Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2006. Том 47, № 3

УДК 517.55

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА ПЛОСКОСТИ

Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм

Аннотация: Рассматривается задача Коши для уравнения Гельмгольца в произвольной ограниченной плоской области с данными Коши, известными только на участке границы области. Для решения этой задачи выводится формула типа Карлемана и приводится оценка условной устойчивости.

Ключевые слова: задача Коши, уравнение Гельмгольца, формула Карлемана.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ с границей класса C^∞, $M \subset \partial\Omega$ — объединение конечного числа замкнутых дуг.

Для функции $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца в Ω:

$$\begin{gathered} \Delta u(x,y) + \omega^2 n(x,y) u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y)|_M = u_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial}{\partial \nu} u(x,y)\right|_M = u_1(x,y), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\omega = \mathrm{const}$, а функция $n(x,y)$ класса $C_\alpha(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [1] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши — Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г. М. Голузин и В. И. Крылов [2] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М. М. Лаврентьевым [3]. Применяя этот метод, Ш. Я. Ярмухамедов [4] построил функции Карлемана для операторов Лапласа и Гельмгольца с $n(x,y) \equiv 1$ для пространственных областей специального вида, когда часть границы области, где данные неизвестны, является конической поверхностью либо гиперповерхностью $\{x_3 = 0\}$.

Используя экспоненциально растущие решения, Икехата [5] получил формулу для решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом $n(x,y)$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00250а) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7157.2006.1), второго автора — при частичной поддержке NSF Grant DMS-0505470.

для областей в пространстве, где неизвестные данные расположены на участке гиперповерхности $\{x \cdot s = t\}$.

Формулы типа Карлемана для различных эллиптических уравнений и систем получены также в работах [6–11].

В данной работе методом гасящей функции, предложенным Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым, находится решение задачи (1) с переменным коэффициентом в произвольных ограниченных областях на плоскости. Доказываются формула типа Карлемана и оценка условной устойчивости.

Введем обозначения:

$$z = x + iy, \quad u_1(z) = u(z) = u(x, y), \quad u_2(z) = 2\bar{\partial} u_1(z),$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 n(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad 2\bar{\partial} = \partial_x + i\partial_y, \quad 2\partial = \partial_x - i\partial_y.$$

Тогда

$$2\partial u_2(z) = 2\partial 2\bar{\partial} u_1(z) = \Delta u(z) = -\omega^2 n(z) u(z)$$

и уравнение $\Delta u + \omega^2 n(z) u = 0$ можно записать в виде системы для вектор-функции $\mathbf{u}(z) = (u_1(z), u_2(z))$:

$$(\mathbb{D} + \mathbb{Q})\mathbf{u} = 0.$$

Для оператора $\mathbb{P} = \mathbb{D} + \mathbb{Q}$ справедлива весовая формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} \langle e^{\tau\Phi} \mathbb{P}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \, d\zeta_1 d\zeta_2 = \int\limits_{\Omega} \langle e^{\tau\Phi} \mathbf{u}, \mathbb{P}^{\sharp} \mathbf{v} \rangle \, d\zeta_1 d\zeta_2 + \int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi} \mathbf{u}, (\nu_1 \mathbb{I} - i\nu_2 \mathbb{J})\mathbf{v} \rangle \, ds, \qquad (2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$, τ — некоторое вещественное число, $\Phi = \Phi(\zeta)$ — матрица в $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{P}^{\sharp} = e^{-\tau\Phi^*} \mathbb{P}^* e^{\tau\Phi^*}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор единичной внешней нормали, $\mathbb{I}$ — единичная матрица и $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

В качестве Φ возьмем матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(\zeta) & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}(\zeta) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(z) = \psi(z) + i\chi(z)$ — аналитическая в Ω функция, обладающая следующими свойствами на границе области:

$$\psi(z)|_{M'} = 1, \quad \psi(z)|_{\partial\Omega \setminus M} = 0, \quad \psi(z) \in C^{\infty}(\partial\Omega), \qquad (3)$$

