Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.54

К ТЕОРИИ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. Г. Решетняк

Аннотация: Изучаются классы функций, принимающих значения в полном метрическом пространстве, которые могут считаться аналогом соболевских классов W_p^1. Ранее автором рассматривался случай функций, определенных в области пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь исследуется общий случай отображений, определенных на произвольном липшицевом многообразии. Приводятся необходимые вспомогательные сведения, рассматриваются некоторые примеры и описываются способы построения полунепрерывных снизу функционалов на классах $W_p^1(M)$, где M — липшицево многообразие.

Ключевые слова: соболевские пространства, липшицевы многообразия, функционалы вариационного исчисления, римановы пространства класса Lip, полунепрерывность функционалов.

Статья является продолжением работ автора [1, 2].

Далее $\mathbb{X}$ — сепарабельное полное метрическое пространство. Мы будем налагать на $\mathbb{X}$ также некоторые другие условия. Пусть Ω — область, т. е. связное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Согласно определению, данному в [1], отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega, \mathbb{X})$, если для всякой точки $z \in \mathbb{X}$ функция $[u]_z : x \in \Omega \mapsto d[u(x), z]$, где $d(y, z)$ — расстояние в $\mathbb{X}$, принадлежит классу $W_p^1(\Omega, \mathbb{R})$, причем существует функция $w \in L_p(\Omega)$ такая, что при любом $z \in \mathbb{X}$ для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|\nabla[u]_z(x)| \leq w(x)$.

В [1] рассматриваются только классы $W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega)$, $p \geq 1$. Ранее аналогичный подход был предложен Амбросио в работе [3] для определения классов BV отображений ограниченной вариации. В работе Кореваара и Шоэна [4] дан другой способ введения классов $W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\Omega)$, основанный на рассмотрении интеграла от разностного отношения. Как показано в работе автора [2], определение из работы [1] равносильно определению, данному в работе [4].

Цель настоящего сообщения — показать, каким образом подход к определению классов $W_{p,\mathrm{loc}}^1$, предложенный в работе [1], может быть распространен на случай, когда область определения отображения — некоторое липшицево многообразие.

Вопрос о построении классов функций, аналогичных соболевским классам W_p^1, для случая, когда область определения функции — метрическое пространство, наделенное мерой, удовлетворяющей определенным условиям, а область значений функции — числовая прямая, рассматривался многими авторами.
В связи с этим отметим работы Хайлаша [5], Бироли и Моско [6], В. М. Гольдштейна и М. Троянова [7] и работы А. С. Романова [8, 9].

1. О билипшицевых отображениях

Пусть дано множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ называется *билипшицевым*, если существует постоянная $L < \infty$ такая, что для любых двух точек $x, y \in G$ выполняются неравенства

$$\frac{|x-y|}{L} \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|. \tag{1}$$

Наименьшая из постоянных L, для которых (1) справедливо при любых $x, y \in G$, обозначается символом $L(\varphi)$. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ будем называть *локально билипшицевым*, если всякая точка $x \in \Omega$ имеет окрестность такую, что ограничение функции f на эту окрестность представляет собой билипшицево отображение. Согласно классической теореме Радемахера всякое билипшицево отображение φ почти всюду дифференцируемо. Его обычные производные являются также обобщенными в смысле С. Л. Соболева производными. Если отображение φ локально билипшицево, то любая точка его области определения Ω имеет окрестность, на которой обобщенные производные φ ограничены. О билипшицевом отображении будем говорить, что оно *принадлежит классу* $W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega)$. (Доказательство всех этих утверждений может быть найдено, например, в монографии [15].)

Если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — билипшицево отображение, то $\Sigma = \varphi(\Omega)$, очевидно, ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и обратное отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также билипшицево. При этом $L(\varphi) = L(\psi)$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что множество A *лежит строго внутри* Ω, если замыкание A компактно и содержится в Ω.

Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, есть отображение класса $W^1_p(\Omega)$. Символ $u'(x)$ означает матрицу Якоби отображения u в точке x, составленную из производных компонент вектор-функции u обычным образом, с той разницей, что производные понимаются как обобщенные в смысле С. Л. Соболева. Матрица $u'(x)$ имеет m строк и n столбцов и определена для п. в. $x \in \Omega$. Для произвольной $(m\times n)$-матрицы A символ $|A|$ далее означает операторную норму этой матрицы, т. е. $|A| = \sup\limits_{|\xi|\leq 1} |A\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если A, B — матрицы размерами $m \times n$ и $n \times r$, то $|AB| \leq |A|\cdot|B|$.

Лемма 1. *Пусть $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — отображение класса $\mathscr{C}^1$ такое, что матричная функция $F'(u)$ является ограниченной. Тогда для любой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, принадлежащей классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, функция $v = F \circ u$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причем имеет место равенство*

$$v'(x) = F'[u(x)]u'(x). \tag{2}$$

Доказательство. Рассуждения, которые приводятся далее, фактически повторяют рассуждения, содержащиеся в монографии [10]. Мы вынуждены повторить их, поскольку в [10] рассматривается только случай $m = 1$.

Предположим, что функции u и F удовлетворяют всем условиям леммы. Пусть u_ν, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — последовательность функций класса $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, сходящаяся к функции u в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $\nu \to \infty$. Это означает, что для всякого открытого множества U, лежащего строго внутри Ω, имеют место сходимости

$$\|u_\nu - u\|_{L_p(U)} \to 0, \quad \|u'_\nu - u'\|_{L_p(U)} \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Выберем произвольно множество U, лежащее строго внутри Ω. Положим $v_\nu(x) = F[u_\nu(x)]$. Пусть $K < \infty$ таково, что $|F'(y)| \leq K$ для всякого $y \in \mathbb{R}^m$. Тогда $|F(y_1) - F(y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$. Отсюда следует, что

$$|v_\nu(x) - v(x)| \leq K|u_\nu(x) - u(x)|$$

и, значит, $\|v_\nu - v\|_{L_p(U)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Каждая из функций v_ν принадлежит классу $\mathscr{C}^1(\Omega)$. При этом в соответствии с классическими формулами математического анализа для всякого ν

$$v'_\nu(x) = F'[u_\nu(x))]u'_\nu(x)$$

для любого $x \in \Omega$. Это позволяет заключить, что

$$|v'_\nu(x) - F'[u(x)]u'(x)| \leq |F'[u_\nu(x)]||u'_\nu(x) - u'(x)| + |F'[u_\nu(x)] - F'[u(x)]||u'(x)|.$$

В результате получаем оценку

$$\|v'_\nu - (F' \circ u)u'\|_{L_p(U)} \leq K\|u'_\nu - u'\|_{L_p(U)} + \left(\int\limits_U |F'[u_\nu(x)] - F'[u(x)]|^p |u'(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

Первый член правой части неравенства (3) стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Функции u_ν сходятся к функции u по мере. Матричная функция $F'(u)$ непрерывна, и $|F'[u_\nu(x)] - F'[u(x)]| \leq 2K$ для всех $x \in U$. Отсюда вытекает, что $|F'[u_\nu(x)] - F'[u(x)]| \to 0$ по мере при $\nu \to \infty$. Это позволяет заключить, что и второй член в правой части неравенства (3) стремится к нулю при $\nu \to \infty$.

Мы получаем, что матричные функции v'_ν при $\nu \to \infty$ сходятся в $L_p(U)$ к функции $F'[u(x)]u'$. Так как функции $v_\nu = F \circ u_\nu$ при $\nu \to \infty$ сходятся в $L_p(U)$ к функции $v = F \circ u$, из доказанного следует, что на множестве U для обобщенных производных функций v и u выполняется равенство (2).

Открытое множество U, лежащее строго внутри Ω, выбрано произвольно. Поэтому из доказанного вытекает, что $F'[u(x)]u'$ — обобщенный дифференциал функции v во всей области Ω и, следовательно, равенство (2) верно для п. в. $x \in \Omega$. $\square$

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — билипшицево отображение, $\Sigma = \varphi(\Omega)$. Тогда для всякой функции $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Sigma)$ функция $v = u \circ \varphi$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. При этом обобщенные производные функции $v = u \circ \varphi$ для п. в. $x \in \Omega$ выражаются через производные функций u и φ так же, как и в случае, когда u и φ суть функции класса $\mathscr{C}^1$ (с той разницей, что производные должны пониматься как обобщенные), т. е. для п. в. $x \in \Omega$ имеет место равенство*

$$v'(x) = u'[\varphi(x)]\varphi'(x). \quad (4)$$

Доказательство. Множество $\Sigma = \varphi(\Omega)$ является ограниченным, и отображение $\psi = \varphi^{-1}$, как и φ, билипшицево. Пусть $L = L(\psi) = L(\varphi)$.

Верна следующая формула замены переменных под знаком интеграла. Пусть $A \subset \Sigma$ — измеримое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $E = \varphi^{-1}(A) = \psi(A)$. Тогда

$$\int\limits_A F(y) \, dy = \int\limits_E F[\varphi(x)]|J(x, \varphi)| \, d(x), \quad (5)$$

где F либо интегрируемая по множеству A функция, либо неотрицательная измеримая функция, а $J(x,\varphi)$ означает якобиан отображения φ в точке x, т. е. определитель матрицы $\varphi'(x)$.

