*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 519.214*

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С РАЗНОРАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СКАЧКАМИ, ИМЕЮЩИМИ КОНЕЧНУЮ ДИСПЕРСИЮ

**А. А. Боровков**

**Аннотация:** Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с распределениями $F_1, F_2, \dots$ в схеме серий (распределения $F_i$ могут зависеть от некоторого параметра),

$$\mathbf{E}\xi_i = 0, \quad \mathbf{E}\xi_i^2 < \infty, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \overline{S}_n = \max_{k \le n} S_k.$$

Получены оценки сверху и снизу для вероятностей $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ в предположении, что «усредненное» распределение

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i$$

мажорируется или минорируется правильно меняющимися функциями. Кроме того, изучены асимптотика названных вероятностей и асимптотика

$$\mathbf{P}(\max_{k \le n}(S_k - g(k)) > 0)$$

пересечения траекторией $\{S_k\}$ произвольной удаленной границы $\{g(k)\}$. При этом случай $n = \infty$ не исключается. Найдены также оценки для распределения времен первого прохождения границы.

**Ключевые слова:** случайные блуждания, большие уклонения, разнораспределенные скачки, схема серий, конечная дисперсия, переходные явления.

## Введение

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины с распределениями $F_1, F_2, \dots$ в схеме серий (распределения $F_i$ могут зависеть от некоторого параметра),

$$\mathbf{E}\xi_i = 0, \quad d_i = \mathbf{E}\xi_i^2 < \infty, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \overline{S}_n = \max_{k \le n} S_k.$$

Если $\xi_i$ одинаково распределены и распределение $F = F_j$ фиксировано (ни от каких параметров не зависит), то оценки и асимптотика $\mathbf{P}(S_n > x)$ и $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 02–01–00902) и Совета по грантам Президента РФ (код проекта № НШ–2139.2003.1).

© 2005 Боровков А. А.

изучены достаточно полно (см., например, [1–5] и библиографию там). Если $d = \mathbf{E}\xi_i^2 < \infty$, $\mathbf{P}(\xi_i > t) = V(t) = t^{-\alpha}L(t)$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) при $t \to \infty$, $\alpha > 2$, то при $x \to \infty$, $n \leq \frac{x^2}{c\ln x}$ (или $x > \sqrt{cn\ln n}$), $c > \alpha - 2$ выполняется

$$\mathbf{P}(S_n > x) \sim \mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \sim nV(x).$$

Если существуют гладкие производные функции $V$ и моменты $\xi_i$ более высокого порядка, то можно выписать также асимптотические разложения для рассматриваемых вероятностей (грубо говоря, по степеням $\frac{\sqrt{n}}{x}$), см. [5].

В работах [6–10] была изучена асимптотика $\mathbf{P}(\max_{k\leq n}(S_k - ak) > x)$ при $a > 0$, $n \leq \infty$, $x \to \infty$.

Для *разнораспределенных* $\xi_i$ в работах [1, 11] получены оценки сверху для $\mathbf{P}(S_n{>}x)$ в терминах «усеченных» моментов. Они могут быть использованы для отыскания асимптотики $\mathbf{P}(S_n > x)$, но не во всей возможной зоне уклонений. Некоторые оценки снизу для $\mathbf{P}(S_n > x)$ содержатся в [1], но они не являются асимптотически точными. Оценки снизу для $\mathbf{P}(|S_n| > x)$ содержатся в [12].

В работе [13] рассмотрены задачи, близкие к тем, что изучаются в настоящей статье, но в случае, когда $\mathbf{E}\xi_i^2 = \infty$.

Настоящая работа структурирована следующим образом.

В § 1 получены оценки сверху и снизу для вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n > x) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$$

в случае разнораспределенных $\xi_i$ в схеме серий в предположении, что хвосты $F([x,\infty))$ усредненных распределений

$$F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i \tag{0.1}$$

(они, вообще говоря, зависят от $n$) мажорируются или минорируются функциями, удовлетворяющими условиям «равномерного» (по $n$) правильного изменения. Полученные оценки оказываются достаточно точными для того, чтобы получить и саму асимптотику названных вероятностей.

В § 2 для заданной произвольной удаленной границы $\{g(k)\}$, для которой $\min_{k\leq n} g(k) \geq x$, найдена асимптотика вероятности

$$\mathbf{P}(\max_{k\leq n}(S_k - g(k)) > 0)$$

пересечения траекторией $\{S_k\}$ этой границы в предположении, что $x \to \infty$ достаточно быстро при $n \to \infty$.

Там же рассмотрена аналогичная задача для вероятности

$$\mathbf{P}(\sup_{k\geq 0}(S_k - g(k)) > 0)$$

пересечения границы $\{g(k)\}$ на неограниченном интервале времени.

В § 3 установлены результаты, касающиеся переходных явлений, в случае разнораспределенных скачков.

## § 1. Оценки сверху и снизу для распределений $S_n$ и $\overline{S}_n$

Как уже было отмечено, распределения $F_i$ случайных величин $\xi_i$ могут зависеть от параметра схемы серий. В условиях этого раздела нам потребуется лишь последовательность $\xi_1, \dots, \xi_n$ при $n < \infty$ и параметр схемы серий можно отождествить с $n$ (как и в классической схеме серий), так что распределения $F_j$ будут зависеть, вообще говоря, от $j$ и $n$.

Если рассматривается неограниченная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$, то параметр схемы серий может быть выбран и иным образом, как это имеет место в задаче о переходных явлениях (см. § 3 и [14]).

**1.1. Оценки сверху для распределений $\overline{S}_n$. Первая версия условий.** Основные условия этого раздела, как и в [13], будут налагаться на усредненное распределение $F$, определенное в (0.1). Первое из этих условий можно назвать условием существования равномерно правильно меняющихся мажорант для хвостов усредненного распределения $F$.

Правильно меняющаяся функция (п.м.ф.) $G(t) = t^{-\alpha}L(t)$, где $L$ — м.м.ф., обладает следующими двумя свойствами (по существу, это свойства функции $L$).

• $\frac{v^\alpha G(tv)}{G(t)} \to 1$ *при* $t \to \infty$ *равномерно по* $v$ *из любого фиксированного отрезка, отделенного от* 0.

• *Для любого фиксированного* $\delta > 0$

$$\frac{v^\alpha G(tv)}{G(t)} \le (1+\delta)\max(v^\delta, v^{-\delta})$$

*при всех достаточно больших* $t$ *и* $tv$.

Следующие условия на мажоранты хвостов распределения $F$ являются равномерными версиями приведенных условий.

Мы будем говорить, что *выполнено условие* $[<]_{\mathrm{U}}$, если $\overline{F}(t) = F([t,\infty))$ допускает мажоранту $V(t)$, обладающую следующими свойствами $[\mathrm{U}] = [\mathrm{U}_1] \cap [\mathrm{U}_2]$ равномерного правильного изменения.

$[\mathrm{U}_1]$ *Для любого заданного* $\delta > 0$ *найдется* $T_\delta$ *такое, что при* $\alpha > 2$, *не зависящем от* $n$,

$$\sup_{\substack{t \ge T_\delta, n,\\ v\in[1/2,2]}} \left|\frac{v^\alpha V(vt)}{V(t)} - 1\right| \le \delta. \tag{1.1}$$

$[\mathrm{U}_2]$ *Для заданного* $\delta > 0$ *найдется* $T_\delta$ *такое, что при всех* $t$ *и* $v$ *таких, что* $t \ge T_\delta$, $tv \ge T_\delta$, *и при всех* $n$

$$\frac{v^\alpha V(vt)}{V(t)} \le (1+\delta)\max(v^\delta, v^{-\delta}) \tag{1.2}$$

(ср. с [13]).

Функции $T_\delta$ в $[\mathrm{U}_1]$ и $[\mathrm{U}_2]$, не ограничивая общности, можно считать одинаковыми.

Нетрудно видеть, что условие $[\mathrm{U}_1]$ сохранится в том же виде, если вместо отрезка $[1/2, 2]$ для значений $v$ рассмотреть произвольный фиксированный (не зависящий от $n$) отрезок $[c_1, c_2]$, $0 < c_1 < c_2 < \infty$. При этом, правда, $T_\delta$ будет зависеть от $c_1$, $c_2$. Эти постоянные можно зафиксировать такими, какими они потребуются в доказательстве.

Замечание. При изучении больших уклонений величин $\overline{S}_n$ и $S_n$ в случае, когда $n \to \infty$, условие [U] можно заменить следующим ослабленным условием.

[$\mathrm{U}^\infty$] *Для заданного* $\delta > 0$ *найдутся* $N_\delta$, $T_\delta$ *такие, что справедливо* (1.2) *при всех* $n \ge N_\delta$, $t \ge T_\delta$, $tv \ge T_\delta$ *и выполнено* (1.1), *где* sup *взят по области* $n \ge N_\delta$, $t \ge T_\delta$, $v \in [1/2, 2]$.

Простым достаточным условием существования правых правильно меняющихся мажорант для усредненных распределений является ограниченность при $\alpha > 2$ и некотором $T_0 > 0$ усредненных моментов:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\big(\xi_j^\alpha;\ \xi_j \ge T_0\big) < c_\alpha < \infty.$$

В этом случае очевидно, что при $t \ge T_0$

$$\overline{F}(t) \le c_\alpha t^{-\alpha}$$

и в условиях [U] можно положить $T_\delta = T_0$ при любом $\delta > 0$.