здесь M' — замкнутое подмножество $\operatorname{int} M$ ненулевой меры. Тогда $\mathbb{P}^{\sharp} = -\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}^{\sharp}$, где

$$\mathbb{D}^* = \begin{pmatrix} 2\partial & 0 \\ 0 & 2\bar{\partial} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Q}^{\sharp} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}^2 \bar{n}(z) e^{\tau(\varphi - \bar{\varphi})} \\ -e^{\tau(\bar{\varphi} - \varphi)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каждой фиксированной точки $z \in \Omega$ определим множество $\Omega_{z,\varepsilon'} = \Omega \setminus B(z, \varepsilon')$ и рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{v} = \mathbf{E} - \mathscr{F}, \quad \mathscr{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2), \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \overline{-2\partial \mathscr{E}_{\omega}(\zeta - z)} \\ e^{\tau(\bar{\varphi}(\zeta) - \varphi(\zeta))} \overline{\mathscr{E}_{\omega}(\zeta - z)} \end{pmatrix},$$

где $\mathscr{E}_{\omega}$ — фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + \omega^2$. При этом для матрицы

$$\mathbb{Q}_1^{\sharp} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}^2 e^{\tau(\varphi - \bar{\varphi})} \\ -e^{\tau(\bar{\varphi} - \varphi)} & 0 \end{pmatrix}$$

справедлива формула

$$\big(-\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}_1^\sharp\big)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2\partial & \bar{\omega}^2 e^{\tau(\varphi-\bar{\varphi})} \\ -e^{\tau(\bar{\varphi}-\varphi)} & -2\bar{\partial} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\bar{\partial}\overline{\mathscr{E}_\omega} \\ e^{\tau(\bar{\varphi}-\varphi)}\overline{\mathscr{E}_\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(\Delta+\omega^2)\mathscr{E}_\omega} \\ -\tau 2\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{\tau(\bar{\varphi}-\varphi)}\overline{\mathscr{E}_\omega} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$G = \big(\mathbb{D}^* - \mathbb{Q}_1^\sharp\big)\mathbf{E} + \big(\mathbb{Q}_1^\sharp - \mathbb{Q}^\sharp\big)\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^2(1-\bar{n}(\zeta))\overline{\mathscr{E}_\omega} \\ \tau 2\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{\tau(\bar{\varphi}-\varphi)}\overline{\mathscr{E}_\omega} \end{pmatrix},$$

тогда для решения в $\Omega_{z,\varepsilon'}$ системы

$$(\mathbb{D}^* - \mathbb{Q}^\sharp)\mathscr{F} = G \tag{4}$$

получим

$$(-\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}^\sharp)\mathbf{v} = \big(-\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}_1^\sharp\big)\mathbf{E} + \big(\mathbb{Q}^\sharp - \mathbb{Q}_1^\sharp\big)\mathbf{E} - (-\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}^\sharp)\mathscr{F} = 0.$$

При этом из формулы (2) следует, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\mathbf{v}\rangle\, ds = \int\limits_{\partial B(z,\varepsilon')} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\mathbf{v}\rangle\, ds. \tag{5}$$

Условия существования решения системы (4) даны в следующем утверждении, доказательство которого приводится в п. 2.

Лемма 1. *Пусть $G(\zeta) \in L_p(\Omega)$, $p = \frac{2}{1-\alpha}$. Тогда можно указать число τ_0 такое, что при $\tau > \tau_0$ решение системы (4) существует в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и для него выполняется оценка*

$$\|\mathscr{F}\|_{C_\alpha(\Omega)} \le C\|G\|_{L_p(\Omega)},$$

где константа C зависит от α, Ω, $w^2 n(\zeta)$.

