Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 514.763.254

ЗАДАЧА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА ДЛЯ CAT(0)–ПРОСТРАНСТВ

П. Д. Андреев

Аннотация: Решается известная проблема А. Д. Александрова для пространств неположительной кривизны. Основная теорема утверждает, что всякое геодезически полное локально компактное связное на бесконечности пространство X неположительной кривизны в смысле Александрова обладает следующей характеризацией изометрий: всякая биекция $f : X \to X$, сохраняющая вместе с обратным отображением f^{-1} расстояние 1, есть изометрия X.

Ключевые слова: задача Александрова, пространство неположительной кривизны, изометрия.

§ 1. Введение

В. Н. Берестовский в [1] доказал следующую характеризацию для изометрий пространств Александрова отделенной от нуля отрицательной кривизны.

Теорема 1.1 [1, теорема 1.1]. *Пусть X — локально компактное геодезически полное односвязное пространство кривизны не больше $K < 0$, в котором все сферы линейно связны. Тогда всякая биекция $f : X \to X$ пространства X на себя, которая вместе с обратным отображением всякий замкнутый шар фиксированного радиуса r отображает на замкнутый шар радиуса r, есть изометрия X.*

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующее более сильное утверждение.

Теорема 1.2 [1, теорема 3.1]. *Если пространство X такое же, как в теореме* 1.1, *то его метрика однозначно восстанавливается по его диагональной трубке V, соответствующей произвольному числу $r > 0$.*

Здесь под *диагональной трубкой* V метрического пространства X, соответствующей числу $r > 0$, понимается множество

$$V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| \le r\} \subset X \times X,$$

где $|xy|$ есть расстояние между точками $x, y \in X$. Условие линейной связности сфер в теореме 1.1 эквивалентно условию связности пространства на бесконечности. Последнее означает, что дополнение любого метрического шара в X линейно связно.

В работе В. Н. Берестовского [1] сформулирован вопрос: будут ли справедливы аналогичные утверждения для пространств неположительной кривизны

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00315).

по Александрову (так называемых CAT(0)-пространств)? В настоящей статье на него дается положительный ответ.

Ранее в работе [2] автор рассматривал указанную задачу для пространств неположительной кривизны по Александрову, не допускающих налегания кратчайших. В [3] показано, что пространство Александрова ограниченной сверху кривизны, обладающее свойствами локальной продолжимости и неналегания кратчайших, есть топологическое многообразие с непрерывными относительно дистанционных координат компонентами метрического тензора, поэтому для таких пространств условие связности на бесконечности эквивалентно условию $n > 1$ для топологической размерности $n = \mathrm{TopDim}(X)$.

Рассматриваемые здесь вопросы возникают в связи с проблемой, поставленной в 1960-х гг. А. Д. Александровым. В полном объеме задача Александрова звучит так: описать метрические пространства, для которых всякое отображение на себя, сохраняющее фиксированное расстояние, например расстояние 1, является изометрией.

Одна из первых работ по указанной тематике написана Бэкманом и Куарлесом в 1953 г. [4]. Теорема Бэкмана — Куарлеса утверждает, что при $n \geq 2$ всякое отображение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ в себя, сохраняющее расстояние 1, есть изометрия.

В работах А. Д. Александрова (см., например, [5]) рассматривался ряд аналогичных задач, в частности, доказаны некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображения пространственных форм, сохраняющие конгруэнтность фигур фиксированного класса, были изометриями. Исследования Александрова для пространства Лобачевского были продолжены в статье А. В. Кузьминых [6], где показано, что если отображение f пространства Лобачевского Λ^n, $n \geq 2$, в себя таково, что для положительных чисел a, a' из $|xy| = a$ следует $|f(x)f(y)| = a'$, то f — изометрия и $a = a'$.

В последнее время интерес к проблеме Александрова и теореме Бэкмана — Куарлеса возобновился в связи с развитием метрической геометрии. Здесь следует обратить внимание на работы Тишки (см., например, [7, 8]), где теорема Бэкмана — Куарлеса обобщается на отображения комплексных пространств и для отображений в $\mathbb{R}^n$ пространства F^n, где F есть поле характеристики 0, а также доказываются некоторые дискретные версии этой теоремы.

1.1. Содержание и структура статьи. В настоящей статье мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.3. *Пусть X — геодезически полное локально компактное связное на бесконечности* CAT(0)*-пространство и $f : X \to X$ — биекция. Если для f выполнено, что $|f(x)f(y)| = 1$ тогда и только тогда, когда $|xy| = 1$, то f есть изометрия пространства X.*

Следуя логике статьи [1], мы будем доказывать более сильную теорему, утверждающую, что при условиях теоремы 1.3 метрика пространства однозначно определяется его диагональной трубкой, соответствующей произвольному числу $r > 0$. В дальнейшем мы всегда будем считать $r = 1$, но сохраним термин В. Н. Берестовского «r-последовательность» и индекс r в обозначении отрезков r-последовательностей. При этом мы будем задействовать также границу

$$\partial V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| = 1\} \subset X \times X$$

и внутренность

$$\mathrm{Int}\, V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| < 1\} \subset X \times X$$

диагональной трубки V.

Теорема 1.4. *Пусть метрическое пространство (X, d) такое же, как в теореме 1.3, и V — его диагональная трубка, соответствующая числу 1. Пусть метрика d' на множестве X такова, что метрическое пространство (X, d') с диагональной трубкой V' также удовлетворяет условиям теоремы 1.3. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $V = V'$,
(2) $\partial V = \partial V'$,
(3) $\operatorname{Int} V = \operatorname{Int} V'$,
(4) $d = d'$.

Для доказательства того, что теорема 1.3 является следствием теоремы 1.4, достаточно рассмотреть на X метрику $d' = f^*d$:

$$f^*d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Для нее в условиях теоремы 1.3 справедливо равенство $\partial V = \partial V'$.

Всякую метрику d', удовлетворяющую условиям теоремы 1.3 и имеющую V своей диагональной трубкой, мы будем называть *метрикой, реализующей* V, или, коротко, V*-метрикой*. В частности, метрикой, реализующей V, является сама метрика d. Теорема 1.4 утверждает, что d — единственная метрика на X, которая реализует V. Однако изначально мы предполагаем существование некоторого множества таких метрик и будем приближаться к доказательству теоремы, последовательно показывая, что произвольная V-метрика совпадает с d на все большем подмножестве в $X \times X$.

В § 2 настоящей статьи приводятся некоторые необходимые понятия и факты теории пространств неположительной кривизны и даются основные определения. Непосредственно доказательству теоремы 1.4 для пространств неположительной кривизны по Александрову посвящены § 3, 4. Общий подход к доказательству отличен от стратегии, примененной в статье [1], базовый шаг которой состоит в восстановлении по диагональной трубке V трубки $\frac{1}{2}V$, соответствующей числу $\frac{1}{2}$. Этот шаг применяется одновременно ко всему пространству и затем бесконечно повторяется. В нашем случае метрика восстанавливается на каждой отдельно взятой геодезической. Геодезические в пространствах неположительной кривизны различаются по их рангу. Обычно под рангом геодезической понимается максимальная размерность изометрически вложенного в X евклидова пространства, содержащего данную геодезическую. Здесь мы несколько отходим от этой трактовки и считаем геодезическими высшего ранга геодезические, лежащие на границе вложенной в X плоской полосы. Если геодезическая не лежит на границе плоской полосы, мы называем ее *геодезической ранга один*. Мы задействуем еще одно изменение в трактовке понятия ранга геодезических. Геодезические будут дополнительно подразделяться на геодезические виртуально высшего ранга и геодезические строго ранга один. Точные определения этих понятий даются в п. 2.3.

В § 3 рассматривается случай геодезической виртуально высшего ранга, в § 4 — случай геодезической строго ранга один. В каждой из рассматриваемых ситуаций автор задействует новые конструкции: так называемые «тесемки» для геодезических высшего ранга и «ножницы» для геодезических ранга один.

Автор выражает благодарность В. Н. Берестовскому за полезные обсуждения при подготовке статьи и особую признательность рецензенту за внимание к статье и ряд ценных рекомендаций и замечаний.

§ 2. Основные понятия

2.1. Необходимые сведения из теории пространств неположительной кривизны. В этом параграфе мы напоминаем основные определения и факты геометрии пространств Александрова неположительной кривизны. Подробную информацию о геометрии пространств Александрова ограниченной сверху кривизны можно найти в работах [9–11] и др.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. В дальнейшем расстояние d между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy| := d(x, y)$. Шар радиусом ρ с центром в точке $x \in X$ обозначается через $B(x, \rho)$, соответствующая ему граничная сфера — через $S(x, \rho)$. Для множества $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$N_\varepsilon(A) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ для некоторого } a \in A\}$$

понимается как ε-окрестность A. Для замкнутых множеств $A, B \subset X$ *расстояние Хаусдорфа* между A и B равно по определению

$$d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon \mid A \subset N_\varepsilon(B),\ B \subset N_\varepsilon(A)\};$$

в частности, если не существует такого $\varepsilon > 0$, что $A \subset N_\varepsilon(B)$ и $B \subset N_\varepsilon(A)$, то $d_H(A, B)$ принимается равным ∞.