Наряду с условиями [U] на *усредненную* мажоранту можно рассматривать так же, как и в [13], альтернативный вариант этих условий, когда хвосты $F_1([t,\infty)), \dots, F_n([t,\infty))$ допускают правильно меняющиеся мажоранты $V_1, \dots, V_n$ и *каждая* из этих мажорант равномерно удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.2) соответственно с показателями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$2 < \alpha_0 \le \min_{i \le n} \alpha_i \le \max_{i \le n} \alpha_i \le \alpha^0, \tag{1.3}$$

где $\alpha_0$, $\alpha^0$ от $n$ не зависят. Если $\alpha_0 = \alpha^0 = \alpha$, то из *«индивидуальной»* версии условий $[\,<\,]_{\mathrm{U}}$, приведенной выше, следует «усредненная» версия (1.1), (1.2) (см. [13]). Если $\alpha_j$ различны, то выполнение усредненных условий $[\,<\,]_{\mathrm{U}}$ становится неясным. В связи с этим, как и в [13], можно рассматривать две версии условий $[\,<\,]_U$: (a) *усредненную* и (b) *индивидуальную*.

В отличие от [13] мы не будем здесь в формулировке основной теоремы использовать условие [J] не слишком быстрого вырождения хвостов (оно будет введено позже), а воспользуемся альтернативным подходом: введем в рассмотрение величину

$$J(n,\delta) = T_\delta^{\alpha+\delta} n V(T_\delta), \tag{1.4}$$

где $T_\delta$ из условий [U], которая будет входить в полученные оценки.

Мы можем сформулировать теперь основное утверждение этого раздела. Обозначим

$$d_i = \mathbf{E}\xi_i^2, \quad D = D_n = \sum_{i=1}^{n} d_i, \quad B_j = \{\xi_j \le y\}, \quad B = \bigcap_{j=1}^{n} B_j. \tag{1.5}$$

Пусть

$$y = \frac{x}{r}, \quad r \ge 1, \quad \rho = \rho(n,\delta) = \frac{J(n,\delta)}{D_n}, \quad \sigma(n) = \sqrt{(\alpha-2)D\ln D}, \quad x = s\sigma(n),$$

где $\delta > 0$ будет выбрано позже. Не ограничивая общности, будем считать $D \ge e$ и предполагать, что $x \ge \sqrt{D}$.

В индивидуальной версии условий $[\,<\,]_{\mathrm{U}}$ параметр $\alpha$ в (1.4), (1.5) надо заменить на $\alpha^0$ и положить $V(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} V_j(t)$.

**Теорема 1.1.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$ *при всех* $j$ *и усредненное распределение* $F$ *удовлетворяет условиям* $[<]_{\mathrm{U}}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *При любом фиксированном* $h > 1$, *всех* $s \geq 1$ *и всех достаточно малых* $nV(x)$ *выполняется*

$$P \equiv \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B) \leq e^r \left(\frac{nV(y)}{r}\right)^{r-\theta}, \tag{1.6}$$

*где*

$$\theta = \frac{hr^2}{4s^2}\left(1 + \chi + b\frac{\ln s}{\ln D}\right), \quad b = \frac{2\alpha}{\alpha - 2}, \quad \chi = -\frac{2}{\alpha - 2}\frac{\ln \rho}{\ln D},$$

*значение* $\delta$, *определяющее величину* $\rho = \rho(n, \delta)$, *зависит от выбранного* $h > 1$ *и будет определено в доказательстве.*

*Если* $D \to \infty$, $\ln \rho = o(\ln D)$, *то можно положить*

$$\theta = \frac{hr^2}{4s^2}\left(1 + b\frac{\ln s}{\ln D}\right). \tag{1.7}$$

(ii) *Пусть* $D = D_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при любых фиксированных* $h > 1$, $0 < \tau < h$ *для*

$$x = s\sigma(n), \quad s^2 \leq \frac{(h-\tau)}{2}$$

*и всех достаточно больших* $n$ *выполняется*

$$P \leq e^{-\frac{x^2}{2Dh}}. \tag{1.8}$$

(iii) *Если вместо усредненного условия* $[<]_{\mathrm{U}}$ *потребовать выполнения «индивидуальной» версии этих условий, когда каждое из распределений* $F_j$ *равномерно по* $j$, $n$ *удовлетворяет условиям* $[<]_{\mathrm{U}}$ *и выполнено* (1.3), *то утверждения* (i), (ii) *теоремы сохранятся при* $\sigma(n) = \sqrt{(\alpha^0 - 2)D\ln D}$. *При этом в первом утверждении надо* $\alpha$ *заменить на* $\alpha^0 = \max_{i \leq n} \alpha_i$. *Во втором утверждении неравенство* (1.8) *будет выполняться при*

$$x = s\sigma(n), \quad s \leq \frac{(h-\tau)(\alpha_0 - 2)}{2(\alpha^0 - 2)}, \quad \alpha_0 = \min_{i \leq n} \alpha_i.$$

*Во всех утверждениях, где предполагается, что* $n \to \infty$, *условие* [U] *можно заменить условием* $[\mathrm{U}^\infty]$.

Мы видим, что первое утверждение теоремы 1.1 при $nV(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x)$, $\ln \rho = o(\ln D)$, по сути, повторяет первое утверждение теоремы 4.1 в [3] для одинаково распределенных слагаемых с заменой в представлении для $\theta$ числа $n$ на $D$.

Аналогичное замечание справедливо относительно второго утверждения.

Рассмотрим теперь более внимательно значение $-\frac{\ln \rho}{\ln D}$ (или значение $\chi$), присутствующее в (1.6). В силу неравенства Чебышева ($\delta$ фиксировано)

$$nV(t) \leq D_n t^{-2}, \quad J(n, \delta) \leq T_\delta^{\alpha+\delta-2} D_n, \quad \rho = \frac{J(n, \delta)}{D_n} \leq T_\delta^{\alpha-2+\delta} \equiv c_1. \tag{1.9}$$

Ясно также, что неравенство (1.6) сохранится, если величину $\chi$ в нем заменить на $\max(0, \chi)$ (неравенство от этого ухудшится), так что, не ограничивая общности, можно считать, что $\chi \geq 0$ ($\rho \leq 1$).

Наиболее «опасными» для качества рассматриваемых оценок являются малые значения $\rho$.

Оценки $\rho$ снизу можно получить, если выполнено следующее условие.

[J] *При каких-нибудь* $\delta < \min(1, \alpha - 2)$ *и* $\gamma \geq 0$

$$J(n, \delta) = T_\delta^{\alpha+\delta} nV(T_\delta) \geq cD_n^{-\gamma}. \tag{1.10}$$

Отметим сразу же, что *если выполнено условие* [J] *при некотором* $\delta > 0$, *то оно будет выполнено и при любом другом фиксированном* $\delta_1 < \delta$, *например, при* $\delta_1 = \delta/2$.

Действительно, так как в силу [U$_2$] выполняется $V(T_{\delta_1}) \geq V(T_\delta)\left(\frac{T_{\delta_1}}{T_\delta}\right)^{-\alpha-\delta}$, то

$$J(n, \delta_1) = T_{\delta_1}^{\alpha+\delta_1} nV(T_{\delta_1}) \geq T_\delta^{\alpha+\delta} nV(T_\delta) T_{\delta_1}^{\delta_1-\delta} = J(n, \delta) T_{\delta_1}^{-\delta_1} \geq c_1 D_n^{-\gamma},$$

где $c_1 = cT_{\delta_1}^{-\delta_1}$. Если $T_\delta$ растет при $\delta \to 0$ не слишком быстро, например $T_\delta < e^{o(1/\delta)}$, то постоянная $c_1 \geq ce^{o(1)}$ меняться по сравнению с $c$ по существу не будет.

Если выполнено [J], то

$$J(n, \delta) \geq cD_n^{-\gamma}, \quad \ln \rho \geq \ln c - (1 + \gamma) \ln D_n.$$

Поэтому

$$0 \leq -\frac{\ln \rho}{\ln D_n} \leq 1 + \gamma - \frac{\ln c}{\ln D_n}.$$

Сказанное означает, что при выполнении [J] величина $\chi = \chi(n, \delta)$ при любом фиксированном $\delta > 0$ ограничена сверху значением, не зависящим от $n$, и, стало быть, $\theta \to 0$ при $s \to \infty$.

Пусть выполнено условие $[<]_{\mathrm{U}}$ в усредненной или «индивидуальной» версии. Тогда из сказанного и теоремы 1.1 вытекает

**Следствие 1.1.** *Если* $x = s\sigma(n)$ *и выполнено* [J], *то в условиях пп.* 1, 3 *теоремы* 1.1 *при любом* $\varepsilon > 0$ *и всех достаточно больших* $s$

$$P < (nV(x))^{r-\varepsilon}. \tag{1.11}$$

**Следствие 1.2.** *Если* $x = s\sigma(n)$ *и выполнено* [J], *то в условиях пп.* (i), (iii) *теоремы* 1.1 *при любом заданном* $\delta > 0$ *и всех достаточно больших* $s$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \leq nV(x)(1 + \delta). \tag{1.12}$$

*Пусть* $D_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при любых фиксированных* $h > 1$, $0 < \tau < h$ *для* $x = s\sigma(n)$, $s^2 < \frac{(h-\tau)}{2}$, *и всех достаточно больших* $n$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n > x) \leq e^{-\frac{x^2}{2Dh}}.$$

Следствие 1.2 доказывается так же, как следствие 4.1 в [3].