Используя асимптотические свойства фундаментального решения оператора Гельмгольца $\mathscr{E}_\omega(\zeta)$ при $\rho = |\zeta| \ll 1$:

$$\mathscr{E}_\omega(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\ln(\omega\rho) + O(1), \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\mathscr{E}_\omega(\rho) = -\frac{1}{2\pi\rho} + O(\rho\ln\rho),$$

в силу того, что функции $\varphi(\zeta)$, $\mathscr{F}(\zeta)$ ограничены в Ω, а решение $u(\zeta)$ принадлежит $C^2(\Omega)$, получим, что при $\varepsilon' \to 0$ интеграл по $\partial B(z,\varepsilon')$ в (5) стремится к $e^{\tau\varphi(z)}u(z)$.

Следовательно, из равенства (5) приходим к формуле, выражающей значение решения задачи (1) в точке z по данным на всей границе области:

$$u(z) = e^{-\tau\varphi(z)} \int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\mathbf{v}\rangle\, ds. \tag{6}$$

Ввиду условий (3) при $\zeta \in \partial\Omega \setminus M$, $z \in \Omega$ будет

$$e^{\tau(\varphi(\zeta)-\varphi(z))} \to 0, \quad \tau \to \infty,$$

поэтому так как для правой части системы (4) в нашем случае имеем оценку

$$\|G\|_{L_p(\Omega)} \le \tau C_1 \|\mathscr{E}_\omega\|_{L_p(\Omega)},$$

где константа C_1 не зависит от τ, переходя к пределу при $\tau \to \infty$, получаем формулу для определения решения поставленной задачи.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{E}(z) = \frac{i}{4}H_0^1(\omega|z|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца с постоянным коэффициентом $\Delta u(x,y)+\omega^2 u(x,y) = 0$, определяемое через функцию Ханкеля первого рода. Пусть функция $\mathscr{F} = (f_1(\zeta), f_2(\zeta))$ при некотором τ_0 является решением системы* (4),

$$\mathbf{v} = \mathbf{E} - \mathscr{F}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \overline{-2\partial\mathscr{E}_\omega(\zeta - z)} \\ e^{\tau(\bar\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta))}\overline{\mathscr{E}_\omega(\zeta - z)} \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого $z \in \Omega$ имеет место равенство

$$u(z) = \lim_{\tau\to\infty} \int\limits_M e^{-\tau\varphi(z)} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\mathbf{v}\rangle\, ds.$$

Заметим, что значение $u(z)$ не зависит от выбора функции $\mathscr{F}$. Действительно, пусть $\widetilde{\mathscr{F}}$ также является решением системы (4). Тогда

$$u(z) = e^{-\tau\varphi(z)} \int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\mathbf{v}\rangle\, ds,$$

$$\tilde u(z) = e^{-\tau\varphi(z)} \int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})\widetilde{\mathbf{v}}\rangle\, ds.$$

Для разности $u(z) - \tilde u(z)$ получим

$$\begin{aligned} u(z) - \tilde u(z) = e^{-\tau\varphi(z)} \int\limits_{\partial\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (\nu_1\mathbb{I} - i\nu_2\mathbb{J})(\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F})\rangle\, ds \\ = -e^{-\tau\varphi(z)} \int\limits_{\Omega} \langle e^{\tau\Phi}\mathbf{u}, (-\mathbb{D}^* + \mathbb{Q}^\sharp)(\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F})\rangle\, d\zeta_1 d\zeta_2 = 0, \end{aligned}$$

так как $\mathscr{F}, \widetilde{\mathscr{F}}$ являются решениями системы (4).