Геодезическая в метрическом пространстве (X, d) есть по определению образ локально изометричного отображения $c : I \to X$ некоторого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в X, т. е. такого отображения, что в окрестности U каждой точки $t \in I$ для всех $s_1, s_2 \in U$ выполнено равенство $d(c(s_1), c(s_2)) = |s_1 - s_2|$. Говорят, что отображение c есть *натуральная параметризация* указанной геодезической. В дальнейшем мы будем всегда рассматривать натурально параметризованные геодезические, не делая различий между самой геодезической и ее натуральной параметризацией. Если в качестве окрестности U можно взять весь промежуток I, то геодезическая c называется *кратчайшей.* Если при этом I — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то мы говорим, что $c(I)$ — это *отрезок, соединяющий* $c(a)$ и $c(b)$. Если $I = \mathbb{R}$, геодезическая c называется *полной геодезической.* Пространство (X, d) называется *геодезическим метрическим пространством*, если любые две точки соединимы отрезком. Геодезическое пространство называется *геодезически полным*, если в нем любая геодезическая может быть продолжена до полной геодезической (не обязательно единственным способом). Из теоремы Хопфа — Ринова (см. [12, теорема 2.3]) следует, что геодезически полное локально компактное пространство *конечно компактно*, т. е. всякое ограниченное замкнутое множество в нем компактно.

Треугольником в геодезическом пространстве X называется объединение трех кратчайших отрезков, $c_i : [a_i, b_i] \to X$, $i = \overline{1,3}$, называемых *сторонами* треугольника, попарно соединяющих три точки x_j, $j = \overline{1,3}$, называемых его *вершинами.*

Для тройки точек $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$ в пространстве X *треугольник сравнения* $\overline{\Delta} \subset \mathbb{E}^2$ на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ с вершинами $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, соответствующими x_1, x_2, x_3, имеет длины сторон $d_\kappa(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = d(x_i, x_j)$, $i, j = \overline{1,3}$. Треугольник сравнения определен с точностью до евклидовой изометрии. Если c_i — стороны треугольника с вершинами Δ, то стороны соответствующего треугольника сравнения $\overline{\Delta}$ обозначаются через $\bar{c}_i$.

Точка $\overline{m} \in \overline{\Delta}$ соответствует точке $m \in \Delta$, если для некоторого i найдется число $t_i \in [a_i, b_i]$, для которого $\overline{m} = \bar{c}_i(t_i)$ и $m = c_i(t_i)$. Треугольник, вершины которого образуют тройку Δ, называется *тонким*, если для любой пары его точек m, n и для пары соответствующих им точек $\overline{m}$, $\bar{n}$ треугольника сравнения на модельной поверхности M_κ выполнено неравенство

$$d(m,n) \le d_{\mathbb{E}}(\overline{m}, \bar{n}), \tag{2.1}$$

где $d_{\mathbb{E}}$ — евклидово расстояние.

Область U в геодезическом метрическом пространстве X называется 0-*областью* (или *областью* R_0), если всякий треугольник, целиком лежащий в U, является тонким. Полное геодезическое метрическое пространство X называется *пространством Александрова неположительной кривизны*, если всякая его точка обладает окрестностью U, являющейся 0-областью. CAT(0)-*пространство* — это пространство Александрова неположительной кривизны, являющееся 0-областью. В силу теоремы Александер — Бишопа [13] всякое CAT(0)-пространство односвязно.

2.2. Граница пространства неположительной кривизны. Понятие границы пространства неположительной кривизны по Александрову хорошо известно. К нему есть два существенно различных подхода, дающих в итоге один и тот же результат. Здесь нам понадобятся оба определения. В тех случаях, когда различия несущественны, мы будем говорить о границе в общем смысле.

Определение 2.1. Геодезические лучи $c, d : [0, +\infty) \to X$ в метрическом пространстве X называются *асимптотическими*, если хаусдорфово расстояние между ними конечно:

$$\mathrm{Hd}(c,d) < +\infty.$$

Отношение асимптотичности есть эквивалентность на множестве геодезических лучей в X. Множество классов эквивалентности называется *геодезической идеальной границей* пространства X и обозначается через $\partial_g X$. Объединение $\overline{X}_g = X \cup \partial_g X$ называется *геодезическим идеальным замыканием* X. Приведенная здесь терминология соответствует понятиям геодезической границы и геодезического замыкания, введенным в [14].

Для пары точек $y, z \in \overline{X}$ запись $[yz]$ означает соединяющий их отрезок, если $y, z \in X$, или геодезический луч с началом в y, идущий в направлении z, если $y \in X$, а $z \in \partial_g X$ (если X есть локально компактное CAT(0)-пространство, то такой луч существует и однозначно определен), или произвольную полную геодезическую с концами в y и z, если $y, z \in \partial_g X$, и такая геодезическая существует.

На замыкании $\overline{X}_g$ естественно вводится *коническая топология* как топология равномерной сходимости на ограниченных множествах отрезков и лучей. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \overline{X}_g$ сходится в конической топологии к точке $x \in \overline{X}_g$, если для отмеченной точки $o \in X$ последовательность натурально параметризованных отрезков или лучей $\{[ox_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно на ограниченных множествах сходится к натуральной параметризации отрезка (луча) $[ox]$. Коническая топология на $\overline{X}_g$ не зависит от выбора отмеченной точки o. Индуцированная топология на геодезической идеальной границе $\partial_g X$ также называется *конической*.

Определение 2.2. Для произвольного локально компактного метрического пространства X определено его вложение Куратовского в пространство $C(X)$ непрерывных функций на X. Именно, если $o \in X$ — отмеченная точка, то точка

x отождествляется с *дистанционной функцией* d_x, которая определена равенством

$$d_x(y) = |xy| - |ox|.$$

Пусть $C^*(X) = C(X)/\{\text{consts}\}$ — фактор-пространство $C(X)$ по подпространству констант. Тогда проекция $C(X) \to C^*(X)$ порождает вложение $i : X \to C^*(X)$, не зависящее от выбора отмеченной точки o. Топология на $C^*(X)$ наследуется из компактно-открытой топологии на $C(X)$. Мы будем отождествлять само пространство X с его образом $i(X)$.

Метрическим замыканием пространства X называется замыкание его образа $i(X) \subset C^*(X)$. Метрическое замыкание обозначается через $\overline{X}_m$, *метрическая граница* есть по определению $\partial_m X = \overline{X}_m \setminus X$. О происхождении термина «метрическое замыкание» см. [15]. Функции, составляющие метрическую границу, называются *орифункциями*. Они являются пределами в смысле компактно-открытой топологии для дистанционных функций. Частным случаем орифункций служат *функции Буземана*. Для геодезического луча $c : [0, +\infty) \to X$ функция Буземана β_c, порождаемая им, определяется равенством

$$\beta_c(y) = \lim_{t \to +\infty} (|yc(0)| - t).$$

Для орифункции $\Phi \in \partial_m X$ по произвольной точке $x \in X$ определяются *орисфера*

$$\mathscr{HS}(\Phi, x) = \{y \in X \mid \Phi(y) = \Phi(x)\}$$

и *оришар*

$$\mathscr{HB}(\Phi, x) = \{y \in X \mid \Phi(y) \leq \Phi(x)\},$$

т. е. соответствующие x множества уровня и подуровня орифункции Φ.

Если пространство X есть локально компактное CAT(0)-пространство, то его геодезическое и метрическое замыкания совпадают в следующем смысле: тождественное отображение Id_X однозначно продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_m \to \overline{X}_g$. Для гладких римановых односвязных многообразий неположительной кривизны совпадение двух границ доказано в [16], при этом метод доказательства применим к пространствам Александрова фактически дословно (см. [16]). В частности, всякая орифункция определена как функция Буземана по некоторому геодезическому лучу, а функции Буземана, определенные по асимптотическим лучам, отличаются лишь на константу. Идеальное замыкание CAT(0)-пространства X будет обозначаться через $\overline{X}$, а идеальная граница — через $\partial_\infty X$.

Определение 2.3. Пусть бесконечно удаленная точка $\xi \in \partial X$ задается лучом $c : \mathbb{R}_+ \to X$. *Орисферой* (соответственно *оришаром*) с центром ξ называется множество уровня

$$\mathscr{HS}(\xi, x) = \mathscr{HS}(\beta_c, x)$$

(соответственно множество подуровня $\mathscr{HB}(\xi, x) = \mathscr{HB}(\beta_c, x)$) функции Буземана β_c.

2.3. Ранг геодезической.

Определение 2.4. Полные геодезические c_1 и c_2 называются *параллельными*, если хаусдорфово расстояние $\mathrm{Hd}(c_1, c_2)$ между ними конечно. Лучи, содержащиеся в параллельных геодезических, задают ровно две точки идеальной границы. В CAT(0)-пространстве параллельные геодезические ограничивают плоскую полосу, т. е. изометрически вложенную в X полосу евклидовой плоскости. Геодезическая c называется *геодезической ранга один*, если она не лежит на границе плоской полосы в X. В этом случае c не допускает параллельных ей геодезических, отличных от нее самой. Если c лежит на границе плоской полосы, мы будем говорить, что c есть *геодезическая высшего ранга*.