В работах [1, 11] получены оценки сверху для распределения $S_n$ в терминах «усеченных» моментов и без условий на существование правильно меняющихся мажорант (такие мажоранты при наличии моментов всегда существуют, но порядок убывания не будет правильным). Это делает оценки в [1, 11] в известном смысле более общими, но и значительно более громоздкими. Получить из них оценки вида (1.11), (1.12) не удается.

Рассмотрим один пример, иллюстрирующий утверждения теоремы 1.1 и следствий 1.1, 1.2.

Пример 1.1. Пусть $\xi_i = c_i\zeta_i$, где $\zeta_i$ одинаково распределены, удовлетворяют условиям $\mathbf{E}\zeta_i = 0$, $\mathbf{E}\zeta_i^2 = 1$, $\mathbf{P}(\zeta_i > t) = V_{(\zeta)}(t) = Lt^{-\alpha}$ при $t \ge T_0$. Тогда можно взять $V_i(t) = V_{(\zeta)}(\frac{t}{c_i})$ при $t \ge c_iT_0$.

Если $c_* = \inf c_i > 0$, $c^* = \sup c_i < \infty$, $D_n = \sum\limits_{i=1}^n c_i^2 \sim c_{(1)}n$, $J(n,\delta) \sim c_{(2)}n$, то $\rho \sim \frac{c_{(2)}}{c_{(1)}}$, $\ln\rho = o(\ln D)$ при $n \to \infty$, и в (1.6) можно пользоваться представлением (1.7).

Пусть теперь $c_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$. В нашем случае в условиях [U] и в последующих формулировках можно положить $\alpha_i = \alpha_* = \alpha^* = \alpha$, $\delta = 0$, $T_\delta = T_0$. Предположим для простоты, что $c_i = i^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда при $\gamma < 1/\alpha$

$$D_n \sim \frac{1}{1-2\gamma}n^{-2\gamma+1}, \quad J(n,0) = \sum_{i=1}^n V_{(\zeta)}(T_0 i^\gamma)T_0^\alpha \sim \frac{V_{(\zeta)}(T_0)T_0^\alpha}{1-\alpha\gamma}n^{-\alpha\gamma+1}.$$

Отсюда следует, что $\rho \sim cn^{-\gamma(\alpha-2)}$ при $n \to \infty$,

$$-\frac{\ln\rho}{\ln D} \sim \frac{\gamma(\alpha-2)}{1-2\gamma}, \quad \chi \sim \frac{2\gamma}{1-2\gamma}.$$

Таким образом, в этом случае справедливы соотношения (1.6), (1.11), (1.12), где можно положить

$$\theta = \frac{hr^2}{4s^2}\left(1 + \frac{2\gamma}{1-2\gamma} + b\frac{\ln s}{\ln D}\right).$$

Если $c_i \uparrow \infty$ при $i \to \infty$, то условия [U] не выполнены. Однако задачу в этом случае можно в известной мере свести к предыдущей. Введем новые независимые случайные величины

$$\xi_i^* = \frac{\xi_{n-i+1}}{c_n} = \frac{\zeta_{n-i+1}c_{n-i+1}}{c_n}, \quad i = 1,\dots,n,$$

так что $\xi_1^* = \zeta_n \underset{d}{=} \zeta_1$, $\xi_2^* = \zeta_{n-1}\frac{c_{n-1}}{c_n}, \dots$, и мы вновь имеем представление вида $\xi_i^* = c_i^*\zeta_i$ с убывающими коэффициентами $c_i^* = \frac{c_{n-i}}{c_n}$, но уже «в схеме серий», так как $c_i^*$ зависят от $n$. При этом

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n \xi_i^* = \frac{S_n}{c_n}, \quad \mathbf{P}(S_n > x) = \mathbf{P}\bigl(S_n^* > x^*\bigr) \quad \text{при } x^* = \frac{x}{c_n}.$$

Доказательство теоремы 1.1 будет следовать схеме доказательства теорем 4.1 в [3] и теоремы 1.1 в [13]. Подробно мы будем останавливаться лишь на тех местах, в которых разнораспределенность $\xi_i$ вносит изменения в рассуждения. Положим

$$R_i(\mu,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} e^{\mu t}F_i(dt).$$

В основе доказательства, как и в [3, 13], лежит

**Лемма 1.1.** *При любых* $\mu \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$P = \mathbf{P}(\overline{S}_n > x, B) \leq e^{-\mu x} \max_{k \leq n} \prod_{j=1}^{k} R_j(\mu, y), \tag{1.13}$$

*где событие* $B$ *определено в* (1.5).

Отметим, что условие $\mathbf{E}\xi_j = 0$ здесь не предполагается.

Доказательство леммы см. в [13].

Положим

$$R(\mu, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} R_j(\mu, y),$$

так что

$$R(\mu, y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\mu t} F(dt).$$

В качестве первого шага оценим

$$R(\mu, y) = I_1 + I_2,$$

где при фиксированном $\varepsilon > 0$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{M(\varepsilon)} e^{\mu t} F(dt) \leq 1 + \frac{\mu^2 h D}{2n}, \quad M(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad h = e^{\varepsilon}.$$

Оценим теперь

$$I_2 = \int_{M(\varepsilon)}^{y} e^{\mu t} F(dt) \leq V(M(\varepsilon)) e^{\varepsilon} + \mu \int_{M(\varepsilon)}^{y} V(t) e^{\mu t} dt.$$

Рассмотрим сначала при $M(\varepsilon) < M = M(2\alpha) < y$ интеграл

$$I_{2,1} = \mu \int_{M(\varepsilon)}^{M} V(t) e^{\mu t} dt.$$

При $t = \frac{v}{\mu}$, $\varepsilon \leq v \leq 2\alpha$, $\mu \to 0$ в силу условий [U] равномерно по $n$ выполняется

$$V(t) e^{\mu t} = V\left(\frac{v}{\mu}\right) e^{v} \sim V\left(\frac{1}{\mu}\right) g(v),$$

где функция

$$g(v) = v^{-\alpha} e^{v}$$

выпукла на $(0, \infty)$. Поэтому

$$I_{2,1} \leq \frac{\mu}{2} (M - M(\varepsilon)) V\left(\frac{1}{\mu}\right) (g(\varepsilon) + g(2\alpha))(1 + o(1)) \leq cV\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Рассмотрим теперь оценку интеграла

$$I_{2,2} = \mu \int_{M}^{y} V(t) e^{\mu t} dt.$$

Точно так же, как при оценке $I_3$ в [13, (1.19)–(1.22)], получаем

$$I_{2,2} \le V(M)e^{2\alpha} + \mu \int\limits_M^y V(t)e^{\mu t}dt \equiv V(M)e^{2\alpha} + \mu\mathscr{I}(\mu, y),$$

где $\mathscr{I}(\mu, y) = \int\limits_M^y V(t)e^{\mu t}dt$;

$$\mu\mathscr{I}(\mu, y) \le e^{\mu y}V(y)(1 + \varepsilon(\lambda)),$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda = \mu y \to \infty$.

В итоге находим

$$n(R(\mu, y) - 1) \le \frac{\mu^2 hD}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y)e^{\mu y}(1 + \varepsilon(\lambda)).$$

Так как при $k \le n$ выполняется

$$\sum_{i=1}^k d_i \le D, \quad \sum_{i=1}^k V_i(\cdot) \le nV(\cdot),$$

такое же неравенство (с той же правой частью) справедливо для $\sum\limits_{i=1}^k (R_i(\mu, y) - 1)$ и для $\max\limits_{k\le n} \sum\limits_{i=1}^k (R_i(\mu, y) - 1)$. Отсюда следует, что

$$\max_{k\le n} \prod_{i=1}^k R_i(\mu, y) \le \exp\left\{\max_{k\le n} \sum_{i=1}^k (R_i(\mu, y) - 1)\right\}$$
$$\le \exp\left\{\frac{\mu^2 hD}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y)e^{\mu y}(1 + \varepsilon(\lambda))\right\}. \quad (1.14)$$

Положим

$$\mu = \frac{1}{y}\ln T, \quad T = \frac{r}{nV(y)}.$$

Тогда $\lambda = \ln T \to \infty$ при $nV(y) \to 0$ и

$$\max_{k\le n} \prod_{i=1}^k R_i(\mu, y) \le \exp\left\{\frac{\mu^2 hD}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + r(1 + \varepsilon(\lambda))\right\}, \quad (1.15)$$

где в силу [U] равномерно по $n$

$$V\left(\frac{1}{\mu}\right) = V\left(\frac{y}{\ln T}\right) \sim cV\left(\frac{y}{|\ln nV(y)|}\right) \le cV(y)\big|\ln nV(y)\big|^{\alpha+\delta}, \quad \delta > 0,$$

$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \le cnV(y)\big|\ln nV(y)\big|^{\alpha+\delta} \to 0 \quad \text{при } nV(y) \to 0.$$

Поэтому ввиду леммы 1.1

$$\ln P \le -r\ln T + r + \frac{hD}{2y^2}\ln^2 T + \varepsilon_1(T) = -\left[r - \frac{hD}{2y^2}\ln T\right]\ln T + r + \varepsilon_1(T), \quad (1.16)$$