2. Доказательство леммы 1. Переходя к компонентам соответствующих вектор-функций, систему (4) запишем в виде

$$\begin{gathered} 2\bar\partial f_1(\zeta) - \omega^2 n(\zeta) e^{-i\tau 2\chi(\zeta)} f_2(\zeta) = g_1(\zeta), \\ 2\partial f_2(\zeta) + e^{i\tau 2\chi(\zeta)} f_1(\zeta) = g_2(\zeta). \end{gathered} \tag{4$'$}$$

Согласно [12] в качестве решения этой системы можно взять решение системы интегральных уравнений

$$f_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{e^{-i\tau 2\chi(\eta)}}{\eta - \zeta}\omega^2 n(\eta) f_2(\eta)\mathbf{d}\eta = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{g_1(\eta)}{\eta-\zeta}\mathbf{d}\eta,$$

$$f_2(\zeta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)}}{\bar\eta - \bar\zeta} f_1(\eta)\mathbf{d}\eta = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{g_2(\eta)}{\bar\eta-\bar\zeta}\mathbf{d}\eta,$$

где введено обозначение $\mathbf{d}\eta = d\eta_1 d\eta_2$. Следовательно,

$$f_1(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{e^{-i\tau 2\chi(\eta)}}{\eta - \zeta}\omega^2 n(\eta) f_2(\eta)\mathbf{d}\eta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_\Omega \frac{g_1(\eta)}{\eta-\zeta}\mathbf{d}\eta,$$

а функция $f_2(\zeta)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$f_2(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)}}{\bar\eta - \bar\zeta}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{e^{-i\tau 2\chi(\eta')}}{\eta' - \eta}\omega^2 n(\eta') f_2(\eta')\,\mathbf{d}\eta'\mathbf{d}\eta$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)}}{\bar\eta - \bar\zeta}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{g_1(\eta')}{\eta' - \eta}\,\mathbf{d}\eta'\mathbf{d}\eta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{g_2(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta}\,\mathbf{d}\eta,$$

которое можно записать в виде

$$f_2 + S(f_2) = -\frac{1}{4}\overline{T}[e^{i\tau 2\chi(\eta)}T[g_1]] + \frac{1}{2}\overline{T}(g_2) = G', \tag{7}$$

где

$$S(f) = \frac{1}{4}\overline{T}[e^{i\tau 2\chi(\eta)}T[e^{-i\tau 2\chi(\eta')}\omega^2 n(\eta') f(\eta')]],$$
$$T(g) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{g(\eta)}{\eta - \zeta}\,\mathbf{d}\eta, \quad \overline{T}(g) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{g(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta}\,\mathbf{d}\eta.$$

При $p = 2/(1-\alpha)$ оператор T вполне непрерывен в $L_p(\Omega)$ и отображает это пространство на $C_\alpha(\overline{\Omega})$, причем выполняется оценка

$$\|T(f)\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \le M_{1,\alpha}\|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{8}$$

Если $\partial\Omega \in C_\alpha^{m+1}$, $m \ge 0$, то T вполне непрерывен в $C_\alpha^m(\overline{\Omega})$ и отображает это пространство в $C_\alpha^{m+1}(\overline{\Omega})$, при этом

$$\partial_x T(f) = f + \Pi(f), \quad \partial_y T(f) = -if + i\Pi(f),$$

где

$$\Pi(f) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{V.p.}\int\limits_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\Omega \in C_\alpha^m(\overline{\Omega}),$$

и

$$\|\Pi(f)\|_{C_\alpha^m(\overline{\Omega})} \le \|T(f)\|_{C_\alpha^{m+1}(\overline{\Omega})} \le M_{2,\alpha}\|f\|_{C_\alpha^m(\overline{\Omega})}. \tag{9}$$

Указанные свойства доказаны в [12].

Таким образом, правая часть интегрального уравнения (7) принадлежит классу $C_\alpha(\overline{\Omega})$, и

$$\|G'\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \le \frac{1}{4}M_{1,\alpha}^2(|\Omega|)^{1/p}\|g_1\|_{L_p(\Omega)} + \frac{1}{2}M_{1,\alpha}\|g_2\|_{L_p(\Omega)}.$$

Оператор $S : C_\alpha(\overline{\Omega}) \to C_\alpha(\overline{\Omega})$ является вполне непрерывным. Здесь через $|\Omega|$ обозначена площадь области Ω.