Для всякого $x \in \Omega$, для которого матрица Якоби $\varphi'(x)$ определена, имеет место неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq L.$$

Отсюда следует, что $|J(x,\varphi)| \leq L^n$ для п. в. $x \in \Omega$.

Точно так же заключаем, что для п. в. $y \in \Sigma$ имеет место неравенство $|J(y,\psi)| \leq L^n$. Пусть $u \in L_p(\Sigma)$ и $v = u \circ \varphi$. Тогда $u = v \circ \psi$. Применяя формулу замены переменных к отображению ψ и функции $F(y) = [u(y)]^p$, получим

$$\int\limits_{\Omega} |v(x)|^p\,dx = \int\limits_{\Sigma} |v[\psi(y)]|^p |J(y,\psi)|\,dy \leq L^n \int\limits_{\Sigma} |u(y)|^p\,dy$$

и, значит, $\|u \circ \varphi\|_{L_p(\Omega)} \leq L^{\frac{n}{p}} \|u\|_{L_p(\Sigma)}$. Отсюда вытекает, что если $u \in L_p(\Sigma)$, то $v = u \circ \varphi \in L_p(\Omega)$.

Аналогично заключаем, что если $u \circ \varphi \in L_p(\Omega)$, то $u \in L_p(\Sigma)$. Имеют место неравенства

$$\|u \circ \varphi\|_{L_p(\Omega)}\| \leq L^{\frac{n}{p}} \|u\|_{L_p(\Sigma)}, \quad \|u\|_{L_p(\Sigma)} \leq L^{\frac{n}{p}} \|u \circ \varphi\|_{L_p(\Omega)}.$$

Так как φ билипшицево, то $\varphi \in W^1_p(\Omega)$ для любого $p \geq 1$. Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $\mathscr{C}^1$. Лемма 1 позволяет заключить, что функция $v = u \circ \varphi$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для любого $p \geq 1$, причем имеет место равенство $v'(x) = u'[\varphi(x)]\varphi'(x)$ для п. в. $x \in \Omega$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ таковы, что замкнутый шар $\overline{B} = \overline{B}(x,r)$ содержится в области Ω. Множество $U = \varphi(B)$, очевидно, лежит строго внутри Σ. Пусть (u_ν), $\nu = 1, 2, \ldots,$ — последовательность функций класса $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ такая, что при $\nu \to \infty$

$$\|u_\nu - u\|_{L_p(U)} \to 0 \quad \text{и} \quad \|u'_\nu - u'\|_{L_p(U)} \to 0.$$

Такую последовательность (u_ν) можно получить, например, с помощью операции усреднения по С. Л. Соболеву.

Положим $v = u \circ \varphi$, $v_\nu = u_\nu \circ \varphi$, $V(x) = u'[\varphi(x)]\varphi'(x)$. Пусть $A \subset \Sigma$ — множество меры нуль такое, что матрица Якоби $u'(y)$ определена для всякого $y \notin A$, $E_1 = \varphi^{-1}(A) = \psi(A)$. Так как отображение ψ липшицево, оно преобразует всякое множество меры нуль в множество, мера которого также равна нулю, и, значит, мера E_1 равна нулю.

Пусть E_2 — множество тех $x \in \Omega$, для которых функция $\varphi(x)$ недифференцируема. Для всякого $x \notin E = E_1 \cup E_2$ матрица $V(x)$ определена. Из доказанного выше следует, что функции v_ν сходятся на шаре B в смысле метрики пространства $L_p(B)$. Для п. в. $x \in B$ имеем $v'_\nu(x) = u'_\nu[\varphi(x)]\varphi'(x)$, откуда

$$|v'_\nu(x) - V(x)| = |\{u'_\nu[\varphi(x)] - u'[\varphi(x)]\}\varphi'(x)|.$$

Отсюда заключаем, что

$$|v'_\nu(x) - V(x)| \leq L|[u'_\nu[\varphi(x)] - u'[\varphi(x)]|.$$

Следовательно,

$$\|v'_\nu - V\|_{L_p(B)} \leq L^{\frac{1}{p}} \|u'_\nu \circ \varphi - u' \circ \varphi\|_{L_p(B)} \leq L^{\frac{n+1}{p}} \|u'_\nu - u'\|_{L_p(U)}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\nu \to \infty$. Отсюда следует, что $\|v'_\nu - V\|_{L_p(B)} \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Таким образом, последовательность функций (v_ν), $\nu = 1, 2, \dots$, сходится в $L_p(B)$ к функции v, а матричные функции $v'_\nu(x)$ — в $L_p(B)$ к матричной функции $V(x)$. Отсюда вытекает, что ограничение функции $v = u \circ \varphi$ на шаре B принадлежит классу $W^1_p(B)$, причем п. в. на B имеет место равенство $v'(x) = V(x) = u'[\varphi(x)]\varphi'(x)$. Так как шар B, лежащий строго внутри Ω, был выбран произвольно, то тем самым установлено, что $v \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причем производные функции v выражаются через производные u и φ требуемым образом. □

2. Сравнение различных подходов для частного случая

Приведем здесь явные выражения для функционалов энергии, получаемых согласно определениям, данным в работах [1] и [4] для того частного случая, когда Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{H}$.

Определение класса $W^1_p(\Omega, \mathbb{X})$ из работы [4] в простейшей своей форме может быть представлено следующим образом. Пусть дано отображение $u : \Omega \to \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — полное метрическое пространство. Зададим произвольно число $h > 0$. Для $x \in \Omega$ полагаем

$$e_p(u, x, h) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left\{ \frac{d[u(x), u(y)]}{h} \right\}^p dy,$$

если шар радиусом h с центром в точке x содержится в множестве Ω. Если это условие не выполняется, то полагаем $e_h(x) = 0$. Пусть

$$\widetilde{E}_p(u, \Omega) = \sup_{f \in \mathscr{C}_0(\Omega),\, 0 \le f \le 1} \left\{ \limsup_{h \to 0} \int\limits_\Omega e_p(u, x, h) f(x)\, dx \right\}. \tag{6}$$

Величина $\widetilde{E}_p(u, \Omega)$ называется *функционалом энергии функции* $u : \Omega \to \mathbb{X}$ в классе $W^1_p(\Omega, \mathbb{X})$. Согласно определению из [4] функция $u : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу $W^1_p(\Omega, \mathbb{X})$, если $\widetilde{E}_p(u, \Omega) < \infty$.

Как показано в [4], для всякой функции $u \in W^1_p(\Omega, \mathbb{X})$ для п. в. $x \in \Omega$ существует конечный предел $\lim\limits_{h \to 0} e_p(u, x, h)$. Полагаем

$$\|\nabla u(x)\|_p = \{\lim_{h \to 0} e_p(u, x, h)\}^{\frac{1}{p}}$$

для всякого $x \in \Omega$, для которого указанный предел существует. Имеет место равенство

$$\widetilde{E}_p(u, \Omega) = \int\limits_\Omega \|\nabla u(x)\|_p^p\, dx. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbb{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, и пусть дано отображение $u : \Omega \to \mathbb{H}$. Предположим, что u принадлежит классу $\mathscr{C}^1(\Omega)$, т. е. существует непрерывная функция $u' : \Omega \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ со значениями в пространстве $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ линейных отображений $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{H}$, удовлетворяющая следующему условию. Для всякого $x \in \Omega$ справедливо асимптотическое соотношение

$$u(x + h) - u(x) = u'(x)h + o(h) \quad \text{при } h \to 0.$$

В случае, когда $\mathbb{H}$ конечномерно, данное определение совпадает с общепринятым.

Найдем значения величин $\|\nabla u(x)\|_p$ и $|\nabla u(x)|$ для того частного случая, когда $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство.

Пусть $u : \Omega \to \mathbb{H}$ — отображение класса $\mathscr{C}^1(\Omega)$, и пусть $u'(x)$ — дифференциал отображения u в точке $x \in \Omega$.

Пусть $z \in \mathbb{H}$. Функция $y \mapsto |y - z|$ дифференцируема в каждой точке $y \neq z$, и ее дифференциал есть линейный функционал, определенный соотношением

$$X \in \mathbb{H} \mapsto \langle \mathbf{e}(y, z), X \rangle,$$

где $\mathbf{e}(y, z) = \frac{y-z}{|y-z|}$. Для всякой точки $x \in \Omega$ такой, что $u(x) \neq z$, имеем равенство

$$d[u]_z(x)(\xi) = \langle \mathbf{e}(y, z), u'(x)(\xi) \rangle.$$

Отсюда

$$d[u]_z(x)(\xi) = \langle u'(x)^*[\mathbf{e}(y, z)], \xi \rangle,$$

где $u'(x)^* : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, сопряженное $u'(x)$.

Таким образом,

$$\nabla[u]_z(x) = u'(x)^*[\mathbf{e}(y, z)].$$

Пусть P — счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathbb{H}$. Векторы $\mathbf{e}(y, z)$, где $z \in P$, образуют счетное всюду плотное подмножество единичной сферы пространства $\mathbb{H}$. Отсюда следует, что

$$\sup_{z \in P} |\nabla[u]_z(x)| = \sup_{|\mathbf{e}|=1} |[u'(x)]^* \mathbf{e}| = \|[u'(x)]^*\|.$$

Величина $\|[u'(x)]^*\|$ — норма линейного отображения $[u'(x)]^*$.