где $\varepsilon_1(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Согласно $[U_1]$ имеем $\ln T = -\ln nV(x) + O(1)$. Оценим $nV(x)$ снизу. Из условий $[\mathrm{U}_2]$ следует, что при $x > T_\delta$ выполняется

$$nV(x) \geq J(n,\delta)x^{-\alpha-\delta}. \tag{1.17}$$

Поэтому, полагая $J = J(n,\delta)$, $\rho = \frac{J}{D}$, $\alpha^* = \alpha+\delta$, получим, что при $x = s\sigma(n) \to \infty$, $\sigma(n) = \sqrt{(\alpha-2)D\ln D}$ будет

$$\begin{aligned} nV(x) \geq Jx^{-\alpha^*} = Js^{-\alpha^*}(\alpha-2)^{-\alpha^*/2}D^{-\alpha^*/2}(\ln D)^{-\alpha^*/2} \\ = cD^{\frac{2-\alpha^*}{2}}s^{-\alpha^*}(\ln D)^{-\alpha^*/2}\rho. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \ln T = -\ln nV(x) + O(1) \leq \frac{\alpha^*-2}{2}\ln D + \alpha^*\ln s - \ln\rho + \frac{\alpha^*}{2}\ln\ln D + O(1) \\ = \frac{\alpha^*-2}{2}\ln D\left[1 + \frac{2\alpha^*}{\alpha^*-2}\frac{\ln s}{\ln D} - \frac{2}{\alpha^*-2}\frac{\ln\rho}{\ln D}\right](1+o(1)). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Так как $s \geq 1$, $\rho \leq 1$, $\frac{2\alpha^*}{\alpha^*-2} \leq \frac{2\alpha}{\alpha-2}$, $\frac{1}{\alpha^*-2} \leq \frac{1}{\alpha-2}$, получаем

$$\ln T \leq \frac{\alpha^*-2}{2}\ln D\left[1 + b\frac{\ln s}{\ln D} - \frac{2}{\alpha-2}\frac{\ln\rho}{\ln D}\right](1+o(1)). \tag{1.20}$$

Поясним, почему относительный остаточный член в (1.19) имеет вид $o(1)$. Сходимость $x \to \infty$, необходимая для сходимости $nV(x) \to 0$, означает, что либо $s \to \infty$, либо $D \to \infty$. Если $s \to \infty$, $D < c$, то значение в квадратных скобках в (1.19) неограниченно возрастает. Поэтому слагаемые $\frac{\alpha}{2}\ln\ln D + O(1)$ дадут $o(1)$ в качестве множителя к квадратным скобкам. В случае $D \to \infty$ выполняется $\ln D \to \infty$ и мы вновь по той же причине получим $o(1)$.

Из (1.19) и последующего соотношения вытекает, что

$$\frac{hD}{2y^2}\ln T \leq \frac{hr^2}{4s^2}\left(1 + \frac{\delta}{\alpha-2}\right)\left[1 + b\frac{\ln s}{\ln D} - \frac{2}{\alpha-2}\frac{\ln\rho}{\ln D}\right](1+o(1)). \tag{1.21}$$

Так как $\delta$ можно выбирать сколь угодно малым, то в силу (1.16) при новом, чуть большем, чем выбранное ранее, значении $h$

$$\ln P \leq r - \left\{r - \frac{hr^2}{4s^2}\left[1 + b\frac{\ln s}{\ln D} + \chi\right]\right\}\ln T.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Воспользуемся (1.14) и положим

$$\mu = \frac{x}{Dh}.$$

Тогда при $y = x$ $(r = 1)$ в силу (1.13)

$$\begin{aligned} \ln P \leq -\mu x + \frac{\mu^2 hD}{2} + cnV\left(\frac{1}{\mu}\right) + nV(y)e^{\mu y}(1+o(1)) \\ = -\frac{x^2}{2Dh} + cnV\left(\frac{Dh}{x}\right) + e^{\frac{x^2}{Dh}}nV(x)(1+o(1)). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь при $s^2 \leq c$ вследствие [U]

$$nV\left(\frac{Dh}{x}\right) \leq c_1 nV\left(\sqrt{\frac{D}{\ln D}}\right),$$

где при $t \ge T_\delta$

$$V(t) \le V(T_\delta)\left(\frac{t}{T_\delta}\right)^{-\alpha+\delta}.$$

Поэтому для $\delta < 2-\alpha$ при $\alpha_* = \alpha - \delta$ в силу (1.4), (1.9) находим

$$nV\left(\frac{Dh}{x}\right) \le c_2 D^{-\frac{\alpha_*}{2}} J \le c_3 D^{1-\frac{\alpha_*}{2}} \to 0 \quad \text{при } D \to \infty. \tag{1.23}$$

Далее, для последнего слагаемого в (1.21) при

$$\frac{(\alpha_*-2)(h-\tau)}{2(\alpha-2)} \ge s^2 \ge \frac{1}{(\alpha-2)\ln D} \tag{1.24}$$

(напомним, что $x \ge \sqrt{D}$) аналогично в силу (1.9) находим

$$\begin{gathered} nV(x) \le c_1 x^{-\alpha_*} J(n,\delta) < c_2 s^{-\alpha_*} D^{1-\frac{\alpha_*}{2}} \le c_2 D^{1-\frac{\alpha_*}{2}} (\ln D)^{\frac{\alpha_*}{2}}, \\ \frac{x^2}{Dh} \le \frac{(h-\tau)(\alpha_*-2)\ln D}{2h} = \left[\frac{\alpha_*-2}{2} - \frac{\tau(\alpha_*-2)}{2h}\right]\ln D. \end{gathered} \tag{1.25}$$

Поэтому

$$nV(x) e^{\frac{x^2}{Dh}} \le D^{-\frac{\tau(\alpha_*-2)}{2h}} (\ln D)^{\frac{\alpha_*}{2}} \to 0 \tag{1.26}$$

при $D \to \infty$. Таким образом,

$$\ln P \le -\frac{x^2}{2Dh} + o(1). \tag{1.27}$$

Слагаемое $o(1)$ в последнем соотношении можно убрать, чуть изменив $h > 1$. Так как выбором $\delta$ отношение $\frac{\alpha_*-2}{\alpha-2}$ в (1.24) может быть сделано сколь угодно близким к 1, то верхнюю границу для $s^2$ в (1.24) можно заменить на $s^2 \le \frac{h-\tau}{2}$, вновь чуть изменив при необходимости $h$ или $\tau$.

Второе утверждение теоремы доказано.

Для доказательства третьего утверждения, когда выполнены «индивидуальные» условия [U] для распределений $F_j$, оценки для $R_j(\mu, y)$ следует проводить «индивидуально» для каждого $j$. При этом все рассуждения, приведенные выше для «усредненных» оценок, полностью сохранятся, так как теперь условиям равномерности [U] удовлетворяют «индивидуальные» распределения. Далее, соотношения (1.17), (1.19) сохранятся, если в них $\alpha$ заменить на $\alpha^0 = \max\limits_{j\le n} \alpha_j$ и положить $\alpha^* = \alpha^0 + \delta$. В доказательстве второго утверждения $\alpha$ надо заменить на $\alpha_0 = \min\limits_{j \le n} \alpha_j$ и положить $\alpha_* = \alpha_0 - \delta$. Неравенства (1.25), (1.26) сохранятся при

$$\frac{1}{(\alpha^*-2)\ln D} \le s^2 \le \frac{(h-\tau)(\alpha_0-2)}{2(\alpha^0-2)}.$$

Теорема доказана.

**1.2. Оценки сверху для распределений $\overline{S}_n$. Вторая версия условий.**

Наряду с условиями $[\,<\,]_{\mathrm{U}}$ можно рассмотреть близкую, но несколько упрощенную версию, аналогичную условиям [UR] в [13]. Это позволит избавиться от дополнительного не совсем удобного условия [J], присутствующего в следствиях 1.1, 1.2.

Мы будем говорить, что *выполнено условие* $[<]_{\mathrm{UR}}$ если $\overline{F}(t)$ допускает мажоранту $V(t)$, удовлетворяющую следующему соотношению.

$[\,\mathrm{UR}\,]$ *Имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to\infty}} \frac{nV(t)}{H(n)V_0(t)} = 1, \tag{1.28}$$

*где $H(n) \le n$ — неубывающая функция, $H(1) = 1$, $V_0$ — фиксированная (не зависящая от $n$) п.м.ф.*

*Если при изучении $\mathbf{P}(\overline{S}_n > x)$ значение $n$ остается фиксированным при $x \to \infty$, то условия $[<]_{\mathrm{UR}}$ будут означать, что правильно меняющаяся мажоранта*

$$V(t) = V_0(t)$$

*фиксирована.*

Нетрудно видеть, что условия $[\mathrm{UR}\,]$ влекут за собой $[\mathrm{U}]$.

Соотношение (1.28) означает, очевидно, что для заданного $\delta > 0$ найдутся $n_\delta$ и $t_\delta$ такие, что

$$nV(t) = \bigl(1 + \delta(n,t)\bigr)H(n)V_0(t),$$

где $\bigl|\delta(n,t)\bigr| \le \delta$ при $n \ge n_\delta$, $t \ge t_\delta$.

**Теорема 1.2.** *Пусть $\mathbf{E}\xi_j = 0$, усредненное распределение $F$ удовлетворяет условиям $[<]_{\mathrm{UR}}$. Тогда*

(i) *Справедливо утверждение* (i) *теоремы* 1.1, *в котором следует положить $\rho = \min\bigl(1, \frac{H(n)}{D_n}\bigr)$, так что $\rho \ge D_n^{-1}$, $\chi \le \frac{2}{\alpha-2}$.*

(ii) *Пусть $n \to \infty$, $D = D_n$. Тогда при*

$$x = s\sigma(n) \ge \sqrt{D}, \quad s \le s_0, \quad H(n) \le D^{\frac{\alpha}{2} - s_0^2(\alpha-2)} \tag{1.29}$$

*и всех достаточно больших $n$ выполняется* (1.8).

Отметим, что в примере 1.1 при $c_i = i^{-\gamma}$, $\gamma \ge 0$, выполняется $D_n \sim \frac{1}{1-2\gamma}\, n^{1-2\gamma}$, $H(n) \sim n^{1-\alpha\gamma} \ge 1$ при $\gamma \le 1/\alpha$, так что последнее неравенство в (1.29) эквивалентно неравенству $1 - \alpha\gamma < \frac{\alpha}{2}(1-2\gamma) - s_0^2(\alpha-2)(1-2\gamma)$ или, что то же, неравенству $s_0^2 < \frac{1}{2(1-2\gamma)}$.

Доказательство теоремы 1.2. Доказательство первого утверждения повторяет рассуждения в доказательстве теоремы 1.1 вплоть до соотношения (1.15). Далее, для любого фиксированного $\delta > 0$ будем иметь

$$nV\left(\frac{1}{\mu}\right) \sim H(n)V_0\left(\frac{1}{\mu}\right) \sim cH(n)V_0\left(\frac{y}{\ln H(n)V_0(y)}\right) \le cH(n)V_0(y)\bigl|\ln H(n)V_0(y)\bigr|^{\alpha+\delta} \to 0$$

при $nV(y) = H(n)V_0(y) \to 0$. Поэтому остается справедливым соотношение (1.13).

Как и в п. 1.1, оценим теперь $nV(x)$ снизу. В силу (1.28) при $n \ge n_\delta$, $x \ge t_\delta$

$$nV(x) \ge (1-\delta)H(n)V_0(x).$$

Полагая $\alpha' = \alpha + \delta$, $x = s\sigma(n)$, $\sigma(n) = \sqrt{(\alpha-2)D\ln D}$, получим аналогично (1.18)

$$nV(x) \ge cH(n)s^{-\alpha^*}D^{-\alpha^*/2}(\ln D)^{\alpha^*/2} = cs^{-\alpha^*}D^{(2-\alpha^*)/2}(\ln D)^{\alpha^*/2}\rho,$$

где $\rho = \frac{H(n)}{D_n}$. Отсюда следует справедливость (1.16) при новом значении $\rho$, относительно которого вновь можно предполагать, что $\rho \le 1$ (если значение $\rho > 1$ заменять на $\rho = 1$, то от этого оценки (1.16), (1.5) только ухудшатся). Все последующие рассуждения доказательства п. (i) теоремы 1.1 сохраняются. Так как $\rho \ge 1/D_n$, то $\chi \le \frac{2}{\alpha-2}$. В случае ограниченного $n$ рассуждения лишь упрощаются.

Доказательство второго утверждения теоремы также мало отличается от рассуждений в теореме 1.1. Выкладки до соотношения (1.23) остаются прежними (ссылку на условие [$\mathrm{U}_2$] надо заменить ссылкой на [UR]). Вместо (1.20) при $\alpha'' = \alpha - \delta$, $n \to \infty$, $s \le s_0$ в силу [UR] будем иметь

$$nV\left(\frac{Dh}{x}\right) = H(n)V_0\left(\frac{Dh}{x}\right)(1+o(1)) \le cH(n)\left(\sqrt{\frac{D}{\ln D}}\right)^{-\alpha''} \to 0$$

при достаточно малом $\delta > 0$ согласно (1.29). Далее, для последнего слагаемого в (1.23) находим при $\frac{1}{(\alpha+2)\ln D} \le s^2 \le s_0^2$ (напомним, что $x \ge \sqrt{D}$)

$$nV(x) \le cH(n)x^{-\alpha''} \le cH(n)D^{-\alpha''/2}, \quad \frac{x^2}{Dh} \le \frac{s^2(\alpha-2)\ln D}{h}.$$

Поэтому

$$nV(x)e^{\frac{x^2}{Dh}} \le cH(n)D^{\frac{s_0^2(\alpha-2)}{h} - \frac{\alpha''}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$, $H(n) \le D^{\alpha/2 - s_0^2(\alpha-2)}$ и достаточно малом $\delta$. Это вместе с (1.23) доказывает (1.27) и второе утверждение теоремы

Теорема доказана. $\square$

Нетрудно видеть, что утверждения следствий 1.1, 1.2 останутся справедливыми, если в них условия $[<]_{\mathrm{U}}$, [J] заменить условием $[<]_{\mathrm{UR}}$.

**1.3. Оценки снизу для распределений сумм $S_n$.** В основе оценок снизу лежит основное неравенство теоремы 1.2 в [13], в силу которого для $y = x + tK(n)$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \ge \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j(y)\big[1 - Q_n^{(j)}(t)\big] - \frac{1}{2}(n\overline{F}(y))^2,$$
$$\overline{F}_j(y) = F_j([y,\infty)), \quad \overline{F}(y) = F([y,\infty)),$$

где

$$Q_n^{(j)} = \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(j)}}{K(n)} \le -t\right), \quad S_n^{(j)} = S_n - \xi_j,$$

$K(n) > 0$ — произвольная последовательность (ср. также с теоремой 6.1 в [3]). Положим

$$D_n^{(j)} = D_n - d_j, \quad \overline{D}_n = \max_{j \le n} D_n^{(j)} \le D_n,$$

где, как и прежде, $d_j = \mathbf{E}\xi_j^2 < \infty$, $D_n = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j$.

Заметим, что так как $\overline{D}_n = D_n - \min\limits_{j\le n} d_j$, то при $n \ge 2$ всегда $\overline{D}_n \ge D_n\big(1 - \frac{1}{n}\big)$, так что $\overline{D}_n = D_n(1+o(1))$ при $n \to \infty$.

Положим $K(n) = \sqrt{\overline{D}_n}$. Тогда в силу неравенства Чебышева

$$Q_n^{(j)}(t) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(j)}}{\sqrt{\overline{D}_n}} \le -t\right) \le \mathbf{P}\left(\frac{S_n^{(j)}}{\sqrt{D_n^{(j)}}} \le -t\right) \le t^{-2},$$

и мы получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$, $\mathbf{E}\xi_j^2 = d_j < \infty$. *Тогда для* $y = x + t\sqrt{D_n}$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq n\overline{F}(y)\left(1 - t^{-2} - \frac{1}{2}n\overline{F}(y)\right).$$

Это утверждение почти совпадает по форме с теоремой 6.3 в [3] (для одинаково распределенных слагаемых).

**Следствие 1.3.** *При* $x^2 \gg D_n$, $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq n\overline{F}(y)(1 + o(1)).$$

Доказательство следствия 1.3. Если $x^2 \gg D_n$, то

$$n\overline{F}(y) \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{F}_j(x) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{x^2} = \frac{D_n}{x^2} \to 0.$$

Полагая $t \to \infty$, получим из теоремы 1.3 требуемое утверждение.

**Следствие 1.4.** *Пусть* $x^2 \gg D_n$, *а усредненное распределение* $F$ *допускает миноранту* $V(u) \leq \overline{F}(u)$, $u > 0$, *удовлетворяющую условию* $[\mathrm{U}_1]$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > x) \geq nV(x)(1 + o(1)).$$

Доказательство следствия 1.4 вполне очевидно. Оно вытекает из следствия 1.3, так как при выполнении условий $[\mathrm{U}_1]$, $x^2 \gg D_n$ и $t = o\big(\frac{x}{\sqrt{D_n}}\big)$ справедливо $x \sim y$, $nV(y) \sim nV(x)$.

## § 2. Асимптотика вероятности пересечения произвольной удаленной границы

Для распределений $\overline{S}_n$ и $S_n$ нужную нам асимптотику при несколько завышенных условиях можно получить из оценок § 1. Аналогично предыдущему мы будем говорить, что усредненное распределение $F = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} F_j$ удовлетворяет условиям $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$ ($[\,=\,]_{\mathrm{UR}}$), если функция $V(t) = F([t,\infty))$ удовлетворяет условиям [U] ([UR]) § 1. Напомним также, что условие [J] § 1 состоит в том, что

[J] *При каких-нибудь* $\delta \in (0, \min(1, \alpha - 2))$, $\gamma \geq 0$

$$J(n,\delta) = T_\delta^{\alpha+\delta} nV(T_\delta) \geq cD^{-\gamma},$$

*где* $T_\delta$ *из условий* [U].

Из следствий 1.2 и 1.4 вытекает

**Теорема 2.1.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$ *и усредненное распределение* $F$ *удовлетворяет условиям* $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$, [J], $x \gg \sqrt{D_n \ln D_n}$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > x) = nV(x)(1 + o(1)), \quad \mathbf{P}(\overline{S}_n > x) = nV(x)(1 + o(1)). \tag{2.1}$$

*Утверждение остается справедливым, если условия* $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$, [J] *заменить условием* $[\,=\,]_{\mathrm{UR}}$.

Теорему 2.1 можно усилить, а именно указать в явном виде значение $c$ такое, что соотношения (2.1) будут справедливы при $x = s\sqrt{(\alpha-2)D\ln D}$, $s \geq c$.

Для этого потребуется более детальный анализ, аналогичный тому, который проведен в теореме 2 в [5].

Утверждению теоремы можно придать равномерный характер — такой же, как в теореме 2.2 в [13]. Это следует из того, что все оценки сверху и снизу, полученные выше, носили явный, равномерный характер.

Кроме того, теорему 2.1 можно обобщить на случай произвольных границ. Однако в этом случае более естественно иметь дело с «индивидуальными» условиями (см. § 1), когда условиям $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$ удовлетворяет каждый из хвостов $V_j$.

Пусть $\mathscr{G}_{x,n}$ — класс границ $\{g(k)\}$, для которых $\min\limits_{k\le n} g(k)=cx$ при некотором фиксированном $c>0$. Справедлив следующий аналог теоремы 2.2 в [13] для вероятности события:

$$G_n=\{\max_{k\le n}(S_k-g(k))>0\}.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j=0$ *и распределения* $F_j$ *равномерно по* $j$ *и* $n$ *удовлетворяют условиям* $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$ *при одном и том же* $\alpha=\alpha_j$, $j=1,\dots,n$. *Пусть, кроме того, усредненное распределение* $F$ *удовлетворяет условию* [J]. *Тогда найдется* $c_1<\infty$ *такое, что при* $x>c_1\sqrt{D\ln D}$, $x\to\infty$

$$\mathbf{P}(G_n)=\left[\sum_{j=1}^{n}V_j(g_*(j))\right](1+o(1))+O(n^2V^2(x)), \tag{2.2}$$

*где* $g_*(j)=\min\limits_{k\ge j} g(k)$, *оценки* $o(\cdot)$ *и* $O(\cdot)$ *равномерны в классе границ* $\mathscr{G}_{x,n}$ *и в классе* $\mathscr{F}$ *распределений* $\{F_j\}$, *удовлетворяющих условиям* $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$, [J] *или* $[\,=\,]_{\mathrm{UR}}$.

Из соотношений (2.2) следует, что в случае

$$\max_{k\le n} g(k)<c_1x \tag{2.3}$$

выполняется

$$\mathbf{P}(G_n)\sim\sum_{j=1}^{n}V_j(g_*(j)). \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.2 вполне аналогично доказательству теоремы 2.2 в [13] и почти полностью повторяет его рассуждения с точностью до очевидных изменений, связанных с конечностью $d_j=\mathbf{E}\xi_j^2$. Поэтому останавливаться на нем не будем.

Здесь могут быть получены также аналоги всех основных утверждений [13] о вероятности пересечения произвольной границы на *неограниченном* интервале времени. Кратко остановимся на них. Будем рассматривать класс границ $\{g(k)\}$ вида

$$g(k)=x+g_k,\quad k=1,2,\dots, \tag{2.5}$$

определенных на всей оси и заключенных между двумя линейными функциями:

$$b_1ak-p_1x\le g_k\le b_2ak+p_2x,\quad p_1<1,\quad 0<b_1\le b_2<\infty,\quad k=1,2,\dots, \tag{2.6}$$

где постоянные $b_i$ и $p_i$, $i=1,2$, от параметра схемы серий не зависят, а переменная $a$, $0<a\le a_0=\mathrm{const}$, может сходиться к нулю. Основной интерес для нас представляют асимптотические представления для $\mathbf{P}(G_n)$,

a) равномерные по $a$ при $a\to 0$;

b) при $n$, растущих быстрее, чем $\frac{cx}{a}$, в частности при $n=\infty$.

В связи со сказанным, в дальнейшем нам удобно будет считать, что задана бесконечная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$, а параметр схемы серий отождествлен с $a$. Если рассматриваются растущие значения $n$, то их следует рассматривать как функции $n = n(a) \to \infty$ при $a \to 0$.

Положим $n_1 = \frac{x}{a}$ и введем аналогично [13] «усредненные мажоранты»

$$V_{(1)}(x) = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} V_j(x)$$

(считаем для простоты, что $\frac{x}{a}$ — целое число). Нам понадобится следующее условие однородности.

[H] *При* $n_k = 2^{k-1} n_1$ *и всех* $k = 1, 2, \dots$ *и* $t > 0$

$$c_{(1)} V_{(1)}(t) \le \frac{1}{n_k} \sum_{j=n_k}^{2n_k} \overline{F}_j(t) \le c_{(2)} V_{(1)}(t), \quad \frac{c_{(1)}}{n_1} D_{n_1} \le \frac{1}{n_k} D_{n_k} \le \frac{c_{(2)}}{n_1} D_{n_1},$$

где $c_{(i)} > 0$, $i = 1, 2$, фиксированы (от $a$ не зависят). Последнее неравенство, по существу, означает почти линейный рост $D_n$ с ростом $n$.

Пусть

$$\overline{S}_n(a) = \max_{k \le n} (S_k - ak), \quad \eta(x, a) = \min\{k : S_k - ak > x\},$$

$$B_j(v) = \{\xi_j \le y + vaj\},\ v > 0, \quad B(v) = \bigcap_{j=1}^{n} B_j(v).$$

Следующее утверждение содержит оценки вероятностей $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x, B(v))$, $\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x)$ и $\mathbf{P}\big(\infty > \eta(x, a) > \frac{xt}{a}\big)$ при $n \ge n_1 = \frac{x}{a}$ (при $n \le n_1$ такие оценки можно получать из теоремы 2.2). Так как $n \to \infty$ при $x \to \infty$, ниже под условием [U] можно понимать ослабленное условие [$\mathrm{U}^\infty$].

**Теорема 2.3.** 1. *Пусть усредненное распределение* $F_{(1)} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} F_j$ *при* $n_1 = \frac{x}{a}$ *удовлетворяет условиям* $[<]_{\mathrm{U}}$, [J] (*при замене в последнем* $n$ *на* $n_1$). *Пусть, кроме того, выполнено* [H]. *Тогда при* $n \ge n_1$, $x > \frac{c|\ln a|}{a}$, $v \le \frac{1}{4r}$, $r = \frac{x}{y} > \frac{5}{2}$ *справедливы неравенства*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x, B(v)) \le c_1 [n_1 V_{(1)}(x)]^{r^*}, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le c_1 n_1 V_{(1)}(x), \tag{2.8}$$

*где* $r^* = \frac{r}{2(1+vr)}$, *постоянные* $c$ *и* $c_1$ *определены в доказательстве.*

*Кроме того, при любом фиксированном или достаточно медленно растущем* $t$

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta(x, a) > \frac{xt}{a}\right) \le c_2 n_1 V_{(1)}(x) t^{1-\alpha}. \tag{2.9}$$

*Если* $t$ *стремится к* $\infty$ *вместе с* $x$ *произвольным образом, то неравенство* (2.9) *сохранится, если показатель* $1 - \alpha$ *в нем заменить на* $1 - \alpha + \varepsilon$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$.

2. *Пусть выполнены условия п. 1 теоремы, в которых область изменения* $x$ *заменена на*

$$x < \frac{c|\ln a|}{a}$$

*и предполагается дополнительно, что $D_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда при любом фиксированном $h > 1$ и всех достаточно больших $n$*

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le c_1 e^{-\frac{xa}{2dh}}, \quad d = \frac{D_{n_1}}{n_1}.$$

*Если $x = o\left(\frac{|\ln a|}{a}\right)$, то при любом фиксированном или достаточно медленно растущем $t$*

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{xt}{a}\right) \le c_1 e^{-\gamma t}, \tag{2.10}$$

*где постоянные $\gamma$ и $c_1$ могут быть найдены в явном виде.*

*Утверждение остается справедливым, если условия $[=]_{\mathrm{U}}$, [J] заменить условием $[=]_{\mathrm{UR}}$.*

Из теоремы вытекает существование постоянных $\gamma > 0$ и $c < \infty$ таких, что при $n \ge n_1 = \frac{x}{a}$ и всех $x$ выполняется

$$\mathbf{P}(\overline{S}_n(a) > x) \le c \max\left[e^{-\gamma\frac{xa}{d}}, \frac{x}{a}V(x)\right]. \tag{2.11}$$

Доказательство теоремы повторяет доказательства теоремы 3.1 в [13]. Различие состоит лишь в том, что теперь мы при $n = n_1$ пользуемся теоремой 1.1. Изменение по сравнению с теоремой 3.1 в [13] показателя у произведения $n_1 V_{(1)}(x)$ в (2.7) (замена $r_0$ в (3.6) в [13] на $r^* = \frac{r_0}{2}$ в (2.7)) объясняется тем, что мы можем пользоваться неравенством (1.6) теоремы 1.1 лишь с показателем в правой части, равным $r/2$, если обеспечим неравенство $\theta \le \frac{r}{2}$. Последнее неравенство будет выполнено, если

$$s^2 = c\frac{x^2}{n_1 \ln n_1} > c_3 \tag{2.12}$$

при подходящей постоянной $c_3$. Нетрудно видеть, что (2.12) будет верно, если

$$x > \frac{c_4|\ln a|}{a} \quad (\text{или } a > \frac{c_4 \ln x}{x})$$

при подходящем $c_4$. Все остальные рассуждения повторяют доказательства теоремы 3.1 в [13].

Вернемся к рассмотрению границ более общего вида. Положим

$$\eta_g(x) = \min\{k : S_k - g_k > x\}.$$

**Следствие 2.1.** *Пусть выполнены условия п. 1 теоремы 2.3 и условия (2.6). Тогда при ограниченных или достаточно медленно растущих значениях $t$*

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta_g(x) > \frac{xt}{a}\right) \le \frac{cxV_{(1)}(x)t^{1-\alpha}}{a}. \tag{2.13}$$

*Если $t$ стремится к $\infty$ произвольным образом, то неравенство (2.13) остается справедливым, если показатель $1-\alpha$ в нем заменить на $1-\alpha+\varepsilon$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы 2.3 и неравенства (см. (2.6))

$$\mathbf{P}\left(\infty > \eta_g(x) > \frac{xt}{a}\right) \le \mathbf{P}\left(\infty > \eta(x(1-p_1), c_1 a) > \frac{xt}{a}\right).$$

Аналогичное следствие можно получить в условиях п. 2 теоремы 2.3.

Положим

$$g_j^* = \min_{k \ge j} g_k$$

и отождествим параметр схемы серий с $a$. Нетрудно видеть, что $g_j^*$ не убывают и вместе с $g_j$ удовлетворяют неравенствам (2.6).

**Теорема 2.4.** *Пусть* $\mathbf{E}\xi_j = 0$ *и распределения* $F_j$ *равномерно по* $j$ *и* $a$ *удовлетворяют условиям* $[=]_{\mathrm{U}}$ *при одном и том же* $\alpha = \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots$. *Пусть, кроме того, выполнены условия* [H], (2.5), (2.6), *а усредненное распределение* $F_{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum\limits_{j=1}^{n_1} F_j$ *при* $n = n_1 = \frac{x}{a}$ *удовлетворяет условию* [J]. *Пусть* $x > \frac{c|\ln a|}{a}$ *при подходящем* $c$ (*см. доказательство теоремы* 2.3). *Тогда*

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} V_j\bigl(x + g_j^*\bigr)\right](1 + o(1)), \tag{2.14}$$

*где оценка* $o(\cdot)$ *равномерна по* $a \le a_0 = \mathrm{const}$ *и по классам распределений* $\{F_j\}$ *и границ* $\{g_k\}$, *удовлетворяющим условиям теоремы.*

*Утверждение остается справедливым, если условия* $[=]_{\mathrm{U}}$, [J] *заменить условием* $[=]_{\mathrm{UR}}$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3.2 в [13] с очевидными изменениями.

Если условия однородности хвостов и границ несколько усилить, то можно получить более простую запись правой части в (2.14). Введем в рассмотрение следующее условие.

$[\mathrm{H}_\Delta]$ *Пусть выполнено* [H] *и для любого фиксированного* $\Delta > 0$ *и* $n_\Delta = \left[\frac{x\Delta}{a}\right] = [n_1\Delta]$ *существуют мажоранты* $V_j$ *такие, что равномерно по* $k$ *и по* $a \le a_0$ *выполнены соотношения*

$$\frac{1}{n_\Delta}\sum_{j=kn_\Delta+1}^{(k+1)n_\Delta} V_j(x) \sim V_{(1)}(x), \quad \frac{1}{n_\Delta}(D_{(k+1)n_\Delta} - D_{kn_\Delta}) \sim \frac{1}{n_1}D_{n_1},$$

$$\frac{1}{n_\Delta}(g_{(k+1)n_\Delta} - g_{kn_\Delta}) \sim ga$$

*при* $n \to \infty$.

**Следствие 2.2.** *Пусть усредненное распределение* $F_{(1)} = \frac{1}{n_1}\sum\limits_{j=1}^{n_1} F_j$ *удовлетворяет условиям* $[=]_{\mathrm{U}}$, [J] *при* $n{=}n_1$. *Пусть, кроме того,* $x > \frac{c|\ln a|}{a}$, *выполнено условие* $[\mathrm{H}_\Delta]$ *и для определенности* $g_1 = o(x)$. *Тогда при* $a \to 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\ge 0}(S_k - g_k) > x) \sim \frac{1}{ga}\int\limits_x^{\infty} V_{(1)}(u)du \sim \frac{xV_{(1)}(x)}{ga(\alpha - 1)}.$$

*Утверждение остается справедливым, если условия* $[=]_{\mathrm{U}}$, [J] *заменить условием* $[=]_{\mathrm{UR}}$.

Доказательство следствия 2.2 повторяет рассуждения в доказательстве следствия 3.2 в [13].

Из следствия 2.2 вытекает

**Следствие 2.3.** *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *при каждом* $a$ *одинаково распределены* ($F_j = F$, $V_j = V$, $d_j = d < \infty$) *и выполнены условия* $[=]_{\mathrm{U}}$ *и условие* [J] *при* $n = n_1 = \frac{x}{a}$. *Тогда если* $x > \frac{c|\ln a|}{a}$ (см. теорему 2.3), *то при* $a \to 0$

$$\mathbf{P}(\overline{S}_\infty(a) > x) \sim \frac{xV(x)}{a(\alpha - 1)}.$$

*Утверждение остается справедливым, если условия* $[\,=\,]_{\mathrm{U}}$, [J] *заменить условием* $[\,=\,]_{\mathrm{UR}}$.

Ясно, что утверждениям следствий 2.2, 2.3 можно придать равномерный характер — так же, как в теореме 2.4.

## § 3. Принцип инвариантности. Переходные явления

В этом параграфе нет необходимости подробно останавливаться на принципе инвариантности и переходных явлениях, поскольку эти разделы уже достаточно полно освещены в существующей литературе (с той лишь оговоркой, что переходные явления изучались только для одинаково распределенных скачков, см., например, [14–16]). Мы напомним здесь основные результаты в названных областях (для полноты картины) и приведем краткие пояснения в тех случаях, когда эти результаты будут обобщены.

**3.1. Принцип инвариантности.** Пусть, как и прежде, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины в схеме серий,

$$\mathbf{E}\xi_j = 0, \quad d_j = \mathbf{E}\xi_j^2 < \infty, \quad D_n = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

В этом случае условием, определяющим сходимость $\frac{S_n}{\sqrt{D_n}}$ по распределению к нормальному закону, является условие Линдеберга:

[L] *имеет место соотношение*

$$\frac{1}{D_n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\big(\xi_j^2; |\xi_j| > \tau\sqrt{D_n}\big) \to 0$$

*при любом фиксированном* $\tau > 0$ *и* $n \to \infty$ (см., например, [17, 18]).

Для того чтобы обеспечить сходимость процессов

$$\zeta_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{D_n}} \tag{3.1}$$

к стандартному винеровскому процессу $w(t)$, нужны также условия однородности:

$\big[\mathrm{H}_\Delta^D\big]$ *Для любого фиксированного* $\Delta > 0$, $n_\Delta = [\Delta n]$ *и всех* $k \le \frac{1}{\Delta}$

$$\frac{1}{n_\Delta}\big(D_{(k+1)n_\Delta} - D_{kn_\Delta}\big) \sim \frac{D_n}{n} \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Пусть $C(0,T)$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[0,T]$ с равномерной метрикой. Траектории $\zeta_n(t)$ можно рассматривать как элементы пространства $D(0,1)$ функций без разрывов второго рода.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия* [L] *и* $\big[\mathrm{H}_\Delta^D\big]$. *Тогда для любого измеримого функционала* $f$ *на* $D(0,1)$, *непрерывного в равномерной метрике в точках пространства* $C(0,1)$, *имеет место слабая сходимость распределений*

$$f(\zeta_n) \Longrightarrow f(w),$$

*где $w$ — стандартный винеровский процесс.*

Наряду с процессом (3.1) часто рассматривают непрерывный процесс $\tilde{\zeta}_n(t)$, определенный как непрерывная ломаная, построенная по узлам с координатами $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{D_n}}\right)$. Тогда утверждение теоремы 3.1 можно сформулировать как слабую сходимость распределений $\tilde{\zeta}_n$ и $w$ в метрическом пространстве $C(0,1)$ с $\sigma$-алгеброй борелевских множеств (совпадающей с $\sigma$-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами).

Доказательство теоремы 3.1 следует стандартному пути: надо доказать сходимость конечномерных распределений и компактность семейства распределений процессов $\zeta_n$ (см., например, [18]).

Утверждение теоремы 3.1 для ее использования ниже нам будет удобно записать в несколько иной форме. Пусть совокупность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ продолжена (или укорочена) до последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{[nT]}$, $T > 0$, и эта новая последовательность также удовлетворяет условиям [L] и $\left[\mathrm{H}_\Delta^D\right]$ (в условии [L] суммирование следует вести до значения $[nT]$, в условии $\left[\mathrm{H}_\Delta^D\right]$ индекс $k$ меняется в пределах от 1 до $\frac{T}{\Delta}$). Процесс $\zeta_n(t)$ (см. (3.1)) теперь будет определен на отрезке $[0,T]$.

**Следствие 3.1.** *Если совокупность $\xi_1, \dots, \xi_{[nT]}$ удовлетворяет условиям* [L], $\left[\mathrm{H}_\Delta^D\right]$, *то для любого измеримого функционала $f$, определенного на $D(0,T)$, непрерывного в равномерной метрике в точках $C(0,T)$, будет иметь место слабая сходимость*

$$f(\zeta_n) \Longrightarrow f(w)$$

*по распределению, где $w$ — стандартный винеровский процесс на $[0,T]$.*

**3.2. Переходные явления.** Существо переходных явлений описано достаточно полно в [14–16]. Здесь оно остается тем же. Основной результат для одинаково распределенных слагаемых $\xi_j$ состоит в том, что

$$\lim_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}_n(a) > z) = \mathbf{P}(\max_{t\le T}(\sigma w(t) - t) > z), \tag{3.2}$$

где $w$ — стандартный винеровский процесс, $n = Ta^{-2}$, $\sigma^2 = \lim\limits_{a\to 0} \mathbf{E}\xi_j^2$, где при $n = \infty$ ($T = \infty$) правая часть в (3.2) равна $e^{-\frac{2z^2}{\sigma^2}}$ (см., например, [15, 16], а также [14, гл. 4, § 24]).