Определение 2.5. Будем говорить, что полные геодезические c и d *соединены асимптотической цепью*, если определена такая конечная последовательность геодезических $c := c_0, c_1, \dots, c_n := d$, что при всех $i = \overline{1, n}$ геодезические c_{i-1} и c_i асимптотичны друг другу в одном из направлений. Геодезическая c *виртуально имеет высший ранг*, если существует геодезическая d высшего ранга, которую можно соединить с c асимптотической цепью. В частности, геодезическая высшего ранга сама является геодезической виртуально высшего ранга. Если геодезическая c не является геодезической виртуально высшего ранга, то будем говорить, что c *строго ранга один*.

2.4. Диагональная трубка пространства неположительной кривизны. Начиная с этого момента, мы считаем метрическое пространство (X, d) локально компактным геодезически полным односвязным и связным на бесконечности пространством неположительной кривизны по Александрову (или CAT(0)-пространством); $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ — его идеальное замыкание.

Предположим, что на множестве X заданы две метрики d и d', имеющие общую диагональную трубку V, и пусть оба метрических пространства (X, d) и (X, d') удовлетворяют условиям теоремы 1.3. При $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать диагональные трубки

$$nV := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| \le n\},$$

их границы

$$\partial(nV) := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| = n\}$$

и внутренности

$$\operatorname{Int}(nV) := nV \setminus \partial(nV).$$

Лемма 2.1. *Если две метрики d и d' на X таковы, что для каждой из них выполнены условия теоремы* 1.3, *и имеют общую диагональную трубку V, то для них также совпадают множества nV, $\partial(nV)$ и $\operatorname{Int}(nV)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Имеем $(x, y) \in 2V$ тогда и только тогда, когда существует точка $z \in X$, для которой $(x, z), (z, y) \in V$. Последнее выполняется или не выполняется для обоих метрик d и d' одновременно. По индукции $(x, y) \in nV$ тогда и только тогда, когда существует точка $z \in X$, для которой $(x, z) \in (n-1)V$ и $(z, y) \in V$. Пара (x, y) принадлежит $\partial(2V)$, если и только если существует единственная точка z, для которой $(x, z), (z, y) \in V$. В этом случае $(x, z), (z, y) \in \partial V$, а z является серединой отрезка $[xy]$. Поэтому метрики d и d' имеют общую границу $\partial(2V)$. Более того, $(x, z) \in \partial V$, если и только если существует такая пара $(x, y) \in \partial(2V)$, что z есть середина отрезка $[xy]$. Значит, граница ∂V по отношению к рассматриваемым метрикам также совпадает. По индукции доказывается совпадение границ $\partial(nV)$. Для $\operatorname{Int}(nV)$ равенство

$$\operatorname{Int}(nV) = nV \setminus \partial(nV)$$

выполняется по определению. $\square$

Таким образом, любые две V-метрики d и d' имеют общие открытые, замкнутые шары и сферы целочисленных радиусов.

Лемма 2.2. *В условиях леммы* 2.1 *если для метрик* d *и* d' *совпадает хотя бы одно из трех множеств* V, ∂V *или* $\operatorname{Int} V$, *то совпадают и оставшиеся два.*

Доказательство. В лемме 2.1 рассмотрен случай совпадения трубок V. Докажем лемму в двух оставшихся случаях.

Предположим, что d и d' имеют общую границу диагональной трубки ∂V. Аналогично лемме 2.1 отсюда следует совпадение диагональных трубок $2V$. В частности, метрики имеют общую систему шаров $B(x, 2n)$ четных радиусов, а следовательно, в силу условия и леммы 2.1 у них совпадают все сферы вида $S(x, 1)$ и $S(x, 2n)$ с $x \in X$. Теперь из связности на бесконечности X имеем $(x, y) \in \operatorname{Int} V$ тогда и только тогда, когда $S(x,1) \cap S(y,1) \neq \varnothing$ и $S(x,2) \cap S(y,1) = \varnothing$. Поэтому метрики имеют общую внутренность $\operatorname{Int} V$. Теперь $V = \operatorname{Int} V \cup \partial V$.

Наконец, пусть d и d' обладают общей внутренностью $\operatorname{Int} V$ трубки V. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ общими для них будут внутренности $\operatorname{Int}(nV)$ трубок nV. В силу геодезической полноты X соотношение $(x, y) \in \partial V$ выполняется тогда и только тогда, когда $(x, y) \notin \operatorname{Int} V$ и $B(y, 1) \subset B(x, 2)$. Действительно, если $1 < d(x, y) < 2$, то отрезок $[xy]$ включается в отрезок $[xz]$ длины $d(x, z) = \frac{1}{2}(3 + d(x, y))$. Для точки z верно включение $z \in B(y, 1) \setminus B(x, 2)$. Тем самым $\operatorname{Int} V$ однозначно определяет ∂V, а значит, и V. $\square$

Мы теперь можем считать, что заданы все три отношения: V, ∂V и $\operatorname{Int} V$.

2.5. r-Последовательности. Понятие r-последовательности введено в [1]. Мы применим следующую его трактовку.

Определение 2.6. Под *r-последовательностью* мы будем понимать изометрическое вложение $\mathbb{Z} \to X$ в пространство X множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Отрезок r-последовательности $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$, заключенный между x_{z_1} и x_{z_2}, будем обозначать через $[x_{z_1}, x_{z_1+1}, \dots, x_{z_2}]_r$.

Это определение вполне согласуется с определением В. Н. Берестовского, но не является конструктивным. Из рассмотрения r-последовательностей в [16] и лемм 2.1 и 2.2 следует, что, зная диагональную трубку V, можно определить для произвольной последовательности точек $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$, параметризованной множеством $\mathbb{Z}$, является ли она r-последовательностью. Иначе говоря, все реализующие диагональную трубку V метрики имеют одно и то же семейство r-последовательностей.

Всякая r-последовательность лежит на однозначно определенной геодезической, и, обратно, для задания геодезической достаточно указать какую-нибудь r-последовательность, содержащуюся в ней. Таким образом, если даны две V-метрики d и d', то r-последовательности задают соответствие τ между их геодезическими: геодезическая a' в метрике d' соответствует геодезической a в метрике d, если они задаются общей r-последовательностью. Если в пространстве (X, d) все геодезические имеют ранг один, то отсюда следует, что соответствие τ взаимно однозначно. Из дальнейшего рассмотрения следует, что утверждение о взаимной однозначности соответствия τ справедливо и в общем случае пространства неположительной кривизны, удовлетворяющего условиям теоремы 1.3.

Определение 2.7. Две r-последовательности $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ и $\{y_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ называются *параллельно эквивалентными*, если хаусдорфово расстояние между ними конечно:

$$\operatorname{Hd}(\{x_z\}, \{y_z\}) < +\infty.$$

Последнее условие равносильно следующему: существует такое натуральное число n, что при всех $z \in \mathbb{Z}$ верно $(x_z, y_z) \in V_n$.

Лемма 2.3. *Геодезическая, задаваемая r-последовательностью $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, имеет высший ранг тогда и только тогда, когда существует параллельно эквивалентная ей r-последовательность $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, отличная от $\{x_{z\pm1}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, для которой $(x_0, y_0) \in \partial V$.*

Доказательство. Если геодезическая a имеет высший ранг, то достаточно в качестве y_0 взять внутреннюю точку плоской полосы, содержащей a, для которой $|x_0y_0| = 1$. Геодезическая, проходящая через y_0 параллельно a, определяется требуемой r-последовательностью. Обратно, если $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ есть указанная r-последовательность, то она определяет геодезическую a', параллельную a. По лемме о плоской полосе (см. [16] или [11]) две параллельные геодезические в пространстве неположительной кривизны ограничивают плоскую полосу в X. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть a — геодезическая ранга один в метрике d. Тогда a является геодезической и имеет ранг один и в произвольной реализующей V метрике d'.*

Доказательство. Линия a задает семейство r-последовательностей, в котором никакие две несовпадающие поточечно r-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ не удовлетворяют условию $(x_0, y_0) \in \partial V$. Все рассматриваемые r-последовательности параллельно эквивалентны и образуют целый класс параллельно эквивалентных r-последовательностей. В силу леммы задаваемые ими геодезические не могут быть различными параллельными линиями ни в какой V-метрике. Следовательно, такие геодезические совпадают попарно друг с другом и с линией a. $\square$

2.6. Орисферический перенос метрики. Как следует из [1, предложение 3.5], множества оришаров и орисфер совпадают для любых двух метрик d и d' пространства X, реализующих V. На этом основана следующая возможность переноса метрики.

Лемма 2.4. *Пусть линии γ и γ_1 являются геодезическими в двух реализующих V метриках d и d' и асимптотичны в направлении идеальной точки $\xi = c(+\infty) \in \partial X$. Предположим, что вдоль γ выполняется равенство $d = d'$. Тогда $d = d'$ и вдоль γ_1.*

Доказательство. Рассмотрим точки $x_1, y_1 \in \gamma_1$ и орисферы

$$\mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, x_1) = \beta_c^{-1}(x_1) = {\beta'}_c^{-1}(x_1)$$

и

$$\mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, y_1) = \beta_c^{-1}(y_1) = {\beta'}_c^{-1}(y_1),$$

где β_c и β'_c соответственно функции Буземана, отвечающие лучу c в метриках d и d'. Обозначим $x = \gamma \cap \mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, x_1)$ и $y = \gamma \cap \mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, y_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} d'(x_1, y_1) &= |\beta'_c(x_1) - \beta'_c(y_1)| = |\beta'_c(x) - \beta'_c(y)| \\ &= d'(x, y) = d(x, y) = |\beta_c(x) - \beta_c(y)| = |\beta_c(x_1) - \beta_c(y_1)| = d(x_1, y_1). \quad \square \end{aligned}$$

§ 3. Восстановление метрики на геодезической виртуально высшего ранга

В силу леммы 2.3 если r-последовательность задает геодезическую a высшего ранга в метрике d, то геодезическая a', задаваемая этой r-последовательностью, имеет высший ранг и в произвольной V-метрике d'. В этом параграфе мы доказываем, что геодезические a и a' совпадают поточечно и вдоль a имеется равенство метрик $d = d'$.