В силу аналитичности функция $\varphi(\zeta)$ в Ω имеет не более чем счетное множество стационарных точек η_i, в которых

$$\varphi'(\eta_i) = 0 \quad \text{и} \quad \nabla\chi(\eta_i) = 0.$$

Возьмем число $\delta > 0$ и рассмотрим область

$$\Omega_\delta = \{\zeta \in \Omega : \mathrm{dist}(\zeta, \partial\Omega) \ > \delta\}.$$

В ней содержится уже конечное число стационарных точек η_j, $j = 1, \dots, N(\delta)$. Выберем число $0 < \delta_1 < 1$ так, что $\delta_1 N(\delta) < \delta$. Тогда сумма площадей всех кругов $B(\eta_j, \delta_1)$, $j = 1, \dots, N(\delta)$, будет меньше $\pi\delta$.

Рассмотрим области

$$\Omega(\delta, \delta_1) = \Omega_{\delta+\delta_1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N(\delta)} B(\eta_j, \delta_1) \right), \quad \Omega(\delta, 2\delta_1) = \Omega_{\delta+2\delta_1} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N(\delta)} B(\eta_j, 2\delta_1) \right).$$

В этом случае $\operatorname{dist}(\zeta, \eta_i) > \delta_1$ для любого $\zeta \in \Omega(\delta, \delta_1)$ и любой стационарной точки η_i.

Далее, по известному свойству разбиения единицы найдется такая функция $h \in C_0^\infty(\Omega)$, что $0 \le h \le 1$, $h \equiv 1$ в замыкании $\Omega(\delta, 2\delta_1)$ и $h \equiv 0$ в замыкании $\Omega \setminus \Omega(\delta, \delta_1)$.

Обозначим

$$T_1(f_2)(\eta) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{-i\tau 2\chi(\eta')} \omega^2 n(\eta') f_2(\eta')}{\eta' - \eta} \, \mathbf{d}\eta' = T(e^{-i\tau 2\chi} \omega^2 n f_2)(\eta).$$

Тогда в силу неравенства (9) имеем

$$\|T_1(f_2)\|_{C^1_\alpha(\overline{\Omega})} \le \omega^2 n_\alpha \tau^\alpha \chi_\alpha M_{2,\alpha} \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})},$$

где

$$n_\alpha = \|n(\zeta)\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})}, \quad \tau^\alpha \chi_\alpha = \|e^{-i\tau 2\chi(\zeta)}\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})},$$

кроме того,

$$\|T_1(f_2)\|_{C(\overline{\Omega})} \le 2 \operatorname{diam}_\Omega \omega^2 n_\alpha \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})}.$$

В этом случае для любого $\zeta \in \overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} S(f_2)(\zeta) &= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} \, \mathbf{d}\eta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} (1 - h(\eta)) \, \mathbf{d}\eta - \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} h(\eta) \, \mathbf{d}\eta. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} (1 - h(\eta)) \, \mathbf{d}\eta \right\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \\ &\qquad \le \frac{M_{1,\alpha}}{4} \|e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)(1 - h(\eta))\|_{L_p(\Omega)} \\ &\qquad \le \frac{M_{1,\alpha}}{4} (|\Omega_1|)^{1/p} \|T_1 f_2\|_{C(\Omega)} \le \frac{M_{1,\alpha}}{2} (|\Omega_1|)^{1/p} \operatorname{diam}_\Omega \omega^2 n_\alpha \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})}, \end{aligned}$$

где $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega(\delta, 2\delta_1)$, поэтому за счет выбора δ оно может быть сделано сколь угодно малым.