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ суть гильбертовы пространства и $X : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ — линейное отображение, а $X^* : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_1$ — сопряженное ему отображение. Тогда имеет место равенство $\|X^*\| = \|X\|$. В частности,

$$\|[u'(x)]^*\| = \|u'(x)\| = \sup_{|\xi \leq 1} |u'(x)\xi|.$$

Функционал энергии $E_p(u, \Omega)$ в классе $W_p^1(\Omega)$ в смысле определения, данного в работе [1], таким образом, равен интегралу

$$\widetilde{E}_p(u, \Omega) = \int\limits_{\Omega} \|u'(x)\|^p \, dx.$$

Для случая, когда $u \in \mathscr{C}^1(\Omega)$, найдем явное выражение для функционала энергии $\widetilde{E}_p(u, \Omega)$, определенного равенством (6).

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — неотрицательная непрерывная функция, финитная относительно Ω. Тогда множество $A = \mathrm{Supp}(f) \subset \Omega$ компактно и, значит, найдется $h_0 > 0$ такое, что если $0 < h < h_0$, то шар $B(x, h)$ с центром $x \in A$ содержится в множестве Ω. Для всякого $x \in A$ имеем

$$e_p(u, x, h) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|y-x|<h} \left\{ \frac{d[u(x), u(y)]}{h} \right\}^p dy = \int\limits_{B(0,1)} \left| \frac{u(x + h\xi) - u(x)}{h} \right|^p d\xi. \quad (8)$$

Подынтегральное выражение в правой части (8) при $h \to 0$ стремится к пределу, равному $|u'(x)\xi|^p$. При этом сходимость равномерна относительно ξ. Получаем равенство

$$\lim_{h\to 0} e_p(u,x,h) = \int\limits_{B(0,1)} |u'(x)\xi|^p \, d\xi. \tag{9}$$

В силу непрерывности операторной функции $u'(x)$ и компактности множества A сходимость в равенстве (9) равномерна относительно x. Из доказанного вытекает равенство

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} e_p(u,x,h) f(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \|u'(x)\|_p^p f(x)\, dx.$$

Величина $\|X\|_p$ для произвольного линейного отображения $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}$ определяется по формуле

$$\|X\|_p = \Bigg(\int\limits_{B(0,1)} |X\xi|^p \, d\xi \Bigg)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Отсюда получаем, что имеет место равенство

$$\widetilde{E}_p(u,\Omega) = \int\limits_{\Omega} \|u'(x)\|_p^p \, dx.$$

Равенство (10) определяет норму на множестве всех линейных отображений пространства $\mathbb{R}^n$ в гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Имеем

$$\|X\|^2 = \sup_{|\xi|\le 1} \langle X\xi, X\xi\rangle = \sup_{|\xi|\le 1} \langle X^*X\xi, \xi\rangle.$$

Положим $X^*X = Q_X$. Линейное отображение Q_X симметрическое. Квадратичная форма $\langle Q_X\xi, \xi\rangle$ положительно определенная, и, значит, все ее собственные числа положительны. Пусть $\lambda_1^2 \ge \lambda_2^2 \ge \dots \ge \lambda_n^2 > 0$ суть собственные числа Q_X, занумерованные в порядке убывания. Тогда $\lambda_1 = \|X\|$. Далее, имеем

$$\int\limits_{B(0,1)} |X\xi|^p \, d\xi = \int\limits_{B(0,1)} [\langle Q_X\xi, \xi\rangle]^{p/2} \, d\xi.$$

Пусть P — линейное ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что $\langle Q_X P\xi, P\xi\rangle = \lambda_1^2\xi_1^2 + \lambda_2^2\xi_2^2 + \dots + \lambda_n^2\xi_n^2$ для $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Для всякой интегрируемой в шаре $B(0,1)$ функции F будет

$$\int\limits_{B(0,1)} F(\xi)\, d\xi = \int\limits_{B(0,1)} F(P\xi)\, d\xi.$$

Отсюда получаем, что норма $\|X\|_p$ линейного отображения $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{H}$ выражается равенством

$$\|X\|_p = \Bigg\{ \int\limits_{B(0,1)} \big[\lambda_1^2\xi_1^2 + \lambda_2^2\xi_2^2 + \dots + \lambda_n^2\xi_n^2\big]^{p/2} \, d\xi \Bigg\}^{1/p}. \tag{11}$$

Норма $\|X\|_p$ представляется в общем случае несколько экзотической. Для случая $p \neq 2$ интеграл, стоящий в равенстве (11) справа, по-видимому, не допускает достаточно простого представления посредством известных функций. Однако в случае $p = 2$ получаем

$$\|X\|_p^p = \|X\|_2^2 = \gamma_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Постоянная γ_n здесь равна интегралу $\int\limits_{B(0,1)} \xi_k^2\, d\xi$, значение которого не зависит от k. Величина $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ есть сумма диагональных элементов матрицы Q_X. Если $\mathbb{H} = \mathbb{R}^m$ для некоторого m, то след матрицы Q_X равен сумме квадратов элементов матрицы отображения X.

В задаче о построении гармонических отображений, рассмотренной в [4], используется как раз случай $p = 2$.

Из сказанного здесь можно сделать вывод, что функционал энергии, введенный в [1], отличен от того, который возникает, в частности, при рассмотрении задачи о гармонических отображениях. Заметим еще, что операторная норма $\|X\|$ на множестве $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{H})$ линейных отображений не является строго выпуклой, т. е. из равенства $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$, вообще говоря, не следует, что либо $Y = \lambda X$, либо $X = \lambda Y$, где $\lambda \geq 0$. В силу этого функционал, связанный с применением операторной нормы, представляется неудобным при рассмотрении задач вариационного исчисления.

3. Липшицевы многообразия

Далее $\mathbb{R}^n_+$ означает множество всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых $x_n \geq 0$, $\mathbb{R}^n_+$ — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^n$. Пусть j — отображение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, -x_n)$ (зеркальная симметрия относительно плоскости $x_n = 0$.) Если множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ открыто относительно $\mathbb{R}^n_+$, то $\Omega' = \Omega \cup j[\Omega]$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $W_p^1(\Omega)$, если функция

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{для } x \in \mathbb{R}^n_+, \\ u[j(x)] & \text{для } x \notin \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

принадлежит классу $W_p^1(\Omega')$.

Пусть M — n-мерное многообразие. Карта или система координат в M — это топологическое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ такое, что область его определения U — открытое множество пространства M, а множество его значений $\Omega = \varphi(U)$ — открытое множество $\mathbb{R}^n_+$ как подпространства $\mathbb{R}^n$. *Атласом многообразия* M называется всякое множество $\mathscr{A}$ карт многообразия M, области определения которых покрывают M.

Липшицево многообразие есть пара $(M, \mathscr{L})$, где M — топологическое многообразие, а $\mathscr{L}$ — атлас этого многообразия такой, что для любых двух карт $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n_+$ функция перехода $\sigma = \psi \circ \varphi^{-1}$ является билипшицевой. Карты, составляющие атлас $\mathscr{L}$ липшицева многообразия M, удовлетворяющий этому условию, будем называть *допустимыми.* Для краткости будем говорить просто: «липшицево многообразие M».

Будем предполагать, что все рассматриваемые многообразия обладают счетной базой. В некоторых случаях условие существования счетной базы может быть заменено более слабым условием паракомпактности.

Если M — многообразие со счетной базой, то для всякого его открытого покрытия $\mathscr{U}$ существует разбиение единицы $\mathscr{E}$ на M, образованное неотрицательными непрерывными финитными функциями, подчиненное покрытию $\mathscr{U}$, т. е. такое, что для всякой функции $f \in \mathscr{E}$ найдется множество $U \in \mathscr{U}$, содержащее в себе носитель $\mathrm{Supp}(f)$ функции f.

Пусть M — n-мерное многообразие. Предположим, что u — функция, определенная на многообразии M, а $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ — карта M. Выражение $\varphi^* u$ далее означает функцию $u \circ \varphi^{-1}$, определенную на множестве $\Omega = \varphi(U)$.

Пусть M — n-мерное липшицево многообразие, $\mathbb{X}$ — сепарабельное полное метрическое пространство. Будем говорить, что функция $u : M \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$, если для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ отображение

$$\varphi^* u : x \mapsto u[\varphi^{-1}(x)]$$

принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, где $\Omega = \varphi(U)$. В качестве $\mathbb{X}$ можно, в частности, взять множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Далее мы полагаем $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M) = W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{R})$. Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n_+$ — две перекрывающиеся допустимые карты в многообразии M, т. е. множество $U \cap V$ непусто. Тогда $\Omega_1 = \varphi(U \cap V)$ и $\Sigma_1 = \psi(U \cap V)$ — открытые в $\mathbb{R}^n_+$ множества. Отображение $\sigma = \psi \circ \varphi^{-1}$ является билипшицевым и отображает Ω_1 на Σ_1. Обратное ему отображение $\tau = \varphi \circ \psi^{-1}$ также билипшицево и отображает Σ_1 на Ω_1.

Из теоремы 1 вытекает, что если функция $\varphi^* u(x)$ принадлежит классу $W^1_p(\Omega_1)$, то функция $\psi^* u(y) = \varphi^* u[\tau(y)]$ принадлежит классу $W^1_p(\Sigma_1)$. При этом производные функции $\psi^* u$ выражаются через производные функций $\varphi^* u$ и τ по тем же формулам, что и в случае, когда функции $\varphi^* u$ и τ гладкие.

В частности, отсюда следует, что существует постоянная $C = C(\varphi, \psi) < \infty$ такая, что

$$\frac{1}{C} |(\nabla \psi^* u)(y)| \leq |(\nabla \varphi^* u)(x)| \leq C |\nabla (\psi^* u)(y)|$$

для п. в. $y \in \Sigma_1$.

Всякое билипшицево отображение преобразует множество меры нуль в множество меры нуль. Для билипшицевых отображений справедлива формула замены переменных под знаком интеграла (5). Классический формализм тензорного исчисления на дифференцируемых многообразиях автоматически переносится на случай липшицевых многообразий, исключая ту его часть, в которой идет речь о дифференцировании тензорных полей.

Пусть M — n-мерное липшицево многообразие. Будем говорить, что на многообразии M *задана плотность* w, если для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ многообразия M на множестве $\Omega = \varphi(U)$ определена неотрицательная измеримая в смысле Бореля функция $w_\varphi(x)$, причем выполнено следующее условие. Для любых двух перекрывающихся допустимых карт $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ и $\psi : V :\to \mathbb{R}^n_+$ и любого борелевского множества $A \subset U \cap V$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\varphi(A)} w_\varphi(x)\, dx = \int\limits_{\psi(A)} w_\psi(y)\, dy.$$

Пусть $\sigma(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ — функция перехода для данных параметризаций. Отображение σ билипшицево. Пусть $\Omega_1 = \varphi(U \cap V)$, $\Sigma_1 = \psi(A \cap B)$, σ отображает Ω_1 на Σ_1. Формула (5) замены переменных в кратном интеграле позволяет заключить, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\psi(A)} w_\psi(y)\, dy = \int\limits_{\varphi(A)} w_\psi[\sigma(x)] |J(x, \sigma)|\, dx,$$

где $J(x, \sigma)$ — якобиан отображения σ в точке x. Так как борелевское множество $A \subset U \cap V$ было выбрано произвольно, отсюда следует, что

$$w_\varphi(x) = w_\psi[\sigma(x)] |J(x, \sigma)|$$

для п. в. $x \in \Omega$.

Будем говорить, что плотность w на липшицевом многообразии M *регулярна*, если для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ существуют постоянные $\varepsilon > 0$ и $L < \infty$ такие, что для п. в. $x \in \Omega = \varphi(U)$ имеют место неравенства $\varepsilon < w_\varphi(x) < L$.

Предположим, что w — плотность на многообразии M и A — борелевское множество в M. Если A содержится в области определения некоторой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$, то определена величина

$$\mu(A) = \int\limits_{\varphi(A)} w_\varphi(x)\, dx.$$

Согласно определению плотности значение этого интеграла не зависит от выбора допустимой карты, в области определения которой содержится множество A. Функция множества μ, определенная таким образом на множествах, каждое из которых содержится в области определения некоторой допустимой карты, может быть продолжена на совокупность всех борелевских множеств пространства M так, что результат продолжения будет мерой на многообразии M. Такое продолжение можно осуществить, например, с помощью подходящего разбиения единицы. Получаемую таким образом меру будем называть *мерой, порожденной данной плотностью* w, и обозначать символом μ_w. Мера называется *регулярной*, если ее плотность регулярна.

Чтобы ввести норму на пространстве $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$, необходимо наделить многообразие M дополнительной структурой, к описанию которой мы и переходим.

Риманово пространство класса Lip есть пара (M, g), где M — n-мерное липшицево многообразие, а g — двухвалентный ковариантный симметрический тензор в M, удовлетворяющий следующим условиям.

(R1) Для всякой допустимой системы координат $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ многообразия M компоненты $g_{ij}(x)$ этого тензора являются измеримыми функциями на множестве $\Omega = \varphi(U)$.

(R2) Для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ существуют множество $E \subset \Omega = \varphi(U)$ и конечная постоянная $C > 0$ такие, что для всякого $x \notin E$ для любого вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\frac{|\xi|^2}{C} \le \sum_i^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(x) \xi^i \xi^j \le C|\xi|^2.$$

Тензор g называется *метрическим тензором риманова пространства* (M, g). По тензору g определим контравариантный тензор $\bar{g}$ такой, что в любой допустимой системе координат на многообразии M компоненты $g^{ij}(x)$ и $g_{ij}(x)$ тензоров $\bar{g}$ и g соответственно удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta_i^j$, где $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_i^j = 1$ при $i = j$, δ_i^j — символ Кронекера. Тензор $\bar{g}$ называется *контравариантной формой метрического тензора многообразия.*

Если на липшицевом многообразии M задан метрический тензор g, то будем говорить, как это обычно делается в римановой геометрии, что на M *задана метрика с линейным элементом* $ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j$. Римановы пространства класса Lip рассматривались и другими авторами (см. [11–13]).

Пусть g — метрический тензор на многообразии M. Зададим произвольно допустимую карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ многообразия M, и пусть $g_{ij}(x)$ — компоненты тензора g относительно данной карты. Обозначим через $G(x)$ определитель матрицы $(g_{ij}(x))_{i,j=1,2,\dots,n}$. Полагаем $w_\varphi(x) = \sqrt{G(x)}$. В силу произвольности карты φ всякой допустимой карте φ сопоставлена некоторая функция w_φ, определенная на области значений этой карты. Легко проверяется, что тем самым на многообразии M определена некоторая плотность. Мера, которая определяется построенной плотностью w_φ, называется *мерой объема относительно линейного элемента* $ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j$ и обозначается символом $v_g(E)$. Мы будем также говорить, что v_g — *мера Лебега на римановом пространстве* M. Множество измеримых на многообразии M вещественных функций, интегрируемых в степени $p \geq 1$ на римановом пространстве (M, g), будем обозначать символом $L_p(M, g)$. Для $u \in L_p(M, g)$ полагаем

$$\|u\|_{L_p(M,g)} = \left\{ \int\limits_M |u(t)|^p \, dv_g(t) \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $u : M \to \mathbb{R}$ — функция класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. По функции u может быть построено поле ковариантного тензора валентности 1, обозначаемого символом $du(x)$. Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ — произвольная допустимая карта M, $\Omega = \varphi(U)$. Тогда определена функция $\varphi^* u(x) \equiv u[\varphi^{-1}(x)]$. Для $i = 1, 2, \dots, n$ полагаем

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial \varphi^* u}{\partial x^i}(x).$$

Из теоремы 1 следует, что величины $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ при переходе от одной допустимой карты к другой преобразуются как компоненты одновалентного ковариантного тензора, который и есть $du(x)$.

Пусть X — контравариантный одновалентный тензор на липшицевом многообразии M и u — функция класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. Зададим произвольно допустимую карту $\varphi :\to \mathbb{R}^n_+$ на многообразии M. Пусть $X^i(x)$ — координаты тензора X относительно этой карты. Тогда на множестве $\Omega = \varphi(U)$ определена функция $w(x) = X^i(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}$. Функция $\langle X, du\rangle : t \in U \to w[\varphi(t)]$ не зависит от выбора допустимой карты с областью определения U. Тем самым на многообразии M определена вещественная функция $\langle X, du\rangle$.

4. Функционалы на классах $W^1_p(M, \mathbb{X})$

Сначала рассмотрим случай функционалов на пространстве вещественных функций класса $W^1_p(M)$, где M — n-мерное липшицево многообразие.

Пусть Ω — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n_+$ и $F(x, \xi)$ — функция переменных $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что F — функция типа $\Sigma(\Omega)$, если выполнены следующие условия.

(S1) Существует множество $E \subset \Omega$, мера которого равна нулю, такое, что для всякого $x \notin E$ величина $F(x, \xi)$ определена для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(S2) Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать открытое в $\mathbb{R}^n_+$ множество $G \supset E$ такое, что n-мерная мера Лебега множества G меньше ε и функция $F(x, \xi)$ непрерывна на произведении $(\Omega \setminus G) \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $F(x, \xi)$ — функция класса $\Sigma(\Omega)$. Будем говорить, что она *принадлежит классу* $\Sigma C(\Omega)$, если для всякого $x \in \Omega$, не принадлежащего множеству E, указанному в условии S1, функция $F(x, \xi)$ выпукла относительно ξ, т. е. для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$F(x, \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2) \leq \alpha F(x, \xi_1) + (1 - \alpha)F(x, \xi_2).$$

Будем говорить, что функция $F(x, \xi)$ класса $\Sigma(M)$ *имеет по переменной* ξ *порядок роста, равный* $p \geq 1$, если для всякого компактного множества $K \subset M$ найдутся постоянные $A = A(K)$ и $B = B(K)$ такие, что для п. в. $x \in K$ для всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|F(x, \xi)| \leq A|\xi|^p + B. \tag{12}$$

Пусть M — липшицево многообразие. Зададим на многообразии M некоторую регулярную меру μ. Будем говорить, что на многообразии M *задан инвариантный функционал типа*

$$\int\limits_M F(x, \nabla u(x))\, d\mu(x)$$

с порядком роста, равным $p \geq 1$, если для всякой карты $\varphi : U \to M$ на области $\Omega = \varphi(U)$ указана неотрицательная функция $F_\varphi(x, \xi)$ класса $\Sigma C(U)$, имеющая порядок роста по переменной ξ, равный p. При этом должно быть выполнено следующее условие согласования.

Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n_+$ — допустимые карты многообразия M. Предположим, что эти карты перекрывающиеся, т. е. $W = U \cap V$ непусто. Положим $\Omega_1 = \varphi(W)$, $\Sigma_1 = \psi(W)$, и пусть $\sigma = \psi \circ \varphi^{-1}$ — функция перехода для данных карт. Тогда существует множество $E \subset \Omega_1$, мера которого равна нулю, такое, что для всякого $x \in \Omega_1 \setminus E$ выполняется равенство

$$F_\varphi(x, \xi) = F_\psi[\sigma(x), \{\sigma'(x)^*\}^{-1}\xi]. \tag{13}$$

Пусть $u : M \to \mathbb{R}$ — функция класса $W^1_p(M)$ на липшицевом многообразии M и K — произвольное борелевское множество в M. Построим разбиение единицы $(f_\eta)_{\eta \in \Xi}$ на многообразии M, подчиненное покрытию многообразия, образованному областями определения допустимых карт многообразия M.

Рассмотрим функцию $f_\eta[\varphi^{-1}(x)]F_\varphi(x, \xi)$, где $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ — допустимая карта многообразия M, область определения которой содержит носитель функции f_η.

Множество $H = \varphi\{\mathrm{Supp}[f_\eta]\}$ компактно. Так как порядок роста функции $F_\varphi(x, \xi)$ по переменной ξ равен p, то для всех $x \in \varphi(H)$ справедлива оценка

$$|F_\varphi[x, \nabla(\varphi^* u)(x)]| \leq A|\nabla\varphi^* u(x)|^p + B,$$

где A и B — постоянные. Отсюда вытекает, что определен и конечен интеграл

$$\int\limits_{\varphi(E)} \varphi^* f_\xi(x) F_\varphi[x, \nabla(\varphi^* u)(x)] \mu_\varphi(x)\, dx. \tag{14}$$

Значение этого интеграла, как следует из условия согласования (13), не зависит от выбора допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ такой, что $U \supset H$. Полагаем

$$\int\limits_M f_\eta(p)F[p,\nabla u(p)]\,d\mu(p) = \int\limits_{\varphi(E)} \varphi^* f_\eta(x)F_\varphi[x,\nabla(\varphi^* u)(x)]\mu_\varphi(x)\,dx$$

и

$$I_F(u,K) = \int\limits_K F[t,\nabla u(t)]\,d\mu(t) = \sum_{\eta\in\Xi}\int\limits_K f_\eta(p)F[t,\nabla u(t)]\,d\mu(t). \tag{15}$$

Сумма здесь имеет смысл, так как каждое слагаемое справа неотрицательно в силу неотрицательности функций f_η и $F(x,\xi)$. Ввиду условия согласования для представления функции $F(t,\xi)$ в разных допустимых картах многообразия M сумма (15) не зависит от выбора разбиения единицы на многообразии M.

Пусть u_ν, $\nu = 1,2,3,\dots,$ — последовательность функций класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. Будем говорить, что эта последовательность *слабо сходится к функции* $u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$, и писать $u_\nu \rightharpoonup u_0$ при $\nu \to \infty$, если $\|u_\nu - u_0\|_{L_p(K)} \to 0$ при $\nu \to \infty$ для всякого компактного множества $K \subset M$ и существует постоянная $C = C(K) < \infty$ такая, что при каждом ν выполняется неравенство

$$\int\limits_K |\nabla u_\nu(t)|^p\,d\mu(t) \le C.$$

Замечание. Условие $u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ в данном определении является в действительности следствием других его условий и может быть опущено.

Лемма 2. *Пусть $F(t,\xi)$ — функция класса $\Sigma C(M)$ на многообразии M, имеющая порядок роста p. Тогда для всякой последовательности u_ν функций класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$, слабо сходящейся в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ к функции $u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$, для любого измеримого множества $E \subset M$ имеет место неравенство*

$$I_F(u,E) \le \liminf_{\nu\to\infty} I_F(u_\nu,E).$$

Доказательство. Предположим сначала, что существует допустимая карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ такая, что функция $F(t,\xi)$ обращается в нуль, если $t \notin K$, где K — компактное множество, содержащееся в U. Пусть $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. Положим $v(x) = \varphi^* u(x)$. Имеем равенство

$$I_F(v,K\cup E) = \int\limits_{\varphi(K\cup E)} F_\varphi[x,\nabla v(x)]w(x)\,dx,$$

где $w(x)$ — плотность меры μ, $\infty > L \ge w(x) \ge \varepsilon > 0$ для всех $x \in A = \varphi(K)$, L и ε — постоянные. Пусть $u_\nu \rightharpoonup u_0$ в пространстве $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. Тогда $v_\nu = \varphi^* u_\nu \rightharpoonup v_0 = \varphi^* u_0$ в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В силу теоремы, доказанной в работе автора [14], отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\varphi(E\cup K\Omega)} F_\varphi[x,\nabla v_0(x)]w(x)\,dx \le \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{\varphi(E\cup K\Omega)} F[x,\nabla v_\nu(t)]w(x)\,dx.$$

Тем самым для данного случая лемма доказана. Общий случай сводится к этому применением разбиения единицы. (Мы предоставляем читателю рассмотрение всех связанных с этим подробностей.) □

Пусть $F(t,\xi)$ — функция класса $\Sigma C(M)$ на многообразии M, имеющая порядок роста $p \geq 1$. Распространим функционал $I_{_F}(u,M)$ на случай функций со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Как и ранее, будем предполагать, что пространство $\mathbb{X}$ сепарабельно и полно.

Пусть $u : M \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$. Для всякого $z \in \mathbb{X}$ определена функция $[u]_z(t) = d[u(t),z]$. Согласно определению класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$ функция $[u]_z$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$, причем существует функция $v \in L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ такая, что $|\nabla[u]_z(t) \leq v(t)$ для п. в. $t \in M$. Так как по условию для функции $F(t,\xi)$ на всяком компактном множестве K многообразия M выполняется неравенство (12), то существует измеримая функция $W(t)$ класса $L_{1,\mathrm{loc}}(M)$ такая, что при любом $z \in \mathbb{X}$ выполняется неравенство $F[t,\nabla[u]_z(t)] \leq W(t)$. Семейство функций $(F[t,\nabla[u]_z(t)])_{x\in\mathbb{X}}$, таким образом, имеет измеримую мажоранту, принадлежащую классу $L_{1,\mathrm{loc}}(M)$. Наименьшую из таких мажорант будем обозначать символом $F[t,\nabla u(t)]$. Для функции $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$ и измеримого множества $E \subset M$ полагаем

$$I_{_F}(u,E) = \int\limits_E F[t,\nabla u(t)]\,d\mu(t).$$

Пусть u_ν, $\nu = 1,2,\ldots,$ — последовательность функций класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$. Будем говорить, что она *слабо сходится к функции* $u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$, и писать $u_\nu \rightharpoonup u_0$ при $\nu \to \infty$, если для всякого компактного множества $K \subset M$ имеет место сходимость $\|d[u_\nu,u_0]\|_{L_p(K)} \to 0$ при $\nu \to \infty$ и существует постоянная $C = C(K)$ такая, что при каждом ν выполняется неравенство

$$\int\limits_K |\nabla u_\nu(t)|^p d\mu(t) \leq C(K).$$

Теорема 2. *Пусть $F(t,\xi)$ — функция класса $\Sigma C(M)$ на многообразии M, имеющая порядок роста p. Тогда для всякой последовательности u_ν функций класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$, слабо сходящейся в $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ к функции $u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$, для любого измеримого множества $E \subset M$ выполняется неравенство*

$$I_F(u,E) \leq \liminf_{\nu\to\infty} I_F(u_\nu,E).$$

Доказательство. Пусть $Z \subset \mathbb{X}$ — счетное множество, всюду плотное в $\mathbb{X}$. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — элементы множества Z, занумерованные произвольным образом. Положим $\Psi_1(u,t) = F[t,\nabla[u]_{z_1}(t)]$, и если $\Psi_m(u,t)$ определено, то пусть $\Psi_{m+1}(u,t) = \sup\{\Psi_m(t), F[t,\nabla[u]_{z_{m+1}}(t)]\}$. Последовательность $\Psi_m(u,t)$ является возрастающей, и $\lim\limits_{m\to\infty} \Psi_m(u,t) = F[x,\nabla u(t)]$ для п. в. $t \in M$.

Пусть доказано, что

$$\int\limits_E \Psi_m(u,t)\,d\mu(t) \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_E \Psi_m(u_\nu,t)\,d\mu(t) \tag{16}$$

для всякого измеримого множества $E \subset M$. Пусть дано произвольное измеримое множество $E \subset M$. Множество E представим в виде $E = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = \{t \in E | \Psi_{m+1}(u,t) = \Psi_m(u,t)$, а $E_2 = E \setminus E_1$. Множества E_1 и E_2 измеримы и для всех $t \in E_2$ имеем $\Psi_{m+1}(u,t) = F[t,\nabla[u]_{z_{m+1}}(t)]$. Согласно предположению

$$\int\limits_{E_1} \Psi_{m+1}(u,t)\,d\mu(t) = \int\limits_{E_1} \Psi_m(u,t)\,d\mu(t) \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{E_1} \Psi_m(u_\nu,t)\,d\mu(t). \tag{17}$$

Далее,

$$\int\limits_{E_2} \Psi_{m+1}(u,t)\,d\mu(t) = \int\limits_{E_1} F[t, \nabla[u]_{z_{m+1}}(t)]\,d\mu(t),$$

отсюда в силу леммы 2 следует, что

$$\int\limits_{E_2} \Psi_{m+1}(u,t)\,d\mu(t) \le \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{E} F[t, \nabla[u]_{z_{m+1}}(t)]\,d\mu(t). \tag{18}$$

Поскольку $F[t, \nabla[u]_{z_{m+1}}(t)] \le \Psi_{m+1}(u_\nu, t)$, из неравенства (18) вытекает, что

$$\int\limits_{E_2} \Psi_{m+1}(u,t)\,d\mu(t) \le \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{E_2} \Psi_{m+1}(u_\nu,t)\,d\mu(t). \tag{19}$$

Ввиду (18) и (19) неравенство (16) остается верным, если в нем заменить m на $m+1$.

Так как $\Psi_m(u_\nu, t) \le F[t, \nabla u_\nu(t)]$ при каждом t, из доказанного находим, что при каждом m верно неравенство

$$\int\limits_{E} \Psi_m(u,t)\,d\mu(t) \le \liminf_{\nu\to\infty} \int\limits_{E} F[t, \nabla u_\nu(t)]\,d\mu(t).$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, отсюда получим требуемое неравенство. $\square$

Общий результат. Сделаем сначала некоторые вспомогательные построения. Обозначим символом $\mathbb{A}^m$ m-мерный угол, состоящий из всех точек $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ пространства $\mathbb{R}^m$, у которых все координаты неотрицательны, т. е. $h_i \ge 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть V^m — множество функций $\Phi : \mathbb{A}^m \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям.

(V1) Если $\Phi \in V^m$, то Φ непрерывна на конусе $\mathbb{A}^m$ и является неубывающей в том смысле, что если точки $h' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_m)$ и $h'' = (h''_1, h''_2, \dots, h''_m)$ таковы, что $h'_i \le h''_i$ при каждом $i = 1, 2, \dots, m$, то имеет место неравенство $\Phi(h') \le \Phi(h'')$.

(V2) Всякая функция $\Phi \in V^m$ выпукла на множестве $\mathbb{A}^m$.

Для функции $\Phi \in V^m$ пусть $S(\Phi)$ — множество всех аффинных функций $L(h) = \langle k, h\rangle - l = k_1h_1 + k_2h_2 + \dots k_mh_n - l$ таких, что $k_i \ge 0$ при каждом $i = 1, 2, \dots, m$ и $\Phi(h) \ge L(h)$ для всех $h \in \mathbb{A}^m$.

Предложение. *Для всякой функции $\Phi \in V^m$ справедливо утверждение*

$$\forall h \in \mathbb{A}^m \quad \Phi(h) = \sup_{L\in S(\Phi)} L(h).$$

Для доказательства данного утверждения заметим, что так как функция Φ выпукла на множестве $\mathbb{A}^m$, ее график лежит выше опорной плоскости в каждой точке $h \in \mathbb{A}^m$. Пусть h_0 — произвольная внутренняя точка многогранного угла $\mathbb{A}^m$ и $L(h) = \langle k, h\rangle - l = 0$ — уравнение опорной плоскости графика функции Φ в точке h_0. Из условия (V2) следует, что коэффициенты k_i функции $L(h)$ неотрицательны. Для всех $h \in \mathbb{A}^m$ выполняется неравенство $\Phi(h) \ge L(h)$, причем $L(h_0) = \Phi(h_0)$. Получаем, что $L \in S(\Phi)$. Из доказанного также следует, что $\Phi(h) = \sup\limits_{L\in S(\Phi)} L(h)$ во всякой внутренней точке множества $\mathbb{A}^m$. Так как функция Φ непрерывна, последнее равенство выполняется для всех $h \in \mathbb{A}^m$. $\square$

Пусть даны числа $r \geq 1$ и $s \geq 1$. Положим $p = rs$. Предположим, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$ задана функция $F_k(t, \xi)$ класса $\Sigma C(M)$, порядок роста которой по ξ не превосходит r. Пусть $\Phi : \mathbb{A}^m \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на многогранном угле $\mathbb{A}^m$, принадлежащая множеству V^m и имеющая порядок роста, равный s. Пусть $p = rs$. Предположим, что $u \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. Тогда $u \in W^1_{r,\mathrm{loc}}(M)$ и, значит, для всякого $k = 1, 2, \ldots, m$ определена вещественная функция $F_k(t, \nabla u(t))$ — верхняя огибающая семейства функций $F_k(t, \nabla [u]_z(t))$, где $z \in \mathbb{X}$. Для сокращения записи вместо $F_k(t, \nabla u(t))$ будем писать $F_k(u, t)$. Теперь полагаем

$$\Phi F(u, A) = \int\limits_A \Phi[F_1(u, t), F_2(u, t), \ldots, F_m(u, t)]\, d\mu(t). \tag{20}$$

Теорема 3. *Всякий функционал вида* (20) *полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$, *т. е. для всякой последовательности отображений* $\big(u_\nu \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})\big)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *такой, что* $u_\nu \rightharpoonup u_0 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$ *при* $\nu \to \infty$, *имеет место неравенство*

$$\Phi F(u_0, A) \leq \liminf_{\nu \to \infty} \Phi F(u_\nu, A).$$

Доказательство. Предположим сначала, что мера множества A конечна. Пусть $\Lambda(t) = (k_1(t), k_2(t), \ldots, k_m(t), l(t))$ — вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^{m+1}$, компоненты которой суть измеримые функции, причем при каждом $t \in \mu$ аффинная функция $h \mapsto k_1(t)h_1 + k_2(t)h_2 + \cdots + k_m(t)h_m - l(t)$ принадлежит классу $S(\Phi)$. Предполагаем, кроме того, что функция l является ограниченной. Для произвольной функции $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$ и измеримого множества $E \subset M$ положим

$$\Theta(u, \Lambda, A) = \int\limits_A \left\{ \sum_{j=1}^m k_j(t) F_j(u, t) - l(t) \right\} d\mu(t).$$

Интеграл здесь определен в силу того, что каждое из слагаемых $k_j(t)F_j(u, t)$ неотрицательно, мера множества A предполагается конечной, а функция l ограничена.

Точная верхняя граница интегралов $\Theta(u, \Lambda, A)$ на совокупности всех измеримых вектор-функций Λ, удовлетворяющих перечисленным здесь условиям, равна $\Phi F(u_0, A)$. Утверждение теоремы теперь легко выводится из доказанного. Пусть функция $\Lambda(t)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Положим $\widetilde{F}_j(t, \xi) = k_j(t) F_j(t, \xi)$. Функция принадлежит классу $\Sigma V(M)$. Верхняя огибающая $\widetilde{F}_j(t, \nabla u)$ семейства функций $\widetilde{F}_j(t, \nabla [u]_z)$, очевидно, равна $k_j(t) F_j(t, \nabla u)$. Поэтому в силу теоремы 2 при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$ имеем

$$\int\limits_A k_j(t) F_j(t, \nabla u)\, d\mu(t) \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int\limits_A k_j(t) F_j(t, \nabla u_\nu)\, d\mu(t).$$

Суммируя по j, заключаем, что

$$\Theta(u, \Lambda, A) \leq \liminf_{\nu \to \infty} \Theta(u_\nu, \Lambda, A).$$

Так как $\Theta(u_\nu, \Lambda, A) \leq \Phi F(u_\nu, A)$ при каждом ν, отсюда следует, что

$$\Theta(u, \Lambda, A) \leq \liminf_{\nu \to \infty} \Phi F(u_\nu, A).$$

Поскольку точная верхняя граница в левой части по Λ равна $\Phi F(u, A)$, справедливость неравенства теоремы установлена. $\square$

5. Функционалы на римановых пространствах

Предположим, что на липшицевом многообразии M введена обобщенная риманова метрика, определяемая линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i dx^j.$$

Пусть $u : M \to \mathbb{R}$ — функция класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{R})$. Тогда определен ковариантный тензор ∇u. Пусть $|\nabla_g u(t)|^2$ — функция на M, определенная следующим образом. Для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ многообразия M для п. в. $t \in U$ имеет место равенство

$$|\nabla_g u(t)|^2 = g^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x^i}(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}(x).$$

Здесь полагается $x = \varphi(t)$ и по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до n.

Теорема 1 позволяет заключить, что функция $|\nabla_g u|$ определена корректно на многообразии M с точностью до значений на множестве меры нуль. Пусть $E \subset M$ — измеримое множество многообразия M. Полагаем

$$\|u\|_{W^1_p(E,\mathbb{R})} = \int\limits_E |u(t)|\,dv_g(t) + \left\{\int\limits_E |\nabla_g u(t)|^p\,dv_g(t)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В силу компактности замыкания E интегралы справа конечны. Функционал $u \mapsto \|u\|_{W^1_p(E,\mathbb{R})}$ представляет собой норму на пространстве $W^1_p(E,\mathbb{R})$. В случае компактности M можно взять $E = M$ и мы получаем норму на пространстве $W^1_p(M,\mathbb{R})$. Легко проверяется, что если M компактно, то при переходе к другой римановой метрике получим норму, эквивалентную построенной.