3.1. Тесемки.

Определение 3.1. Будем говорить, что набор из $4p$ ($p \in \mathbb{N}$) параллельно эквивалентных r-последовательностей

$$\{x_{i,j;z}\}_{z\in\mathbb{Z}}, \quad i = \overline{0,3},\ j = \overline{1,p}, \tag{3.1}$$

образует *p-тесемку*, если следующие $4p+4$ точки:

$$x_{i,1,0}, \dots, x_{i,p,0},\ i = \overline{0,3}, \quad x_{0,1,2p-1}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p-1,1-2p}, x_{3,p,1-2p},$$

дополнительно образуют систему отрезков r-последовательностей:

$$\left\{\begin{array}{l} [x_{0,1,0}, x_{1,1,0}, x_{2,1,0}, x_{3,1,0}]_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_{0,p,0}, x_{1,p,0}, x_{2,p,0}, x_{3,p,0}]_r, \\ [x_{0,2,0}, x_{1,1,0}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p-1,1-2p}]_r, \\ [x_{0,3,0}, x_{1,2,0}, x_{2,1,0}, x_{3,p,1-2p}]_r, \\ [x_{0,4,0}, x_{1,3,0}, x_{2,2,0}, x_{3,1,0}]_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_{0,p,0}, x_{1,p-1,0}, x_{2,p-2,0}, x_{3,p-3,0}]_r, \\ [x_{0,1,2p-1}, x_{1,p,0}, x_{2,p-1,0}, x_{3,p-2,0}]_r. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

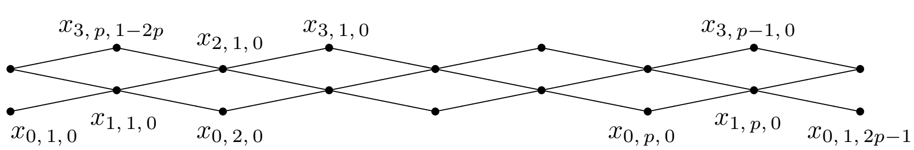

Рис. 1. p-Тесемка.

Определение p-тесемки дается в терминах r-последовательностей и не зависит от выбора V-метрики. На рис. 1 показан фрагмент p-тесемки. Здесь выделена лишь часть точек r-последовательностей, формирующих p-тесемку. На промежутке между точками $x_{1,1,0}$ и $x_{1,1,2p-1}$, принадлежащими одной и той же r-последовательности $\{x_{1,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, расположены $2(p-1)$ точек этой r-последовательности, которые делят отрезок соответствующей геодезической на $2p-1$ равных отрезков. На этом же отрезке указанной геодезической расположены $p-1$ точек вида $x_{1,j,0}$, $j = \overline{2,p}$, которые делят его на p равных отрезков. Таким образом, все точки r-последовательностей $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, попадающие на отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,2p-1}]$, делят его на $p(2p-1)$ равных отрезка, а отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,1}]$ делится точками $x_{1,p,3-2p}, x_{1,p-1,5-2p}, \dots, x_{1,2,-1}$ на p отрезков длины $1/p$.

План исследования геодезической a высшего ранга сводится к следующему. Линия $a : \mathbb{R} \to X$, задаваемая r-последовательностью $\{x_z = a(z)\}_{z\in\mathbb{Z}}$, включается в некоторую плоскую полосу. Она может лежать внутри полосы или быть граничной геодезической, не попадая внутрь никакой плоской полосы. Если a — внутренняя линия плоской полосы F, то для достаточно большого $P \in \mathbb{N}$ при каждом $p > P$ в полосе найдется p-тесемка, определенная семейством r-последовательностей вида (3.1), для которой $x_z = x_{1,1,z}$ при всех $z \in \mathbb{Z}$. Точки r-последовательностей $x_{1,j,z}$ для всевозможных таких p-тесемок при всех $p > P$ заполняют множество точек рассматриваемой геодезической с рациональными значениями параметра.

После этого остается лишь показать, что отношение принадлежности точек геодезической a восстанавливается по V. Для точек с рациональным значением параметра это следует немедленно из построения тесемок, для иррациональных точек в силу топологической эквивалентности V-метрик возможен предельный переход. Затем предельный переход применяется по отношению к геодезическим, лежащим на границе плоских полос, но не попадающим внутрь.

3.2. Восстановление метрики геодезической высшего ранга. Здесь мы реализуем приведенный выше план.

Лемма 3.1. *Пусть r-последовательности* (3.1) *образуют p-тесемку. Тогда r-последовательности $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{2,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ содержатся в некоторой плоской полосе.*

Доказательство. Пусть p-тесемка определена r-последовательностями (3.1). Рассмотрим плоскую полосу F, заключенную между параллельными геодезическими a и a', содержащими r-последовательности $\{x_{0,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{3,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Тогда в этой же плоской полосе содержатся r-последовательности $\{x_{1,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{2,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$.

Покажем, что плоская полоса F в действительности содержит все перечисленные в формулировке леммы точки. Рассмотрим точки

$$x_{0,2,0}, x_{1,1,0}, x_{2,1,0}, x_{3,1,0}, x_{2,2,0}, x_{1,2,0}. \tag{3.3}$$

Для них из (3.2) имеем отрезки r-последовательностей

$$[x_{0,2,0}, x_{1,2,0}, x_{2,2,0}]_r, \quad [x_{1,p,1-2p}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p,1-2p}]_r.$$

В силу выпуклости метрической функции в пространстве неположительной кривизны функция

$$d_{2,1}(t) := |x_{t,2,0}x_{t+1,1,0}|,$$

где $x_{t,j,0} = c_j(t)$, а $c_j : [0,2] \to X$, $j = \overline{1,2}$, — натуральные параметризации отрезков $[x_{0,j,0}x_{1,j,0}]$, выпукла. Но

$$d_{2,1}(0) = d_{2,1}(1) = d_{2,1}(2) = 1,$$

а значит, $d_{2,1}(t) = 1$ при всех $t \in [0,2]$ и точки (3.3) принадлежат изометрически вложенному в X плоскому параллелограмму $x_{0,2,0}x_{1,1,0}x_{3,1,0}x_{2,2,0}$.

Аналогично шестерка точек

$$x_{2,1,0}, x_{3,1,0}, x_{2,2,0}, x_{1,3,0}, x_{0,3,0}, x_{1,2,0}$$

принадлежит изометрически вложенному в X плоскому параллелограмму

$$x_{2,1,0}x_{3,1,0}x_{1,3,0}x_{0,3,0}$$

и $|x_{2,1,0}x_{2,2,0}| = |x_{1,2,0}x_{1,3,0}|$. Выпуклый четырехугольник

$$x_{1,1,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,3,0}$$

получен объединением ромбов

$$x_{1,1,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,2,0}, \quad x_{1,2,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,3,0},$$

имеющих общий треугольник

$$x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,2,0}.$$

Поэтому он изометричен плоской трапеции. Точка $x_{1,2,0}$ лежит на отрезке $[x_{1,1,0}x_{1,3,0}]$ и является его серединой.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,2p-1}]$ разбивается точками $x_{1,j,0}$, $j = \overline{2,p}$, на p частей, равных отрезку $[x_{1,1,0}x_{1,2,0}]$. Таким образом, начальные точки всех r-последовательностей вида $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ лежат на границе a плоской полосы F. Значит, a содержит все указанные r-последовательности. Линия a', в свою очередь, содержит r-последовательности вида $\{x_{2,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$. □

Замечание 3.1. В [2] рассматривался случай, когда пространство не допускает налегания кратчайших. В такой ситуации не допускается также и налегания плоских полос, откуда следует, что вся тесемка содержится в одной плоской полосе. В общей ситуации «лепестки» тесемки, содержащие ее крайние r-последовательности, могут загибаться и переходить из одной плоской полосы на другую. Доказанная лемма показывает, что центральная часть тесемки ведет себя контролируемым образом.