Для оценки второго слагаемого рассмотрим такую функцию $h_\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, что $0 \le h_\zeta \le 1$ и $h_\zeta \equiv 1$ в замыкании $\Omega(\delta, \delta_1) \setminus B(\zeta, 2\delta_1)$ и $h_\zeta \equiv 0$ в замыкании $B(\zeta, \delta_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} h(\eta) \, \mathbf{d}\eta &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} h(\eta)(1 - h_\zeta(\eta)) \, \mathbf{d}\eta \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta} h(\eta) h_\zeta(\eta) \, \mathbf{d}\eta. \end{aligned}$$

При этом первое выражение оценивается величиной

$$\left\| \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{i\tau 2\chi(\eta)} T_1(f_2)(\eta)}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}} h(\eta)(1 - h_\zeta(\eta))\, \mathbf{d}\eta \right\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \le \frac{M_{1,\alpha}}{2} (|\Omega_2|)^{1/p} \operatorname{diam}_\Omega \omega^2 n_\alpha \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})},$$

где $\Omega_2 = \Omega(\delta, \delta_1) \cap B(\zeta, 2\delta_1)$, и поэтому за счет выбора δ оно также может быть сделано сколь угодно малым.

Оставшийся интеграл берется по области $\Omega_3 = \Omega(\delta, \delta_1) \setminus B(\zeta, \delta_1)$, в которой отсутствуют стационарные точки функции $\chi(\eta)$. Следовательно, во всех точках Ω_3 справедливо представление

$$e^{i\tau 2\chi(\eta)} = \frac{2\bar{\partial}\chi(\eta) 2\partial e^{i\tau 2\chi(\eta)}}{i2\tau |2\bar{\partial}\chi(\eta)|^2}.$$

Так как $hh_\zeta = 0$ на $\partial\Omega_3$, то, интегрируя по частям и учитывая равенства

$$\Delta\chi(\eta) = 0, \quad 2\partial \frac{1}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}} = 0,$$

приводим интеграл к виду

$$\frac{1}{8\tau\pi i} \int\limits_{\Omega_3} 2\partial \left(\frac{h(\eta) h_\zeta(\eta)}{|2\bar{\partial}\chi(\eta)|^2} T_1(f_2)(\eta) \right) \frac{2\bar{\partial}\chi(\eta)}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}} e^{i\tau 2\chi(\eta)}\, \mathbf{d}\eta.$$

Норма в $C_\alpha(\overline{\Omega})$ этого интеграла оценивается следующей величиной:

$$\frac{1}{8\tau^{1-\alpha}} \omega^2 n_\alpha \chi_\alpha M_{1,\alpha} M_{2,\alpha} (|\Omega_3|)^{1/p} \left\| \frac{2\bar{\partial}\chi}{|2\bar{\partial}\chi|^2} \right\|_{C^1(\Omega_3)} C_1(h, h_\zeta) \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})}.$$

Следовательно, существует τ_0 такое, что для любого $\tau > \tau_0$ оператор S является сжимающим, и f_2 находится методом последовательных приближений, а

$$f_1 = \frac{1}{2} T(e^{-i\tau 2\chi} \omega^2 n f_2) + \frac{1}{2} T(g_1).$$

При этом для некоторого $c' > 1$ выполняются оценки

$$\|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \le c' \left(\frac{1}{4} M_{1,\alpha}^2 (|\Omega|)^{1/p} \|g_1\|_{L_p(\Omega)} + \frac{1}{2} M_{1,\alpha} \|g_2\|_{L_p(\Omega)} \right),$$

$$\|f_1\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} \le \frac{1}{2} (M_{1,\alpha} \omega^2 n_\alpha |\Omega|^{1/p} \|f_2\|_{C_\alpha(\overline{\Omega})} + M_{1,\alpha} \|g_1\|_{L_p(\Omega)}),$$

откуда

$$\|\mathscr{F}\|_{C_{\alpha(\overline{\Omega})}} \le C \|G\|_{L_p(\Omega)},$$

где константа C не зависит от τ.

