учтем параметр t, отвечающий за гомотетию, то получаем семейство различных метрик с голономией $SU(2)$ размерности 3 в окрестности каждой точки s_i. При разрешении особенности s_i', как и в методе Пейджа, получаем также семейство размерности 3. Размерность $\mathscr{S}_3$ равна 4, поэтому, суммируя, приходим к тому, что размерность $\mathscr{S}$ в окрестности $\mathscr{S}_3$ равна 58 — именно такова размерность пространства модулей метрик с голономией $SU(2)$ на $K3$-поверхности.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базайкин Я. В.* О некоторых метриках нулевой кривизны Риччи коодноролности два на комплексных линейных расслоениях // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 497–504.
2. *Eguchi T., Hanson A. J.* Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // Phys. Lett. B. 1978. V. 74, N 4. P. 249–251.
3. *Page D. N.* A physical picture of the $K3$ gravitational instanton // Phys Lett. B. 1978. V. 80, N 1, 2. P. 55–57.
4. *Yau S.-T.* On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equations. I // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31. P. 339–411.
5. *Joyce D. D.* Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I, II // J. Differentional Geometry. 1996. V. 43, N 2. P. 291–328, 329–375.
6. *Joyce D. D.* Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7) // Inv. Math. 1996. V. 123. P. 507–552.
7. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Gravitational multi-instantons // Phys. Lett. B. 1978. V. 78, N 4. P. 430–432.
8. *Hitchin N. J.* Polygons and gravitons // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1979. V. 85. P. 465–476.
9. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
10. *Topiwala P.* A new proof of the existence of Kähler–Einstein metrics on $K3$. I // Invent. Math. 1987. V. 89. P. 425–448.
11. *LeBrun C., Singer M.* A Kummer-type construction of self dual 4-manifolds // Math. Ann. 1994. V. 300. P. 165–180.

Статья поступила 10 ноября 2004 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru