Сибирский математический журнал
Июль—август, 2006. Том 47, № 4

УДК 512.542

О ПРОБЛЕМЕ СОПРЯЖЕННОСТИ ДЛЯ КАРТЕРОВЫХ ПОДГРУПП

Е. П. Вдовин

Аннотация: Доказывается, что для сопряженности картеровых подгрупп в конечной группе достаточно сопряженности в группах индуцированных автоморфизмов всех ее неабелевых композиционных факторов.

Ключевые слова: картерова подгруппа, почти простая группа, группа индуцированных автоморфизмов.

1. Введение. Напомним, что нильпотентная самонормализуемая подгруппа называется *картеровой подгруппой*. В работе рассматривается следующая

Проблема. *Сопряжены ли любые две картеровы подгруппы конечной группы?*

В [1] доказано, что минимальный контрпример к этой проблеме должен быть почти простым. Мы хотим улучшить результаты, полученные в [1] (см. теорему ниже). На самом деле мы будем использовать идеи из [1] для того, чтобы доказать более сильную теорему.

Наши обозначения стандартны. Для конечной группы G мы обозначим через $\mathrm{Aut}(G)$ группу автоморфизмов группы G. Если $Z(G)$ тривиален, то G изоморфна группе своих внутренних автоморфизмов и мы можем предполагать, что $G \leq \mathrm{Aut}(G)$. Говорят, что конечная группа G *почти простая*, если существует простая группа S, для которой $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$, т. е. $F^*(G)$ — простая группа. Обозначим через $F(G)$ подгруппу Фиттинга группы G и через $F^*(G)$ — обобщенную подгруппу Фиттинга группы G.

Если G — группа, A, B, H — подгруппы группы G и B нормальна в A ($B \trianglelefteq A$), то $N_H(A/B) = N_H(A) \cap N_H(B)$. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$ фактор-группы A/B. Таким образом, существует гомоморфизм группы $N_H(A/B)$ в $\mathrm{Aut}(A/B)$. Образ этого гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$, в то время как ядро обозначается через $C_H(A/B)$. В частности, если S — композиционный фактор группы G, то для любой $H \leq G$ определена группа $\mathrm{Aut}_H(S)$.

Определение. Говорят, что конечная группа G *удовлетворяет условию* $(*)$, если для любого ее неабелева композиционного фактора S и любой ее нильпотентной подгруппы N картеровы подгруппы группы $\langle \mathrm{Aut}_N(S), S\rangle$ сопряжены.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00797), гранта Президента РФ (МК–1455.2005.1) и СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2).

Очевидно, что если конечная группа G удовлетворяет условию $(*)$, то для любой нормальной подгруппы H и любой разрешимой подгруппы N группы G группы G/H и NH удовлетворяют условию $(*)$. Наша задача здесь — доказать следующий результат.

Теорема. *Если конечная группа G удовлетворяет условию $(*)$, то картеровы подгруппы группы G сопряжены.*

Заметим, что конечная группа может не содержать картеровых подгрупп. В этом случае также говорим, что ее картеровы подгруппы сопряжены. В пп. 2, 3 мы предполагаем, что X — это контрпример к теореме минимального порядка, т. е. что X является конечной группой, удовлетворяющей условию $(*)$, и X содержит несопряженные картеровы подгруппы, но картеровы подгруппы в любой группе M порядка, меньшего, чем $|X|$, удовлетворяющей условию $(*)$, сопряжены.

2. Предварительные результаты. Напомним, что X — это контрпример к теореме минимального порядка.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $(*)$, и $|G| \leqslant |X|$. Пусть H — картерова подгруппа группы G. Если N — нормальная подгруппа группы G, то HN/N является картеровой подгруппой фактор-группы G/N.*

Доказательство. Поскольку HN/N нильпотентна, нам нужно лишь доказать, что она самонормализуема в G/N. Ясно, что это верно, если $G = HN$. Значит, предположим, что $M = HN < G$. Ввиду минимальности группы X равенство $M^x = M$, $x \in G$, влечет $H^x = H^m$ для некоторого $m \in M$. Отсюда $xm^{-1} \in N_G(H) = H$ и $x \in M$. Это доказывает, что HN/N является нильпотентной и самонормализуемой в G/N. $\square$

Лемма 2. *Пусть B — минимальная нормальная подгруппа группы X и H, K — несопряженные картеровы подгруппы группы X.*

(i) *B неразрешима.*

(ii) *$X = BH = BK$.*

(iii) *B является единственной минимальной нормальной подгруппой группы X.*

Доказательство. (i) Мы дадим доказательство от противного. Предположим, что B разрешима, и пусть $\pi : X \to X/B$ — канонический гомоморфизм. Тогда H^π и K^π являются картеровыми подгруппами группы X/B по лемме 1. Ввиду минимальности группы X существует $\bar{x} = Bx$ такой, что $(K^\pi)^{\bar{x}} = H^\pi$. Отсюда $K^x \leq BH$. Поскольку BH разрешима, K^x сопряжена с H в BH, следовательно, K сопряжена с H в X; противоречие.

(ii) Предположим, что $BH < X$. По лемме 1 ввиду минимальности группы X подгруппы BH/B и BK/B сопряжены в X/B. Значит, существует $x \in X$ такой, что $K^x \leq BH$. Из минимальности группы X следует, что K^x сопряжена с H в BH, тем самым K сопряжена с H в X; противоречие.

(iii) Предположим, что M является минимальной нормальной подгруппой группы X, отличной от B. По (i) M неразрешима. С другой стороны, $MB/B \simeq M$ является подгруппой нильпотентной группы $X/B \simeq H/H \cap B$; противоречие.

Следующая лемма полезна во многих приложениях, поэтому мы доказываем ее здесь, хотя нам понадобится лишь часть ее доказательства в дальнейших рассуждениях.

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа. Пусть H — картерова подгруппа группы G. Предположим, что существует такая нормальная подгруппа $B = T_1 \times \cdots \times T_k$ группы G, что $T_1 \simeq \cdots \simeq T_k \simeq T$, $Z(T_i) = \{1\}$ для всех i, и $G = H(T_1 \times \cdots \times T_k)$. Тогда $\mathrm{Aut}_H(T_i)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_H(T_i), T_i\rangle$.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение ложно и G является контрпримером с минимальным k, тогда $k > 1$. Ясно, что G действует транзитивно сопряжением на множестве $\Omega := \{T_1, \ldots, T_k\}$. Мы можем предполагать, что группы T_j заиндексированы так, что G действует примитивно на множестве $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_p\}$, $p > 1$, где для каждого i

$$\Delta_i := \{T_{1+(i-1)l}, \ldots, T_{il}\}, \quad k = pl.$$

Обозначим через $\varphi : G \to \mathrm{Sym}_p$ индуцированное подстановочное представление. Очевидно, $B \le \ker\varphi$, так что $G^\varphi = (BH)^\varphi = H^\varphi$ — примитивная нильпотентная подгруппа группы Sym_p. Следовательно, p является простым, и G^φ — циклическая группа порядка p. В частности, $Y := \ker\varphi$ совпадает со стабилизатором любого Δ_i, так что φ подстановочно эквивалентно представлению группы G на правых смежных классах по Y. Для любого $i = 1, \ldots, p$ пусть $S_i = T_{1+(i-1)l} \times \cdots \times T_{il}$. Тогда $Y = N_G(S_i)$ и $B = S_1 \times \cdots \times S_p$. Рассмотрим $\xi : Y \to \mathrm{Aut}_Y(S_1)$, пусть $A = Y^\xi$, $S = S_1^\xi$. Очевидно, S является нормальной подгруппой группы A; более того, S изоморфна S_1, поскольку S_1 имеет тривиальный центр. С другой стороны, $S_i \le \ker\xi$ для каждого $i \ne 1$, поскольку S_i централизует S_1.

Обозначим через $A \wr C_p$ сплетение группы A и циклической группы C_p, и пусть $\{x_1 = e, \ldots, x_p\}$ — представители правых смежных классов по подгруппе Y. Тогда отображение $\eta : G \to A \wr C_p$ такое, что для каждого $x \in G$

$$x \mapsto \left(\left(x_1 x x_{1^{x^\varphi}}^{-1}\right)^\xi, \ldots, \left(x_p x x_{p^{x^\varphi}}^{-1}\right)^\xi\right) x^\varphi$$

является гомоморфизмом. Очевидно, Y^η — подпрямое произведение базовой подгруппы A^p и

$$S_1^\eta = \{(s, 1, \ldots, 1) \mid s \in S\}, \quad B^\eta = \{(s_1, \ldots, s_p) \mid s_i \in S\} \le Y^\eta.$$

Более того, $\ker\eta = C_G(B) = \{e\}$, поэтому мы можем отождествить G с G^η. Выберем $h \in H \setminus Y$. Тогда

$$G = \langle Y, h\rangle,\ h^p \in Y, \quad H = (Y \cap H)\langle h\rangle$$

и мы можем предполагать, что

$$h = (a_1, a_2, \ldots, a_p)\pi,\ a_i \in A, \quad \pi = (1, 2, \ldots, p) \in C_p.$$

Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, пусть $\psi_i : A^p \to A$ — каноническая проекция, и пусть $H_i := (H \cap Y)^{\psi_i}$. Ясно, что $Y^{\psi_i} = A$. Более того, $H_i = H_1^{h^{i-1}} = H_1^{a_1 \ldots a_{i-1}}$ для любого $i \geqslant 2$, поскольку h нормализует $Y \cap H$. Пусть

$$N := (H_1 \times \cdots \times H_p) \cap Y.$$

N нормализуется группой H, так как $H = (N \cap H)\langle h\rangle$ и $H_i^h = H_{i+1 \pmod p}$. Мы утверждаем, что H_1 является картеровой подгруппой группы A. Предположим, что $n_1 \in N_A(H_1) \setminus H_1$. Из $Y = (Y \cap H)B$ следует равенство $n_1 = h_1 s$, $h_1 \in H_1$, $s \in N_S(H_1) \setminus H_1$. Пусть

$$b := (s, s^{a_1}, \dots, s^{a_1 \dots a_{p-1}}) \in B.$$

Тогда b нормализует N, поскольку

$$H_i^b = H_i^{s^{a_1 \dots a_{i-1}}} = H_1^{a_1 \dots a_{i-1} s^{a_1 \dots a_{i-1}}} = H_1^{s a_1 \dots a_{i-1}} = H_1^{a_1 \dots a_{i-1}} = H_i.$$

Теперь $[b, h^{-1}] := b^{-1} h b h^{-1} \in Y$ таков, что

$$[b, h^{-1}]^{\psi_i} = 1, \text{ если } i \neq p, \quad [b, h^{-1}]^{\psi_p} = [s, (a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)^{-1}]^{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}},$$

где $a_1 \cdot \ldots \cdot a_p = (h^p)^{\psi_1} \in H_1$. Поскольку $s \in N_S(H_1)$, отсюда следует, что

$$[s, (a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)^{-1}] \in H_1, \quad [s, (a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)^{-1}]^{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}} \in H_p.$$

Поэтому $[b, h^{-1}] \in N$ и $b \in N_G(N\langle h \rangle)$. Но $H \leq N\langle h \rangle$ влечет $N_G(N\langle h \rangle) = N\langle h \rangle$. Действительно, если $g \in N_G(N\langle h \rangle)$, то H^g является картеровой подгруппой группы $N\langle h \rangle$. Но $N\langle h \rangle$ разрешима, значит, существует $y \in N\langle h \rangle$, для которого $H^g = H^y$. Далее, H является картеровой подгруппой группы G, таким образом, $gy^{-1} \in H$ и $g \in N\langle h \rangle$. Следовательно, $b \in N$, $s \in H_1$, т. е. $n_1 \in H_1$; противоречие.

Теперь $A = H_1(T_1 \times \dots \times T_l)$ и $l < k$. По индукции имеем, что $\mathrm{Aut}_{H_1}(T_1)$ является картеровой подгруппой группы $\langle \mathrm{Aut}_{H_1}(T_1), T_1 \rangle$. Ввиду нашего построения

$$\mathrm{Aut}_H(T_1) = \mathrm{Aut}_{H_1}(T_1),$$

откуда следует лемма. □

3. Доказательство теоремы. Напомним, что $B = T_1 \times \dots \times T_k$, где $T_i \simeq T$ — неабелева простая группа. Осталось доказать, что $k = 1$. В обозначениях из доказательства леммы 3 мы показали, что H_1 является картеровой подгруппой группы A. Ясно, что поскольку каждая H_i сопряжена с H_1 в A, то $N_A(H_i) = H_i$, $i = 1, \dots, p$. Отсюда легко следует, что N является картеровой подгруппой группы Y. Пусть $y := (y_1, \dots, y_p) \in N_Y(N)$. Из $N^{\psi_i} = H_i$ имеем $y_i \in N_A(H_i) = H_i$ для всех i, значит, $y \in N$.

Мы установили, что каждой картеровой подгруппе H группы X можно сопоставить такую картерову подгруппу $N = N_H$ группы Y, что H нормализует N_H. Очевидно, $N_H \neq \{e\}$, в противном случае X имела бы порядок p. Поэтому пусть K — картерова подгруппа группы X, не сопряженная с H, и пусть N_K — картерова подгруппа группы Y, соответствующая K. В силу минимальности группы X для любого $x \in X$ имеем $\langle H^x, K \rangle = X$. С другой стороны, по индуктивному предположению существует такой $x \in Y$, что $N_K = (N_H)^x$. Значит, N_K нормальна в $\langle K, H^x \rangle = X$; противоречие, поскольку $\{e\} \neq N_K$ нильпотентна.

4. Некоторые свойства картеровых подгрупп. Здесь мы докажем несколько лемм, которые полезны при изучении картеровых подгрупп в конечных группах, в частности в почти простых группах.

Лемма 4. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условию $(*)$, H — нормальная подгруппа группы G и K — картерова подгруппа группы G. Тогда KH/H является картеровой подгруппой группы G/H.*

Доказательство. Это утверждение доказано в лемме 1 при дополнительном условии $|G| \leqslant |X|$. Согласно утверждению теоремы имеем $|X| = \infty$, поэтому лемма справедлива для любой конечной группы G. □

Лемма 5. *Предположим, что G — конечная группа. Пусть K — картерова подгруппа группы G с центром $Z(K)$. Предположим также, что $e \neq z \in Z(K)$ и $C_G(z)$ удовлетворяет условию $(*)$.*

(1) *Любая подгруппа Y, содержащая K и удовлетворяющая условию $(*)$, самонормализуема в G.*

(2) *Никакой сопряженный с z в G, кроме z, не лежит в $Z(G)$.*

(3) *Если H — картерова подгруппа группы G, не сопряженная с K, то z не сопряжен ни с каким элементом из центра группы H.*

В частности, централизатор $C_G(z)$ самонормализуем в G, и z не сопряжен ни с какой степенью $z^k \neq z$.

Доказательство. Эта лемма доказана в [2, лемма 3.1] для минимального контрпримера к проблеме, и, следовательно, ее использование при нахождении картеровых подгрупп сильно зависит от классификации конечных простых групп. Мы сформулировали здесь более сильную версию леммы, для того чтобы избежать такой зависимости.

(1) Возьмем $x \in N_G(Y)$. Тогда K^x является картеровой подгруппой в Y. По теореме картеровы подгруппы группы Y сопряжены. Следовательно, существует $y \in Y$, для которого $K^x = K^y$. Значит,

$$xy^{-1} \in N_G(K) = K \leq Y \quad \text{и} \quad x \in Y.$$

(2) Предположим, что $z^{x^{-1}} \in Z(K)$ для некоторого $x \in G$. Тогда z принадлежит центру группы $\langle K, K^x \rangle \leq C_G(z)$. Поскольку $C_G(z)$ удовлетворяет условию $(*)$, существует такой $y \in C_G(z)$, что $K^x = K^y$. Из $xy^{-1} \in C_G(z)$ получаем $z^{xy^{-1}} = z$, значит,

$$z^x = z^y = z.$$

Заключаем, что $z^{x^{-1}} = z$.