Предположим, что даны сепарабельное полное метрическое пространство $\mathbb{X}$ и функция $u : M \to \mathbb{X}$, принадлежащая классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$. По определению принадлежности классу это означает, что для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ функция $\varphi^* u$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{X})$, где $\Omega = \varphi(U)$, т. е. при любом $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi^* u]_z$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$. Заметим, что $[\varphi^* u]_z = \varphi^*[u]_z$. Верхнюю огибающую функций $|\nabla[u]_z|_g$ будем обозначать символом $|\nabla u|_g$ и называть *нормой градиента функции* $u : M \to \mathbb{X}$. В соответствии с этим для произвольного измеримого множества A многообразия M полагаем

$$E_p(u,A,\mathbb{X}) = \int\limits_A |\nabla_g u(t)|^p\,dv_g(t). \tag{21}$$

Функционал энергии $E_p(u,A,\mathbb{X})$ степени p или просто p-функционал энергии, определенный равенством (21), в силу замечаний, сделанных в конце п. 2, далеко не во всех случаях может считаться достаточно удобным. По этой причине необходимо показать, как можно строить различные другие функционалы $\Phi(A,u,\mathbb{X})$, определенные для функций $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$ и сравнимые с функционалом $E_p(u,A,\mathbb{X})$ в том смысле, что $\frac{1}{C}E_p(u,A,\mathbb{X}) \le \Phi(A,u,\mathbb{X}) \le CE_p(u,A,\mathbb{X})$, где C — постоянная, $0 < C < \infty$.

Пусть X — векторное поле на многообразии M, т. е. одновалентный контравариантный тензор. Предположим, что тензор X удовлетворяет условию: для всякой допустимой карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ компоненты X^i тензора X являются измеримыми функциями, ограниченными на каждом компактном подмножестве $\Omega = \varphi(U)$. Тогда для всякой функции $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$ определим некоторую вещественную функцию $\partial_X u$ на многообразии M. Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ — допустимая карта многообразия M. Для $t \in U$ имеем

$$\partial_X u(t) = X^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x),$$

где $x = \varphi(t)$. Будем называть функцию $\partial_X u$ *производной функции и вдоль векторного поля* X.

Пусть $\mathbb{X}$ — сепарабельное метрическое пространство и $u : M \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$. Зададим произвольно допустимую карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n_+$ многообразия M. Положим $\tilde{u}(x) = [\varphi^* u](x)$. Тогда согласно определению класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$ функция $\tilde{u}$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$. Отсюда, в частности, следует, что найдется вещественная функция w класса $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что для всякого $z \in \mathbb{X}$ для п. в. $x \in M$ выполняется неравенство $|\nabla[u]_z(x)| \le w(x)$.

Пусть $G \subset \Omega$ — компактное множество. Тогда найдется величина $L < \infty$ такая, что $|X(x)| \le L < \infty$ для п. в. $x \in \Omega$. При каждом $i = 1, 2, \dots, n$ для п. в. $x \in \Omega$ имеем

$$\left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial[u]_z}{\partial x_i} X_i(x)\right| \le L|\nabla[u]_z(x)|.$$

Рассуждая аналогично [1], получаем, что среди всевозможных неотрицательных функций $w \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, удовлетворяющих условию:

$$\left|\sum_{i=1}^n \frac{\partial[u]_z}{\partial x_i} X_i(x)\right| \le w(x) \tag{22}$$

для п. в. $x \in \Omega$, существует наименьшая функция $\overline{w}$, т. е. такая, что если для функции w неравенство (22) выполняется п. в. в Ω, то $\overline{w}(x) \le w(x)$ для п. в. $x \in \Omega$. Эту функцию мы и берем по определению в качестве модуля производной $|\partial_X u|$.

Пусть P и Q — произвольные тензорные поля на липшицевом многообразии M. Символом $P \otimes Q$ обозначается тензорное поле на многообразии M, определенное следующим образом. Пусть $P^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ и $Q^{k_1 k_2 \dots k_t}_{l_1 l_2 \dots l_u}$ — компоненты данных тензоров относительно какой-либо допустимой карты многообразия. Тогда компоненты тензора $R = P \otimes Q$ относительно этой карты суть $R^{i_1 i_2 \dots i_r k_1 k_2 \dots k_t}_{j_1 j_2 \dots j_s l_1 l_2 \dots l_u}$.

Лемма 3. *Пусть (M, g) — риманово пространство класса* Lip. *Тогда на многообразии M найдутся измеримые векторные поля $X_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, такие, что $|X_k(t)|_g = 1$ для п. в. $t \in M$ и имеет место равенство*

$$\bar{g} = \sum_{k=1}^n X_k(t) \otimes X_k(t) \tag{23}$$

для п. в. $t \in M$.

Замечание. Представление тензора $\bar{g}$ в виде (23) означает, что для всякого ковариантного векторного поля ξ на многообразии M в любой допустимой системе координат имеет место равенство

$$g^{ij}(x)\xi_i(x)\xi_j(x) = \sum_{k=1}^n \left[X^i_k(x)\xi_i(x)\right]^2.$$

Иначе говоря, квадратичная форма, определенная метрическим тензором $\bar{g}$, может быть представлена как сумма квадратов на всем многообразии M.

Доказательство. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n_+$ и в ней задана матричная функция $\Gamma(x) = (\gamma_{ij}(x))_{i,j=1,2,\dots,n}$, коэффициенты которой являются измеримыми функциями, определенными в Ω п. в. Предположим, что матрица $\Gamma(x)$ симметрическая и для всякого компактного множества $A \subset \Omega$ существуют конечная постоянная $C = C(A) > 0$ и множество $E \subset A$ меры нуль такие, что для всякого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ при любом $x \in A \setminus E$ матрица $\Gamma(x)$ определена и выполняются неравенства $|\xi|^2/C < \langle \Gamma(x)\xi, \xi\rangle < C|\xi|^2$.

Пусть $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbf{e}_i$ — вектор, i-я компонента которого равна 1, а остальные — 0. Для каждого $x \in \Omega$ такого, что квадратичная форма $\xi \mapsto \langle \Gamma(x)\xi, \xi\rangle$ определена и является положительно определенной, применим к системе $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, процесс ортогонализации по Граму — Шмидту относительно скалярного произведения $\langle \xi, \eta\rangle_\Gamma \equiv \langle \Gamma\xi, \eta\rangle$. В результате получим систему векторов $\{Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_n(x)\}$ такую, что для п. в. $x \in \Omega$ имеет место равенство $\langle Z_i(x), Z_j(x)\rangle_\Gamma = \delta_i^j$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Координаты векторов Z_i являются алгебраическими функциями элементов матрицы Γ и, следовательно, измеримы. Для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} Z_k(x)\langle Z_k(x), \xi\rangle_\Gamma.$$

Положим $\Gamma(x)Z_k(x) = T_k(x)$. Тогда $\langle Z_k(x), \xi\rangle_\Gamma = \langle T_k(x), \xi\rangle$. Отсюда

$$\langle \Gamma(x)\xi, \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle_\Gamma = \sum_{k=1}^{n} [\langle T_k(x), \xi\rangle]^2. \tag{24}$$

Пусть $u : U \to \mathbb{R}^n_+$ — произвольная допустимая карта многообразия M и $\Omega = \varphi(U)$. Применим построения, проделанные выше, к области Ω, полагая $\gamma_{ij}(x) = g^{ij}(x)$. Получим в области Ω систему векторов $T_k(x)$ такую, что для всякого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства (24).

Пусть $T_k(x) = \big(T_k^1(x), T_k^2(x), \dots, T_k^n(x)\big)$ и X_k — векторное поле на открытом множестве U, определенное условием: $X_k^i(t) = T_k^i[\varphi(t)]$ для произвольного $t \in U$. Тогда для любого ковектора h в области U будем иметь

$$g^{ij}(t)h_i(t)h_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \big[T_k^i(x)h_i(x)\big]^2 = \sum_{k=1}^{n} \big[X_k^i(t)h_i(t)\big]^2.$$

В силу замечания, предшествующего доказательству, требуемое представление тензора $\bar{g}$ получено, но пока только на области определения некоторой допустимой карты многообразия!

Теперь построим искомое представление на всем многообразии. Для всякой точки t многообразия M в силу доказанного существует окрестность U_t точки t, в которой имеет место представление вида (23).

Пусть V_t — окрестность точки t, лежащая строго внутри U_t. Семейство окрестностей $(V_t)_{t\in M}$, очевидно, образует открытое покрытие M. Так как многообразие M обладает счетной базой, из семейства (V_t) можно выделить счетное подсемейство (V_{t_ν}), покрывающее M. Положим

$$D_m = \bigcup_{\nu=1}^{m} V_{t_\nu}.$$

Предположим, что на множестве D_m требуемое представление тензора $\bar{g}$ построено. Имеем $D_{m+1} \supset D_m$ и $D_{m+1} \setminus D_m = V_{t_{m+1}} \setminus D_m$. Множество $V_{t_{m+1}}$ лежит строго внутри допустимой карты $\varphi_{m+1} : U_{t_{m+1}} \to \mathbb{R}^n_+$.