Ниже мы получим обобщение этих результатов на случай разнораспределенных скачков $\xi_j$ в схеме серий. Пусть, как и прежде, $F_{(1)}$ — усредненное распределение:

$$F_{(1)}(t) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} F_j(t) \quad \text{при } n_1 = [a^{-2}].$$

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия* [L] *для $n = n_1 T$ при любом фиксированном $T$ и*

$$\frac{D_n}{n} \to \sigma^2 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.3}$$

*Пусть, далее, усредненное распределение $F_{(1)}$ удовлетворяет условиям* $[\,<\,]_{\mathrm{U}}$, [J] *(при замене в них $n$ на $n_1 = [a^{-2}]$). Тогда если выполнено условие* [H] § 2, *то при $n = [Ta^{-2}]$ существует предел (3.2). В частности, при $n = \infty$*

$$\lim_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}(a) > z) = e^{-\frac{2z^2}{\sigma^2}}. \tag{3.4}$$

*Утверждение остается справедливым, если условия* $[=]_{\mathrm{U}}$, [J] *заменить условием* $[=]_{\mathrm{UR}}$.

Отметим, что условие

$$\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\mathbf{E}|\xi_j|^\alpha < c < \infty \tag{3.5}$$

при некотором $\alpha > 2$ влечет за собой выполнение $[<]_{\mathrm{UR}}$ и [L]. Условие (3.5), в котором $|\xi_j|^\alpha$ заменено на $\left(\xi_j^+\right)^\alpha$ ($v^+ = \max(0,v)$), влечет за собой $[<]_{\mathrm{UR}}$ и «правостороннее» условие Линдеберга.

Доказательство теоремы 3.2. Так как (3.3) влечет за собой выполнение условия $\left[\mathrm{H}_\Delta^D\right]$ для $n = n_1T$, условия следствия 3.1 при $n = n_1T$ выполнены. При $\zeta_{n_1}(t) = \frac{S_{[n_1t]}}{\sqrt{D_{n_1}}}$, $n_1 = [a^{-2}]$ можно записать

$$a\overline{S}_n(a) = a\sqrt{D_{n_1}}\max_{k\le n}\left(\frac{S_k}{\sqrt{D_{n_1}}} - \frac{ak}{\sqrt{D_{n_1}}}\right) = a\sqrt{D_{n_1}}\max_{k\le n}\left(\zeta_{n_1}\left(\frac{k}{n_1}\right) - \frac{k\theta}{n_1}\right),$$

где $a\sqrt{D_{n_1}} \sim \sigma$, $\theta = \frac{an_1}{\sqrt{D_{n_1}}} \sim \sigma^{-1}$. Так как при $T < \infty$ функционал

$$f_T(\zeta) = \sup_{u\le T}\left(\zeta(u) - \frac{u}{\sigma}\right)$$

непрерывен в равномерной метрике и обладает свойством

$$\sigma f_T(\zeta_{n_1}) = \sigma\max_{k\le n}\left(\zeta_{n_1}\left(\frac{k}{n_1}\right) - \frac{k}{\sigma n_1}\right) = a\overline{S}_n(a)(1+o(1)) + o(1),$$

то в силу следствия 3.1 получаем (3.2).

Если $n = \infty$ ($T = \infty$), то надо воспользоваться теоремой 2.3. Выберем большое фиксированное число $T$ и обозначим $n_T = n_1T$. Тогда

$$\mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) = \mathbf{P}(a\overline{S}_{n_T}(a) > x) + \mathbf{P}\left(\infty > \eta\left(\frac{v}{a}, a\right) > n_T\right), \tag{3.6}$$

где

$$\eta(x,a) = \min\{k : S_k - ak > x\}.$$

Ввиду первого утверждения теоремы первое слагаемое в правой части (3.6) сходится при $a \to 0$ к $\mathbf{P}(Z(T) > v)$, где

$$Z(T) = \max_{t\le T}(\sigma w(t) - t).$$

Для второго слагаемого в (3.6) в силу неравенства (2.10) теоремы 2.3 получаем при $x = \frac{v}{a}$

$$R(v,T) \equiv \mathbf{P}\left(\infty > \eta\left(\frac{v}{a}, a\right) > n_T\right) = \mathbf{P}\left(\infty > \eta(x,a) > \frac{Tx}{av}\right) \le c_1e^{-\gamma\frac{T}{v}},$$

где правая часть выбором $T$ может быть сделана сколь угодно малой. Из сказанного следует, что

$$\varlimsup_{a\to 0}\mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) \le \mathbf{P}(Z(T) > v) + R(v,T) \le \mathbf{P}(Z(\infty) > v) + R(v,T). \tag{3.7}$$

Так как левая часть этого неравенства от $T$ не зависит, а правая может быть сделана сколь угодно близкой к $\mathbf{P}(Z(\infty) > v)$, то

$$\varlimsup_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) \le \mathbf{P}(Z(\infty) > v).$$

С другой стороны, при любом $T$

$$\varlimsup_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) \ge \mathbf{P}(Z(T) > v),$$

где $\mathbf{P}(Z(T) > v) \uparrow \mathbf{P}(Z(\infty) > v)$ при $T \uparrow \infty$. Учитывая, как и в (3.7), независимость левой части от $T$, получим

$$\varliminf_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) \ge \mathbf{P}(Z(\infty) > v).$$

Отсюда следует, что существует

$$\lim_{a\to 0} \mathbf{P}(a\overline{S}(a) > v) = \mathbf{P}(Z(\infty) > v).$$

Существование предела (3.2) в случае $n = \infty$ $(T = \infty)$ доказано.

Для отыскания явного вида (3.4) предельного распределения для $a\overline{S}(a)$ можно воспользоваться «принципом инвариантности» (3.2), доказанным в первой части теоремы, в силу которого предельное распределение $a\overline{S}(a)$ при выполнении условий теоремы 3.2 от распределений $F_j$ не зависит. Поэтому при отыскании искомого предельного распределения мы можем считать, что $\xi_j$ одинаково распределены $(F_j = F_{(1)})$ и имеют правый хвост $V(t) = \mathbf{P}(\xi_1 > t) = qe^{-\lambda_+ t}$, где $q < 1$, $q\lambda_+^{-1} = \mathbf{E}\xi_1^+$ $(v^+ = \max(0, v))$. В этом случае распределение $\overline{S}(a)$ известно в явном виде и также является экспоненциальным (с атомом в 0; см., например, [14]):

$$\mathbf{E}e^{\lambda\overline{S}(a)} = p + \frac{(1-p)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda},$$

$$\mathbf{P}(\overline{S}(a) > v) = (1-p)e^{-\lambda_1 v} \quad \text{при } v > 0, \quad p = \mathbf{P}(\overline{S}(a) = 0),$$

где $\lambda_1$ — решение уравнения $\psi(\lambda) = 1$, $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda(\xi - a)}$. Но в нашем случае при $\lambda \to 0$

$$\psi(\lambda) = 1 - \lambda a + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}(1 + o(1)),$$

так что

$$\lambda_1 \sim \frac{2a}{\sigma^2} \quad \text{при } a \to 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\left(\overline{S}(a) > \frac{v}{a}\right) = e^{-\frac{v}{a}\frac{2a}{\sigma^2}}(1 + o(1)) = e^{-\frac{2v}{\sigma^2}}(1 + o(1)).$$

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables // Ann. Probab. 1979. V. 7, N 5. P. 745–789.
2. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34, № 4. С. 686–705.
3. *Боровков А. А.* Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 997–1038.

**4.** *Боровков А. А.* Замечания о неравенствах для сумм независимых величин // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 3. С. 587–589.

**5.** *Боровков А. А., Боровков К. А.* О вероятностях больших уклонений случайных блужданий. I: Распределения с правильно меняющимися хвостами // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46, № 2. С. 209–232.

**6.** *Боровков А. А.* Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 4. С. 227–254.

**7.** *Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И.* Предельные теоремы для случайных процессов // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 82. (Итоги науки и техники).

**8.** *Боровков А. А.* Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, вып. 2. С. 137–171; 1960. Т. 5, вып. 4. С. 377–392.

**9.** *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.

**10.** *Боровков А. А.* Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 732–744.

**11.** *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1971. Т. 16, № 4. С. 660–675.

**12.** *Нагаев С. В.* О вероятностях больших уклонений в банаховом пространстве // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 309–313.

**13.** *Боровков А. А.* Большие уклонения для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечную дисперсию // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 46–70.

**14.** *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1972.

**15.** *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Литовск. мат. сб. 1963. Т. 3, № 1. С. 199–206.

**16.** *Kingman F. G.* On queues in heavy traffic // J. R. Statist. Soc. Ser. B. 1962. V. 24. P. 383–392.

**17.** *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.

**18.** *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.


*Статья поступила 21 сентября 2004 г.*

*Боровков Александр Алексеевич*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
borovkov@math.nsc.ru