(3) Если наше утверждение ложно, то, заменяя H некоторой сопряженной H^x (если необходимо), мы можем предполагать $z \in Z(K) \cap Z(H)$, т. е. $z \in Z(\langle K, H \rangle) \leq C_G(z)$. Вновь, поскольку $C_G(z)$ удовлетворяет условию $(*)$, существует такой $y \in C_G(z)$, что $H = K^y$; противоречие. $\square$

Заметим, что для любой известной конечной простой группы G (и, значит, почти простой, поскольку группа внешних автоморфизмов разрешима) и для большинства элементов $z \in G$ простого порядка композиционные факторы $C_G(z)$ являются известными простыми группами. Действительно, для спорадических групп это утверждение можно проверить, используя [3]. Композиционные факторы группы $C_{A_n}(z)$ являются знакопеременными группами. Если G — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p и $(|z|, p) = 1$, то z полупрост и композиционные факторы группы $C_G(z)$ являются конечными группами лиева типа. Если $|z| = p$ и p является хорошим простым для G, то согласно теоремам 1.2 и 1.4 из [4] все композиционные факторы группы $C_G(z)$ являются конечными группами лиева типа. Единственный случай, когда строение централизаторов унипотентных элементов порядка p не до конца известно: p является плохим простым для G.

Следовательно, если мы классифицируем картеровы подгруппы почти простой конечной группы A, то по индукции можем предполагать, что $C_A(z)$ удовлетворяет условию $(*)$ для большинства элементов $z \in A$ простого порядка. В частности, мы можем улучшить таблицу из [2], используя результаты настоящей работы и [5]. В приведенной ниже таблице A является почти простой группой с сопряженными картеровыми подгруппами.

Таблица

$\mathrm{Soc}(A) = G$	Условия для A
знакопеременная, спорадическая; $A_1(r^t),\ B_\ell(r^t),\ C_\ell(r^t),\ t$ четно, если $r = 3$; ${}^2B_2(2^{2n+1}),\ G_2(r^t),\ F_4(r^t),\ {}^2F_4(2^{2n+1})$; $E_7(r^t),\ r \neq 3;\ E_8(r^t),\ r \neq 3, 5$	никаких
$D_{2\ell}(r^t),\ {}^3D_4(r^{3t}),\ {}^2D_{2\ell}(r^{2t})$, где t четно, если $r = 3$; если $G = D_4(r^t)$, то $\lvert(\mathrm{Field}(G) \cap A) : (\widehat{G} \cap A)\rvert_{2'} > 1$	$A/(A \cap \widehat{G})$ 2 − группа или $\lvert\widehat{G} : (A \cap \widehat{G})\rvert \leq 2$
$B_\ell(3^t),\ C_\ell(3^t),\ D_{2\ell}(3^t),\ {}^3D_4(3^{3t}),\ {}^2D_{2\ell}(3^{2t})$, $D_{2\ell+1}(r^t),\ {}^2D_{2\ell+1}(r^{2t}),\ {}^2G_2(3^{2n+1})$, $E_6(r^t),\ {}^2E_6(r^{2t}),\ E_7(3^t),\ E_8(3^t),\ E_8(5^t)$	$A = G$
$A_\ell(r^t),\ {}^2A_\ell(r^{2t}),\ \ell > 1$	$G \leq A \leq \widehat{G}$,

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dalla Volta F., Lucchini A., Tamburini M. C.* On the conjugacy problem for Carter subgroups // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 2. P. 395–401.
2. *Tamburini M. C., Vdovin E. P.* Carter subgroups of finite groups // J. Algebra. 2002. V. 255, N 1. P. 148–163.
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Seitz G. M.* Unipotent elements, tilting modules, and saturation // Inv. Math. 2000. V. 141, N 3. P. 467–503.
5. *Previtali A., Tamburini M. C., Vdovin E. P.* The Carter subgroups of some classical groups // Bull. London Math. Soc. 2004. V. 36, N 1. P. 145–155.

Статья поступила 22 сентября 2005 г.

Вдовин Евгений Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vdovin@math.nsc.ru