Лемма 3.2. *Расстояние между параллельными геодезическими в X, содержащими r-последовательности $\{x_{0,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{3,k,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ данной тесемки, не зависит от индексов j, k и равно*

$$s(p) = \frac{3\sqrt{4p-1}}{2p}.$$

Доказательство. Указанное расстояние равно трем расстояниям между линиями a и a' из леммы 3.1. Поскольку любая плоская полоса в CAT(0)-пространстве изометрична полосе на евклидовой плоскости, для вычисления этого расстояния достаточно найти ширину p-тесемки на евклидовой плоскости. Эта задача решается элементарным вычислением. □

Следствие 3.1. *Для любой плоской полосы, содержащей внутри себя геодезическую a в X, существует такое $P > 0$, что при всех $p > P$ данная плоская полоса содержит p-тесемку, порожденную семейством r-последовательностей вида (3.1), при этом $\{x_{1,j,z}\} \subset a$.*

Лемма 3.3. *Пусть геодезическая $a : \mathbb{R} \to X$ высшего ранга в* CAT(0)-*пространстве X лежит внутри плоской полосы F и содержит r-последовательность $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, $x_0 = a(0)$. Тогда для любого рационального числа $q := \frac{m}{n}$ и для p, кратного n, всякая p-тесемка, для которой $x_z = x_{0,1,z}$, содержит точку $a(q) = x_{0,j,z'}$ при $j := n + 1 - m'$ и $z' := q' + 1 - 2k(n - m')$, где $q' := [q]$ — целая часть и $\frac{m'}{n} := \{q\}$ — дробная часть числа q.*

Доказательство получается прямым вычислением для p-тесемки на плоскости. □

Таким образом, при всех p, кратных n, всякая p-тесемка, построенная на точках $x_z = x_{1,1,z}$ заданной r-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, содержит точки $a(\frac{m}{n})$ как точки с определенным по числу p мультииндексом. Теперь мы приступаем к доказательству основной теоремы для геодезических высшего ранга.

Теорема 3.1. *Пусть $a : \mathbb{R} \to X$ — геодезическая высшего ранга в пространстве (X, d), содержащая r-последовательность $\{x_z\}$, $z \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой V-метрики d' на X линия a также есть геодезическая и вдоль нее выполняется равенство $d = d'$.*

Доказательство. Как уже отмечено, диагональная трубка V определяет свойство r-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ задавать геодезическую высшего ранга. В силу леммы 3.3 если a лежит внутри плоской полосы, то все V-метрики имеют одно и то же множество рациональных точек, т. е. точек вида $a(q)$, где $q \in \mathbb{Q}$.

Пусть число t иррационально и t_n, t'_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность его рациональных приближений с недостатком и с избытком соответственно. Тогда

$$a(t) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a((t'_n - 1), 1)\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a(t_n + 1), 1)\right)$$

и точка $a(t)$ однозначно определяется с помощью V.

Пусть теперь a лежит на границе плоской полосы F, не попадая внутрь никакой плоской полосы. Тогда сколь угодно близко к a имеется параллельная ей геодезическая a', вдоль которой $d = d'$. Из топологической эквивалентности V-метрик следует равенство $d = d'$ и вдоль a. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть a — геодезическая в X виртуально высшего ранга. Тогда для произвольной реализующей V метрики d' на X вдоль линии a справедливо равенство $d = d'$.*

Доказательство проводится кратным применением леммы 2.4 для орисферического переноса метрики с геодезической на асимптотическую с ней геодезическую. $\square$

4. Восстановление метрики на геодезической ранга один

4.1. Ножницы.

Определение 4.1. Мы говорим, что геодезические $a, b, c, d : (-\infty, +\infty) \to X$ в пространстве неположительной кривизны X образуют *ножницы* с *центром* в точке $x \in X$, если

- $a(-\infty) = b(-\infty)$;
- $a(+\infty) = c(+\infty)$;
- $c(-\infty) = d(-\infty)$;
- $b(+\infty) = d(+\infty)$;
- $b \cap c = x$.

Такая конфигурация будет обозначаться через $\langle a, b, c, d; x\rangle$ (рис. 2). Геодезические a и d называются *основаниями* ножниц. Первое из оснований считается *нижним*, второе — *верхним.* Основания могут проходить или не проходить через центр ножниц. В [2] рассматривался случай, когда пространство X не допускает налегания геодезических. В этой ситуации основания ножниц не содержат их центр. Четыре бесконечно удаленные точки на концах геодезических a, b, c, d порождают четыре класса функций Буземана, представленных функциями $\beta_{a(\pm\infty)}$ и $\beta_{d(\pm\infty)}$, для которых значения в точке x равны нулю: $\beta_{a(\pm\infty)}(x) = \beta_{d(\pm\infty)}(x) = 0$.

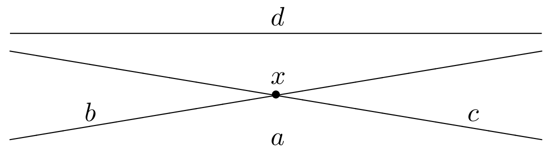

Рис. 2. Ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$.

С ножницами связано преобразование сдвига их нижнего основания a, которое и приводит к решению основной проблемы. Оно определяется как следующая композиция осевых изометрий. Пусть R_{ac} есть орисферический перенос с геодезической a на геодезическую c, порожденный функцией Буземана $\beta_{a(+\infty)}$: произвольная точка $m \in a$ переходит в единственную точку $m' = R_{ac}(m) \in c$, для которой $\beta_{a(+\infty)}(m') = \beta_{a(+\infty)}(m)$. Аналогично определяются переносы R_{cd}, R_{db} и R_{ba}, являющиеся изометрическими отображениями соответствующих геодезических при помощи функций Буземана с центрами в общих бесконечно удаленных точках.

Определение 4.2. *Сдвиг* T есть композиция

$$T := R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd} \circ R_{ac} : a \to a.$$

Очевидно, T — изометрия геодезической a, сохраняющая ее направление. *Величина сдвига* T, т. е. разность $\beta_{a(-\infty)}(T(m)) - \beta_{a(-\infty)}(m)$, не зависящая от выбора точки $m \in a$, обозначается через δT.

Величина δT допускает следующее описание. Пусть β_{a-}, β_{a+}, β_{d-} и β_{d+} — функции Буземана с центрами соответственно в точках $a(\pm\infty)$ и $d(\pm\infty)$ такие, что существуют точки $p \in a$ и $q \in d$, для которых $\beta_{a-}(p) = \beta_{a+}(p) = 0$ и $\beta_{d-}(q) = \beta_{d+}(q) = 0$.

Теорема 4.1. *Справедливо соотношение*

$$\delta T = \beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x) + \beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x) \geq 0. \tag{4.1}$$

Более того, если a есть геодезическая строго ранга один и $a \cap d = \varnothing$, то $\delta T > 0$.

Доказательство. Заметим, что суммы $\beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x)$ и $\beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x)$ не зависят от выбора точек $p \in a$ и $q \in d$, так как, скажем, при переходе от точки p к точке $p' \in a$ функции β_{a-} и β_{a+} меняются на константы, равные соответственно $\beta_{a-}(p')$ и $\beta_{a+}(p')$, причем $\beta_{a-}(p') = -\beta_{a+}(p')$. Для δT имеем

$$\delta T = t' - t,$$

где $a(t') = T(a(t))$.

Если $d(s) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(0))$, то и при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $d(s + t) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(t))$. Аналогично если $a(t) = R_{ba} \circ R_{db}(d(0))$, то и для всех $s \in \mathbb{R}$ будет $a(t + s) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s))$.

Пусть $p = a(0) = R_{ac}^{-1}(x)$ и $q = d(0) = R_{db}^{-1}(x)$. Тогда $\beta_{a+}(x) = \beta_{a+}(p) = 0$, $\beta_{d+}(x) = \beta_{d+}(q) = 0$ и

$$T(p) = R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd}(x) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s)),$$

где $s = \beta_{d-}(x)$. Далее, имеем

$$T(p) = a(\beta_{d-}(x) + t),$$

где $t = \beta_{a-}(x)$ Таким образом, сдвиг точки $p \in a$, а следовательно, и всякой точки геодезической a равен

$$\delta T = \beta_{a-}(x) + \beta_{d-}(x) - 0 = \beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x) + \beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x).$$

Поскольку x лежит в пересечениях оришаров $\mathscr{HB}(a(+\infty), x) \cap \mathscr{HB}(a(-\infty), x)$ и $\mathscr{HB}(d(+\infty), x) \cap \mathscr{HB}(d(-\infty), x)$, выполняется $\delta T \geq 0$. При $a \cap d = \varnothing$ мы можем считать, что $x \notin a$. В этом случае $b_{d-}(x) + b_{d+}(x) \geq 0$ и $b_{a-}(x) + b_{a+}(x) > 0$. $\square$

4.2. Тени.

Определение 4.3. *Полной тенью* точки x_0 относительно точки $y \in \overline{X} \setminus \{x_0\}$ называется множество

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0) := \{z \in \overline{X} \mid \exists [yz] x_0 \in [yz]\}.$$

Здесь предположение существования необходимо лишь в том случае, если обе точки y, z бесконечно удалены: $y, z \in \partial_\infty X$. *Сферической тенью* точки x_0 *радиусом* $\rho > 0$ относительно точки $y \in \overline{X}$ называется пересечение $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ ее полной тени $\mathrm{Shadow}_y(x_0)$ со сферой $S(x_0, \rho)$. В частности, если $\rho = +\infty$, то

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0, +\infty) := \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0)) := \mathrm{Shadow}_y(x_0) \cap \partial_\infty X.$$

Очевидны следующие свойства теней.

(1) Множества $\mathrm{Shadow}_y(x_0) \cup \{x_0\}$ и $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ замкнуты в $\overline{X}$ при всех $\rho > 0$.

(2) $\mathrm{Shadow}_y(x_0) = \overline{\bigcup\limits_{\rho > 0} \mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)} \setminus \{x_0\}$.

(3) Если $y \in X$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho) = S(y, |x_0 y| + \rho) \cap S(x_0, \rho)$.

(4) Если $y \in \partial_\infty X$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho) = (\mathscr{HS}_{y,\rho}) \cap S(x_0, \rho)$; здесь $\mathscr{HS}_{y,\rho}$ обозначает орисферу $\mathscr{HS}_{y,z}$, где $z \in X$ — точка такая, что для функции Буземана b_y с центром в y выполнено $b_y(z) - b_y(x_0) = \rho$.

(5) Если $\angle_{x_0}(y, z) = 0$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0) = \mathrm{Shadow}_z(x_0)$.

Из свойства (5) вытекает

Следствие 4.1. *Если направление в точке $c(0) = x_0$ луча $c : [0, \infty) \to X$, содержащего точку y, обладает единственным обратным, то для любых двух точек $z', z'' \in \mathrm{Shadow}_y(x_0)$*

$$\mathrm{Shadow}_{z'}(x_0) = \mathrm{Shadow}_{z''}(x_0).$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ под *ε-окрестностью* $\mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho))$ сферической тени $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ при $\rho < +\infty$ мы будем понимать ее ε-окрестность на сфере $S(y, |x_0 y| + \rho)$, если $y \in X$, или на орисфере $\mathscr{HS}_{y,\rho}$, если $y \in \partial_\infty X$.

Теорема 4.2. *Для любых $x_0 \in X$, $y \in \overline{X} \setminus \{x_0\}$ и чисел $0 < \rho < +\infty$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$, для которой справедливо равенство $|yx_1| = |yx_0|$ (или $b_y(x_1) = b_y(x_0)$, если $y \in \partial_\infty X$), выполнено включение*

$$\mathrm{Shadow}_y(x_1, \rho) \subset \mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)).$$

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для случая $y \in X$ методом от противного. Ситуация $y \in \partial_\infty X$ рассматривается аналогично. Предположим, что, каково бы ни было $\delta > 0$, существуют точка $x_\delta \in B(x_0,\delta)\cap S(y,|yx_0|)$ и точка $z_\delta \in S(y,|yx_0|+\rho)\setminus\mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0,\rho))$, для которых $x_\delta \in [yz_\delta]$. Выберем последовательность $\delta_n \to 0$ и соответствующие ей последовательности точек x_{δ_n} и z_{δ_n}. Имеем $x_{\delta_n} \to x_0$. В силу конечной компактности пространства X из z_{δ_n} можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сама z_{δ_n} сходится к точке $z \in S(y,|yx_0|+\rho)$. В натуральной параметризации отрезка $\gamma = [yz]$ выполняется

$$|x_0\gamma(|yx_0|)| \le |x_0x_{\delta_n}| + |x_{\delta_n}\gamma(|yx_0|) \le \delta_n + |z_{\delta_n}z|. \tag{4.2}$$

Правая часть (4.2) стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно, константа в левой части есть 0. Значит, $z \in \mathrm{Shadow}_y(x_0,\rho)$, и точки z_n при достаточно больших n принадлежат $\mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0,\rho))$, что противоречит их выбору. □

Для заданных множества $\mathscr{V} \subset \partial_\infty X$ и чисел $K,\varepsilon > 0$ рассмотрим (y,K,ε)-*окрестность* $\mathscr{V}$, т. е. множество

$$\mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\mathscr{V}) := \{\zeta \in \partial_\infty X \mid \exists \xi \in \mathscr{V}\ \zeta \in \mathscr{U}(\xi,y,K,\varepsilon)\},$$

где

$$\mathscr{U}(\xi,x_0,K,\delta) := \{\eta \in \partial_\infty X \mid |c(K)d(K)| < \varepsilon,\ c = [y,\xi];\ d = [y,\eta]\}.$$

Следующее утверждение есть лишь переформулировка теоремы 4.2 для случая $y \in X$.

Следствие 4.2. *Для любой окрестности $\mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0)))$ тени на бесконечности $\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0))$ для произвольной точки $y \in X$ существует такое $\delta > 0$, что для любой $x_1 \in B(x_0,\delta)$, удаленной от y на расстояние $|yx_1| = |yx_0|$, выполняется включение*

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_1)) \subset \mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0))).$$

4.3. Геометрия идеальной границы CAT(0)**-пространства.** В этом пункте мы напоминаем некоторые известные факты из асимптотической геометрии пространства неположительной кривизны (подробности см. в [11]).

Прежде всего заметим, что коническая топология идеальной границы допускает следующее описание. При фиксированном $\delta > 0$ и отмеченной точке $o \in X$ базу окрестностей произвольной точки $\xi \in \partial_\infty X$ составляет семейство множеств

$$\mathscr{B}_{o,\xi} := \{\mathscr{U}_{\delta,t}(o,\xi) \mid t > 0\}. \tag{4.3}$$

Здесь $\mathscr{U}_{\delta,t}(o,\xi) := \{\eta \in \partial_\infty X \mid |c(t)d(t)| < \delta\}$, где $c,d : [0,+\infty) \to X$ — лучи, выходящие из o в направлениях $\xi,\eta \in \partial_\infty X$ соответственно.

Помимо конической топологии граница пространства X допускает каноническую угловую метрику и так называемую метрику Титса. Для $\xi,\eta \in \partial_\infty X$ угловое расстояние между ними есть

$$\angle(\xi,\eta) := \sup\{\angle_x(\xi,\eta) \mid x \in X\}.$$

Метрика Титса — это внутренняя метрика, порождаемая угловой метрикой. Указанные две метрики эквивалентны, т. е. порождают одну и ту же топологию на $\partial_\infty X$.

Предложение 4.1 [11, предложение 9.5]. *Угловая метрика $\angle$ как функция $(\xi,\eta)\to\angle(\xi,\eta)$ полунепрерывна снизу по отношению к конической топологии: для любого $\varepsilon>0$ существуют окрестность $\mathscr{U}$ точки ξ и окрестность $\mathscr{V}$ точки η, для которых если $\xi'\in\mathscr{U}$ и $\eta'\in\mathscr{V}$, то*

$$\angle(\xi',\eta')>\angle(\xi,\eta)-\varepsilon.$$

Как следствие, метрика Титса также полунепрерывна снизу по отношению к конической топологии.

Предложение 4.2 [11, предложение 9.21]. *Пусть ξ_0,ξ_1 — две различные точки идеальной границы $\partial_\infty X$.*

1. *Если $\mathrm{Td}(\xi_0,\xi_1)>\pi$, то существует геодезическая $c:\mathbb{R}\to X$ с $c(+\infty)=\xi_0$ и $c(-\infty)=\xi_1$.*

2. *Если не существует геодезической $c:\mathbb{R}\to X$ с $c(+\infty)=\xi_0$ и $c(-\infty)=\xi_1$, то $\mathrm{Td}(\xi_0,\xi_1)=\angle(\xi_0,\xi_1)$ и найдется геодезический отрезок в метрике Титса, соединяющий ξ_0 с ξ_1.*

3. *Для геодезической $c:\mathbb{R}\to X$ выполняется $\mathrm{Td}(c(-\infty),c(+\infty))\geq\pi$, и равенство выполняется в том и только в том случае, когда c лежит на границе изометрически вложенной в X евклидовой полуплоскости.*

4. *Если диаметр границы в метрике Титса равен π, то всякая геодезическая в X ограничивает изометрически вложенную евклидову полуплоскость.*

4.4. Точки геодезической с единственным обратным направлением. Пусть $\Sigma_x X$ — пространство направлений в точке $x\in X$. Направления $\xi,\eta\in\Sigma_x X$ называются *взаимно обратными*, если $\angle_x(\xi,\eta)=\pi$. В случае геодезически полного пространства два направления $\xi,\eta\in\Sigma_x X$ взаимно обратны тогда и только тогда, когда существует геодезическая, проходящая через x так, что ее положительным направлением в x является ξ, а отрицательным — η.

Для данной геодезической a в CAT(0)-пространстве X мы обозначим через $\omega^+(a)$ множество точек $x\in a$, в которых положительное направление a имеет более чем одно обратное направление. Аналогично $\omega^-(a)$ — это множество точек на a, в которых отрицательное направление a имеет более чем одно обратное.

Теорема 4.3. *Множества $\omega^+(a)$ и $\omega^-(a)$ не более чем счетны.*

Доказательство. Для $\phi>0$ рассмотрим множество $\Omega^+_\phi(a)\subset\omega^+(a)$, определенное следующим образом: $x\in\Omega^+_\phi(a)$ равносильно тому, что существует направление $\zeta\in\Sigma_x X$, обратное к направлению луча $[xa(+\infty)]$, для которого $\angle_x(\zeta,a(-\infty))>\phi$. Покажем, что пересечение $\Omega^+_\phi(a)$ с любым отрезком $[xy]\subset a$ конечно.