Пусть $\widetilde{X}_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — векторные поля на множестве $U_{t_{m+1}}$, для которых верно равенство (23). На множестве D_m по предположению векторные поля X_k построены. На множестве D_{m+1} доопределим их, полагая $X_k(t) = \widetilde{X}_k(t)$ при $t \notin D_m$. Так как множества V_{t_m} покрывают M, отсюда вытекает существование требуемых векторных полей на всем многообразии M. $\square$

Применим лемму 2 для определения некоторых функционалов на пространстве $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$. Предположим, что $\mathbb{X}$ — сепарабельное полное метрическое пространство и $U : M \to \mathbb{X}$ — отображение класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$. Для всякой точки $z \in \mathbb{X}$ определена вещественная функция $[u]_z(t) \equiv d[u(t), z]$. Функция $[u]_z$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M)$. При этом существует функция $w \in L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ такая, что $|\nabla[u]_z(t)| \leq w(t)$ для п. в. $t \in M$.

Если задано векторное поле $X(t)$ с локально ограниченными измеримыми коэффициентами, то определена функция $|\partial_X[u]_z|$. В силу условия локальной ограниченности для всякого компактного множества $A \subset M$ существует постоянная $C < \infty$ такая, что $|\partial_X[u]_z| \leq C|\nabla u|_g$ п. в. на множестве A. Отсюда вытекает, что среди всевозможных функций $w \in L_{p,\mathrm{loc}}(M)$ таких, что $|\partial_X[u]_z| \leq w$ п. в. на M, существует наименьшая. Эту наименьшую функцию $\overline{w}$ будем обозначать символом $|\partial_X u|$ и называть *модулем производной функции u в направлении вектора X*.

Теперь воспользуемся результатом леммы 2. Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — векторные поля такие, что контравариантная форма метрического тензора представлена в виде

$$\bar{g} = \sum_{k=1}^{n} X_k \otimes X_k.$$

Существование такого представления метрического тензора следует из леммы 2.

Предположим, что задана функция $u : M \to \mathbb{X}$, принадлежащая классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{X})$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ определен функционал $|\partial_{X_k} u|$. Если A — измеримое множество пространства M, то полагаем

$$Q_p(u, A) = \int\limits_A \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\partial_{X_k} u(t)|^2 \right\}^{p/2} dv_g. \tag{25}$$

Найдем значение функционала $Q_p(u, A)$ для случая, рассмотренного в п. 1, т. е. для случая, когда M — ограниченная область Ω пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{H}$ и $u : \Omega \to \mathbb{H}$ — отображение класса $\mathscr{C}^1$. Найдем значение величины $|\partial_X u|$, где X — векторное поле, определенное в области Ω. Зададим произвольно $z \in \mathbb{H}$. Тогда, как отмечено ранее,

$$\frac{\partial[u]_z}{\partial x^i} = \left\langle \mathbf{e}(z, u(x)), \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\rangle,$$

где $\mathbf{e}(z, u(x))$ — единичный вектор,

$$\mathbf{e}(z, u(x)) = \frac{u(x) - z}{|u(x) - z|}.$$

Отсюда получаем, что

$$\partial_X[u]_z = X^i\left\langle \mathbf{e}(z,u(x)), \frac{\partial u}{\partial x^i}\right\rangle = \left\langle \mathbf{e}(z,u(x)), X^i\frac{\partial u}{\partial x^i}\right\rangle$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до n). Так как здесь z — произвольная точка пространства $\mathbb{H}$, то

$$|\partial_X u| = \sup z|\partial_X[u]_z| = \left|X^i\frac{\partial u}{\partial x^i}\right|.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^n |\partial_{X_k}u|^2 = \sum_{k=1}^n\left|X_k^i\frac{\partial u}{\partial x^i}\right|^2 = \sum_{k=1}^n X_k^i X_k^j\left\langle\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j}\right\rangle.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n X_k^i X_k^j = g^{ij}.$$

Таким образом, в данном случае функционал Q_p принимает вид

$$Q_p(u,A) = \int\limits_A \left|g^{ij}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x^i}, \frac{\partial u}{\partial x^j}\right\rangle\right|^{\frac{p}{2}} dx.$$

В частности, очевидно, что функционал $(Q_p)^{1/p}$ в отличие от функционала $(E_p)^{1/p}$ является строго выпуклым.

Теорема 4. *Для функционала $Q_p(u,M)$ на пространстве $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$ верны неравенства*

$$E_p(u,M) \le Q_p(u,M) \le n^{n/2}E_p(u,M). \tag{26}$$

Функционал $Q_p(u,M)$ обладает также свойством полунепрерывности снизу в том смысле, что если функции $u_0 : M \to \mathbb{X}$, $u_\nu : M \to \mathbb{X}$, $\nu = 1,2,\dots,$ класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(M,\mathbb{X})$ таковы, что $\|d(u_\nu,u_0)\|_{L_1(A)} \to 0$ при $\nu\to\infty$ для всякого компактного множества $A\subset M$, а последовательность $(E_p(u_\nu,M))_{\nu\in\mathbb{N}}$ является ограниченной. Тогда имеет место неравенство

$$Q_p(u_0,M) \le \liminf_{\nu\to\infty} Q_p(u_\nu,M). \tag{27}$$

Доказательство. По определению величина $Q_p(u,M)$ есть интеграл от функции

$$D(t) = \sum_{k=1}^n |\partial_{X_k}u(t)|^2, \tag{28}$$

возведенной в степень $p/2$ (см. формулу (25)). Функция $|\partial_{X_k}u(t)|$ является верхней огибающей функций $|\partial_{X_k}[u]_z(t)|$, и, значит,

$$|\partial_{X_k}u(t)| \ge |\partial_{X_k}[u]_z(t)|$$

при любом $z\in\mathbb{X}$. Таким образом,

$$D(t) \ge \sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n X_k^i X_k^j \frac{\partial[u]_z}{\partial x^i}\frac{\partial[u]_z}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n g^{ij}\frac{\partial[u]_z}{\partial x^i}\frac{\partial[u]_z}{\partial x^j} = |\nabla[u]_z(t)|_g^2.$$

Так как $z \in \mathbb{X}$ взято произвольно, отсюда следует, что функция $\sqrt{D(t)}$ является мажорантой семейства функций $|\nabla[u]_z(t)|_g$ и, значит, $\sqrt{D(t)} \geq |\nabla u(t)|_g$. Интегрируя данное неравенство почленно, получим первое из неравенств (26).

Далее, при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ оценим величину $|\partial_{X_k} u(t)|^2$. Фиксируем произвольно $z \in \mathbb{X}$ и положим $v(t) = [u]_z(t)$. Применяя неравенство Коши — Буняковского для положительно определенной квадратичной формы $Q(\xi) = g^{ij}(t)\xi_i\xi_j$, получим

$$[\partial_{X_k} v(t)]^2 = \left[X_k^i \frac{\partial v}{\partial x^i}(t)\right]^2 = \left(g^{ij}(t)(X_k)_i \frac{\partial v}{\partial x^i}(t)\right)^2 \\ \leq \{g^{ij}(t)(X_k)_i(X_k)_j\}\left\{g^{ij}(t)\frac{\partial v}{\partial x^i}(t)\frac{\partial v}{\partial x^j}(t)\right\}.$$

Векторы X_k, $k = 1, 2, \dots, n$, образуют ортонормальный базис относительно квадратичной формы $Q(\xi)$, и, значит,

$$g^{ij}(t)(X_k)_i(X_k)_j = 1$$

при каждом k. Далее,

$$g^{ij}(t)\frac{\partial v}{\partial x^i}(t)\frac{\partial v}{\partial x^j}(t) = |\nabla v(t)|_g^2 \leq |\nabla u|_g^2.$$

Таким образом, в сумме, представляющей $D(t)$ (см. (28)), каждое слагаемое не превосходит $|\nabla u|_g^2$. Отсюда

$$D(t) \leq n|\nabla u|_g^2,$$

тем самым доказано и второе из неравенств (26). Неравенство (27) получается из теоремы 3, если взять в ней $m = n$, $\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2$ и $F_k(t, \nabla u(t)) = |\partial_{X_k} u(t)|^2$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
2. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 855–870.
3. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1990. V. 17, N 4. P. 439–478.
4. *Korevaar N. J., Schoen R. M.* Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1, N 4. P. 1–99.
5. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. N 5. P. 403–415.
6. *Biroli M., Mosco U.* Sobolev and isoperimetric inequalities for Dirichlet forms in homogeneous spaces // Rend. Mat. Acc. Lincei. 1995. V. 9, N 6. P. 37–44.
7. *Goldshtein V. M., Troyanov M.* Axiomatic theory of Sobolev spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, N 4. P. 289–336.
8. *Романов А. С.* Теоремы вложения для одного класса функций соболевского типа на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 452–465.
9. *Романов А. С.* О вложениях классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 871.
   880
10. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Providence: Amer. Math. Soc., 1989.
11. *Eells J., Fuglede B.* Harmonic maps between riemannian polyhedra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. (Cambridge Tracts in Math.; V. 142).

12. *De Cecco G., Palmieri G.* Integral distance on a Lipschitz Riemannian manifold // Math. Z. 1991. Bd 218. S. 223–243.

13. *De Cecco G., Palmieri G.* Distanza intrinseca su una varieta finsperiana di Lipschitz // Rend. Accad. Naz. Sci. XL, V. Ser., Mem. Mat. 1993. V. 42. P. 129–151.

14. *Решетняк Ю. Г.* Общие теоремы о полунепрерывности и о сходимости с функционалом // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1051–1069.

15. *Gol'dstein V. M., Reshetnyak Yu. G.* Quasiconformal mappings and Sobolev spaces. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1990.

Статья поступила 31 августа 2005 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Reshetnyak@math.nsc.ru