Заметим, что если

$$\omega^2 n_\alpha < \frac{1}{\operatorname{diam}(\Omega)^2},$$

то, оценивая норму оператора $S : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, получим

$$\|S\| \le \frac{\omega^2 \|n(\zeta)\|_{C(\Omega)}}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|\bar{\eta} - \bar{\zeta}|} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|\eta' - \eta|}\, \mathbf{d}\eta' \mathbf{d}\eta \le \omega^2 n_\alpha (\operatorname{diam}_\Omega)^2 < 1.$$

Следовательно, в этом случае функция $f_2(\zeta)$ находится методом последовательных приближений для любого значения τ.

3. Оценка условной устойчивости. Из полученной в теореме 1 формулы типа Карлемана следует оценка решения исходной задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при любом* $z \in \Omega$ *для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |u(z)| \le \varepsilon l(u) + C(\varepsilon)\|u\|_{C^1(M)},$$

где

$$l(u) = \|u\|_{C^1(\partial\Omega\setminus M)}, \quad C(\varepsilon) = \varepsilon^{1-2/\psi(z)}(\psi(z)/C_0)^{-2/\psi(z)}, \quad \psi(z) = \operatorname{Re}\varphi(z),$$

а C_0 *— константа, зависящая от* $\|\mathscr{E}_\omega(\zeta - z)\|_{C^1(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $\|\mathscr{E}_\omega\|_{L_p(\Omega)}, C$.

Действительно, оценивая решение задачи, найденное по формуле Карлемана, получим

$$|u(z)| \le C_0\tau e^{-\tau\psi(z)}\|u\|_{C^1(\partial\Omega\setminus M)} + \tau C_0 e^{-\tau\psi(z)}e^{\tau}\|u\|_{C^1(M)}.$$

Так как при

$$\tau = -\frac{2}{\psi(z)}\ln\left(\frac{\varepsilon}{C_0}\psi(z)\right)$$

выполняется неравенство

$$C_0\tau e^{-\tau\psi(z)} \le \varepsilon,$$

имеем

$$\tau C_0 e^{-\tau\psi(z)}e^{\tau} \le \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{C_0}\psi(z)\right)^{-\frac{2}{\psi(z)}} = C(\varepsilon).$$

Замечание. Взяв изначально в качестве $\mathscr{E}_\omega$ фундаментальное решение уравнения Лапласа $\mathscr{E}_0$, можно также получить формулу типа Карлемана для уравнения Гельмгольца, но уже через эту более простую функцию. Кроме того, при $\omega = 0$ полученная формула дает решение задачи Коши для уравнения Лапласа. В этом случае функции $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$ являются решениями уравнений Коши — Римана

$$2\bar\partial f_1(\zeta) = 0, \quad 2\partial f_2(\zeta) + e^{i\tau 2\chi(\zeta)}f_1(\zeta) = \tau 2\partial\varphi e^{\tau(\varphi-\bar\varphi)}\mathscr{E}_0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris: Gautier-Villars et Cie., 1926.
2. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Carleman'а и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
3. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
4. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 281–283.
5. *Ikehata M.* The enclosure method and its applications. Analytic extension formulas and their applications. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2001.
6. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.
7. *Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.* Абстрактная формула Карлемана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 6. С. 1292–1296.
8. *Махмудов О. И., Ниезов И. Э.* Регуляризация решений задачи Коши для системы теории упругости в бесконечной области // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 4. С. 548–553.
9. *Махмудов О. И.* О задаче Коши для эллиптических систем в пространстве $\mathbb{R}^m$ // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 6. С. 849–860.
10. *Arbuzov E. V., Bukhgeim A. L.* Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1997. V. 5, N 6. P. 491–505.

11. *Арбузов Э. В.* Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 1. С. 3–20.

12. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 28 декабря 2004 г.

Арбузов Эдуард Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
arbuzov@math.nsc.ru,

Бухгейм Александр Львович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Current address: Wichita State University
bukhgeim@math.nsc.ru, boukhgueim@math.wichita.edu