Действительно, предположив, что на отрезке $[xy]\subset a$ содержится бесконечная последовательность точек $\{a(t_n)\}_{n=1}^\infty\subset\Omega^+_\phi(a)$, мы приходим к следующему противоречию с локальной компактностью X. Будем считать, что $x=a(0)$ и $y=a(-L)$, где $L=|xy|$. Для точки $a(t_n)$ мы найдем такую точку $z_n\in S(x,2L)$, что $a(t_n)\in[xz_n]$ и $\angle_{a(t_n)}(a(-\infty),z_n)>\phi$. Теперь для произвольного $n\neq k$ имеем $|z_nz_k|>2L\sin\frac{\phi}{2}$. Следовательно, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ не содержит фундаментальной подпоследовательности, и сфера $S(x,2L)$ некомпактна.

Поскольку $\omega^+(a)=\bigcup\limits_{\phi>0}\Omega^+_\phi(a)$ и $\Omega^+_\phi(a)\subset\Omega^+_\psi(a)$ при $\psi<\phi$, утверждение теоремы справедливо для $\omega^+(a)$. Множество $\omega^-(a)$ рассматривается аналогично. $\square$

4.5. Существование ножниц. В этом пункте будет доказана следующая теорема существования ножниц.

Теорема 4.4. *Пусть $a : (-\infty, +\infty) \to X$ — геодезическая строго ранга один и $x_0 \in a$ — точка, в которой оба направления a обладают единственными обратными. Тогда существует геодезическая a', проходящая через $a'(0) = x_0$ так, что $\angle_{x_0}(a(+\infty), a'(+\infty)) = 0$, со следующим свойством. Для любой окрестности $\mathscr{U}$ тройки*

$$(a'(+\infty), a'(-\infty), x_0) \in \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$$

существуют тройка $(\xi, \eta, x) \in \mathscr{U}$, где $x \neq x_0$, и ножницы $\langle a', b', c', d'; x\rangle$, для которых $b' = [a'(-\infty)\xi]$, $c' = [\eta a'(+\infty)]$ и $d' = [\eta\xi]$.

Доказательство. Заметим, что из условия на ранг геодезической a следует, что всякая геодезическая a', для которой

$$a'(+\infty) \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0))$$

или

$$a'(-\infty) \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)),$$

имеет ранг 1. Сначала мы покажем, что существуют ножницы с нижним основанием a и центром x, сколь угодно близким к x_0. В свете предыдущего замечания такое рассмотрение применимо в том числе и к геодезической a', идущей через x_0 в том же направлении, что и a.

Для числа $\rho > 0$ рассмотрим точки $y' = a(-\rho)$ и $y'' = a(\rho)$. Имеем

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0)) = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0)),$$

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)) = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)).$$

Полунепрерывная снизу функция

$$\mathrm{Td} : \partial_\infty X \times \partial_\infty X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

достигает своего минимума на компактном множестве

$$Q = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0)) \times \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)).$$

Отсюда и из условия на ранг a вытекает неравенство

$$\min(\mathrm{Td})|_Q > \pi. \tag{4.4}$$

Более того, при некоторых $K > \rho$ и $\varepsilon > 0$ существуют окрестности

$$\mathscr{N}' := \mathscr{N}_{y',K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0))), \quad \mathscr{N}'' := \mathscr{N}_{y'',K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)))$$

теней на бесконечности точки x_0, для которых

$$\inf\{\mathrm{Td}(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in \mathscr{N}' \times \mathscr{N}''\} > \pi. \tag{4.5}$$

Выберем δ_1-окрестность $B(x_0, \delta_1)$ точки x_0, определенную следствием 4.2 по окрестностям $\mathscr{N}_{y',K,\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0, \rho)))$ и $\mathscr{N}_{y'',K,\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0, \rho)))$.

Пусть также $\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0, \rho)))$ и $\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0, \rho)))$ — это $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности границ теней точки x_0 относительно точек $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$.

По теореме 4.2 существует δ_2-окрестность $B(x_0, \delta_2)$ точки x_0, в которой для каждой точки $x' \in B(x_0, \delta_2)$ верны включения

$$\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x', \rho) \subset \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0, \rho))),$$

$$\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x',\rho)\subset \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0,\rho))).$$

Обозначим $\delta_0:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для любой точки $x\in\mathscr{U}_{\delta_0}(x_0)$ и геодезических b и c, удовлетворяющих условиям

- $b(0)=c(0)=x$,
- $b(-\infty)=a(-\infty)$,
- $c(+\infty)=a(+\infty)$,

имеют место включения

$$\begin{aligned} b(\rho)&\in\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0,\rho))),\\ c(-\rho)&\in\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0,\rho))). \end{aligned}\tag{4.6}$$

Покажем, что

$$b(+\infty)\in\mathscr{N}'\tag{4.7}$$

и

$$c(-\infty)\in\mathscr{N}''.\tag{4.8}$$

Для луча $\gamma=[y'b(+\infty)]$ с натуральной параметризацией $\gamma:[0,+\infty)\to X$ и геодезической a', проходящей через x_0 так, что $a'(+\infty)\in\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0))$, выполняется

$$|\gamma(2\rho)a'(\rho)|\le|\gamma(2\rho)b(\rho)|+|b(\rho)a'(\rho)|.$$

Первое слагаемое здесь имеет оценку

$$|\gamma(2\rho)b(\rho)|\le|\gamma(0)b(-\rho)|=|a(-\rho)b(-\rho)|\le|a(0)b(0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу (4.6) геодезическая a' может быть выбрана так, что для второго слагаемого также справедлива оценка

$$|b(\rho)a'(\rho)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно

$$|\gamma(2\rho)a'(\rho)|<\varepsilon,$$

что доказывает включение (4.7). Включение (4.8) рассматривается аналогично.

Итак, в силу (4.5) существует геодезическая d в X, соединяющая точки $c(-\infty)$ и $b(+\infty)$, формируя в итоге ножницы $\langle a,b,c,d;x\rangle$.

Теперь, взяв последовательность $\delta_n\to 0$, построим для каждого δ_n ножницы $\langle a_n,b_n,c_n,d_n;x_n\rangle$, для которых $|x_0x_n|<\delta_n$. Выберем предельные точки $\xi,\eta\in\partial_\infty X$ для последовательностей $b_n(+\infty)$ и $c_n(-\infty)$ соответственно. Для них

$$\xi\in\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0)),\quad \eta\in\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)).$$

Значит, точки ξ и η можно соединить геодезической $a'=[\eta\xi]$ в X так, что $a'(0)=x_0$ и для любого $\delta>0$ существуют ножницы $\langle a',b',c',d';x\rangle$ с нижним основанием a', центр которых x удален от x_0 на расстояние $|xx_0|<\delta$. Заметим, что точку x всегда можно выбрать отличной от x_0 и не принадлежащей a'.

Осталось показать, что такие ножницы можно выбрать так, что $b'(+\infty)$ сколь угодно близка к ξ, а $c'(-\infty)$ — к η в конической топологии на $\partial_\infty X$. Этого можно добиться, повторив предыдущие рассуждения применительно к окрестностям точек $a'(\pm\infty)$ вместо окрестностей теней на бесконечности точки x_0. Метод, по которому построена геодезическая a', гарантирует, что множества

$$C_{-\infty}(B(a'(K),\varepsilon))=\bigcup_{y\in B(a'(K),\varepsilon)}[ya'(-\infty)],$$

$$C_{+\infty}(B(a'(-K),\varepsilon)) = \bigcup_{z\in B(a'(-K),\varepsilon)} [za'(+\infty)]$$

пересекаются при любых $\varepsilon, K > 0$ и, более того,

$$C_{-\infty}(\mathscr{N}_\varepsilon(a'(K))) \cap C_{+\infty}(\mathscr{N}_\varepsilon(a'(-K))) \\ \cap (X \setminus (\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0) \cup \mathrm{Shadow}_{y''}(x_0) \cup \{x_0\}) \cap B(x_0,\varepsilon)) \neq \varnothing.$$

Этого вполне достаточно, чтобы выполнить требуемое построение. □

4.6. Непрерывность сдвига. В настоящем пункте доказывается непрерывность функции сдвига δ как функции, определенной на подходящем подмножестве в $\partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$. Доказательство здесь значительно упрощено по сравнению с аналогичной теоремой в [2].

Пусть задана геодезическая $a : \mathbb{R} \to X$ строго ранга один. Обозначим через $Z(a) \subset \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$ подмножество, состоящее из таких троек $(\xi, \eta, x) \in \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$, что существуют ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$ с $b(+\infty) = \xi$ и $c(-\infty) = \eta$.

Теорема 4.5. *Функция сдвига δ на множестве $Z(a)$ непрерывна.*

Доказательство. Используем (4.1). Пусть дана тройка $(\xi_0, \eta_0, x_0) \in Z(a)$. Точка x_0 является центром ножниц $\langle a, b_0, c_0, d_0; x_0\rangle$, где $b_0(+\infty) = \xi_0$ и $c_0(-\infty) = \eta_0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по непрерывности функций Буземана b_{a-} и b_{a+} существует такое число σ_1, что если для точки $x' \in X$ справедливо неравенство $|x_0x'| < \sigma_1$, то

$$|b_{a+}(x') + b_{a-}(x') - b_{a+}(x_0) - b_{a-}(x_0)| < \varepsilon/3. \tag{4.9}$$

Во-вторых, воспользуемся совпадением геодезической и метрической границ пространства X. Иначе говоря, всякая окрестность U геодезической идеальной точки $\xi \in \partial_g X$ есть окрестность метрической идеальной точки, задаваемой функцией Буземана β_ξ, и наоборот.

Выберем окрестность V точки x_0, имеющую компактное замыкание, в которой значения функций Буземана $b_{d\pm}$ отличаются от $b_{d\pm}(x_0)$ не более чем на $\varepsilon/6$. Обозначим через

$$U_\pm(V) := C\biggl(V, \biggl(b_\pm(x_0) - \frac{1}{6}\varepsilon, b_\pm(x_0) + \frac{1}{6}\varepsilon\biggr)\biggr)$$

окрестности функций Буземана $b_\pm$ в $C(X)$, включающие функции, принимающие на V значения, отличающиеся от $b_\pm$ не более чем на $\varepsilon/6$, и пусть $\mathscr{U}_\pm := U_\pm/\operatorname{consts} \cap \partial_m X$ — порождаемые ими окрестности в $\partial_m X = \partial_g X$. Совпадение границ означает, что если луч d' таков, что $d'(+\infty) \in \mathscr{U}_+$, то для порождаемой им функции Буземана $\beta_{d'}$ в окрестности V для любой точки x' выполняется

$$|b_{d+}(x_0) - \beta_{d'}(x') - \mathrm{const}\,| < \varepsilon/3$$

с некоторой константой, и если луч d'' таков, что $d''(+\infty) \in \mathscr{U}_-$, то в окрестности V имеем

$$|b_{d-}(x_0) - \beta_{d''}(x') - \mathrm{const}'\,| < \varepsilon/3.$$

Поскольку все функции Буземана с общим центром отличаются на константы, то в предыдущих неравенствах константы можно считать равными нулю.

Обозначим $\mathscr{U} = (\mathscr{U}_+ \times \mathscr{U}_- \times V) \cap Z$. Тогда для любой тройки $(\xi', \eta', x') \in \mathscr{U}$, порождающей ножницы $\langle a, b', c', d'; x'\rangle$ со сдвигом δ', имеем

$$|\delta' - \delta| = |(b_{a-}(x_0) + b_{a+}(x_0) + b_{d-}(x_0) + b_{d+}(x_0)) \\ - (b_{a-}(x') + b_{a+}(x') + b_{d'-}(x') + b_{d'+}(x'))| < \varepsilon. \quad □$$

Теорема 4.6. *Пусть $x_0 \in a$ — точка геодезической a строго ранга один. Тогда если $(\xi, \eta, x) = (b(+\infty), c(-\infty), x) \subset Z$ стремится к $(a(+\infty), a(-\infty), x_0)$ в смысле топологии произведения на $\partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$, то $\delta(\xi, \eta, x) \to 0$.*

Доказательство. Определим «*закрытые*» ножницы $\langle a, a, a, a; x_0 \rangle$ как совокупность четырех экземпляров линии a и центра x_0. Для них естественно считать сдвигом тождественное преобразование $T = \mathrm{id}_a$, для которого $\delta T = 0$. При этом функция δ, будучи доопределенной на $Z(a) \cup \{(a(+\infty), a(-\infty), x) \mid x \in a\}$ равенством $\delta(a(+\infty), a(-\infty), x) = 0$ при $x \in a$, остается непрерывной. $\square$

Ключевую роль в оставшейся части доказательства теоремы 1.4 играет следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Пусть a — геодезическая строго ранга один. Тогда существуют точка $x_0 \in a$, геодезическая a', соединенная с a асимптотической цепью, и число $\Delta > 0$, для которых при любом $\delta \in (0, \Delta)$ существуют ножницы $\langle a', b, c, d; x \rangle$, для которых величина сдвига T равна $\delta T = \delta$.*

4.7. Восстановление метрики на геодезической ранга один. Процесс восстановления метрики на геодезической строго ранга один полностью соответствует процедуре, описанной в статье [2]. Здесь мы приводим доказательства в терминах V-метрик.

Лемма 4.1. *Пусть $x \notin a$ и $\xi, \eta \in \partial_\infty X$. Тогда если тройка (ξ, η, x) принадлежит множеству $Z(a)$ в метрике d, то $(\xi, \eta, x) \in Z(a)$ и в любой V-метрике d' на X.*

Доказательство. Если две полные геодезические γ и γ', задаваемые соответственно r-последовательностями $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$, асимптотичны в метрике d, то они асимптотичны в том же направлении и по отношению к произвольной реализующей V метрике d'. Утверждение леммы следует из того факта, что понятие ножниц базируется только на асимптотичности геодезических. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть геодезическая a строго ранга один. Тогда для данных ножниц $\langle a, b, c, d; x \rangle$ образ $T(m) \in a$ произвольной точки $m \in a$ под действием сдвига T не зависит от выбора V-метрики на X.*

Доказательство. По условию на ранг a все четыре геодезические в ножницах имеют ранг один. Значит, они являются геодезическими и в произвольной V-метрике d'. Преобразования R_{ab} и т. д., определяющие сдвиг T, определены для точки m с помощью пересечений указанных геодезических с орисферами. Так как множество орисфер не зависит от выбора V-метрики, то и образ $T(m)$ определен независимо от d'. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть a — геодезическая в пространстве (X, d) строго ранга один. Тогда она является геодезической в произвольной V-метрике d' и вдоль a выполняется равенство $d = d'$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы является следствием условия на ранг геодезической $a : \mathbb{R} \to X$. В силу следствия 4.3 найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ существуют ножницы со сдвигом T_n и величиной сдвига $\delta T_n = 1/n$. Пусть $x_0 = a(0)$, $x' = T_n(x)$ и $x_1 = (T_n)^n(x) = a(1)$. В силу равенства (4.1) величина δT в V-метрике не зависит от выбора начальной точки. Поэтому $d(x_0, x') = d'(x_0, x') = 1/n$. Вообще если для точек $x, y \in a$ расстояние $d(x, y)$ рационально, то $d(x, y) = d'(x, y)$. Предельный переход, аналогичный примененному в доказательстве теоремы 3.1, приводит к равенству $d = d'$ для произвольных точек линии a. $\square$

Теперь мы готовы окончательно доказать основное утверждение статьи.

Доказательство теоремы 1.4. Эквивалентность утверждений (1)–(3) доказана в леммах 2.1 и 2.2. Все они легко следуют из (4). Остается доказать, что утверждение (4) есть следствие утверждений (1)–(3), т. е. что d — единственная метрика на X, реализующая V.

Пусть d' — V-метрика на пространстве X. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Отрезок $[xy]$ включается в некоторую полную геодезическую a. Такая геодезическая может быть неединственной, но нам достаточно рассмотреть любую из них. Если a имеет высший или виртуально высший ранг, то $d(x, y) = d'(x, y)$ в силу теоремы 3.1 или следствия 3.2. Если же a имеет строго высший ранг, то равенство расстояний выполняется ввиду теоремы 4.7. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berestovskiĭ V. N.* Isometries in Aleksandrov spaces of curvature bounded above // Ill. J. Math. 2002. V. 46, N 2. P. 645–656.
2. *Андреев П. Д.* Восстановление метрики CAT(0)-пространства по диагональной трубке // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 299. С. 5–29.
3. *Берестовский В. Н.* Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову // Алгебра и анализ. 2002. Т. 46, № 2. С. 645–656.
4. *Beckman F. S., Quarles D. A., Jr.* On isometries of Euclidean spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 810–815.
5. *Александров А. Д.* Об отображениях, сохраняющих конгруэнтность // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 6. С. 1257–1260.
6. *Кузьминых А. В.* Отображения, сохраняющие расстояние 1 // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 29, № 3. С. 597–602.
7. *Tyszka A.* Discrete versions of the Beckman–Quarles theorem // Aequationes Math. 2000. V. 59. P. 124–133.
8. *Tyszka A.* The Beckman–Quarles theorem for continuous mappings from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$. 2004. 20 p. (Preprint / ArXiv:math.MG/0406093).
9. *Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г.* Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 3. С. 3–44.
10. *Ballmann W.* Lectures on spaces of nonpositive curvature. Boston; Basel; Schtuttgart: Birkhaüser, 1995.
11. *Bridson M., Haefliger A.* Metric spaces of nonpositive curvature. Berlin: Springer-Verl., 1999. (Grundlehren der Math. Wiss.; V. 319).
12. *Buyalo S. V.* Lectures on spaces of curvature bounded above. Urbana-Schampaign: Univ. Illinois, 1994. (Preprint).
13. *Alexander S. B., Bishop R. L.* The Hadamard–Cartan theorem in locally convex spaces // Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 309–320.
14. *Kapovich I., Benakli N.* Boundaries of hyperbolic groups // Contemp. Math. 2002. V. 296. P. 39–94.
15. *Webster C., Winchester A.* Boundaries of hyperbolic metric spaces. 2003. (Preprint / ArXiv: math.MG/0310101).
16. *Ballmann W., Gromov M., Schroeder V.* Manifolds of nonpositive curvature. Boston; Basel; Schtuttgart: Birkhaüser, 1985.

Статья поступила 28 октября 2004 г., окончательный вариант — 3 марта 2005 г.

Андреев Павел Дмитриевич
Поморский гос. университет имени М. В. Ломоносова,
пр. Ломоносова, 4, Архангельск 163060
pdandreev@mail.ru