Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 519.542

О ГРАФАХ НЕКОММУТАТИВНОСТИ

А. Р. Могхаддамфар

Аннотация: Граф некоммутативности $\nabla(G)$ неабелевой конечной группы G определяется следующим образом: вершинами $\nabla(G)$ являются нецентральные элементы группы G и две различных вершины x и y соединены ребром, если $xy \neq yx$. В [1] высказано предположение о том, что если две неабелевы конечные группы G и H удовлетворяют условию $\nabla(G) \cong \nabla(H)$, то $|G| = |H|$. В данной работе приводится контрпример к этому предположению.

Ключевые слова: граф некоммутативности, усеченное кольцо косых многочленов, группа, радикал Джекобсона, регулярный граф.

1. Введение. Для конечной группы G *граф некоммутативности* $\nabla(G)$ строится следующим образом: множество вершин графа $\nabla(G)$ — это $G \backslash Z(G)$, и две вершины x и y смежны (обозначается $x \sim y$) тогда и только тогда, когда $xy \neq yx$. Этот граф называется *графом некоммутативности группы* G, поскольку между двумя вершинами есть ребро, только если они неперестановочны. Заметим, что G абелева тогда и только тогда, когда $\nabla(G)$ не имеет вершин. По этой причине в данной работе G будет обозначать неабелеву конечную группу. Изучая свойства $\nabla(G)$, предположительно можно получить полезные сведения о G, и наоборот.

Графы $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными* (обозначается $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$), если существует взаимно однозначное отображение $\phi : V_1 \to V_2$ такое, что

$$uv \in E_1 \Longleftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E_2 \text{ для всех } u, v \in V_1.$$

В [1] высказано следующее предположение: *если G и H — различные конечные группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$, то $|G| = |H|$*. Там также было показано, что это предположение верно, когда одна из групп принадлежит широкому классу неабелевых конечных групп (см. [1]). Основная цель данной статьи — показать, что в целом это предположение неверно. Таким образом, будет доказана следующая

Основная теорема. *Существуют неабелевы группы G и H такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ и $|G| \neq |H|$.*

В п. 2 приведены некоторые обозначения и предварительные сведения. В п. 3 построен класс p-групп путем рассмотрения определенных подгрупп группы единиц усеченного кольца косых многочленов R над конечным полем и указаны некоторые сведения о строении этих групп и их графов некоммутативности. В п. 4 даны представления групп с одинаковыми графами некоммутативности и различными порядками. Приводимый контрпример принадлежит профессору И. М. Айзексу.

This research was in part supported by a grant from IPM (N 84200039).

2. Определения и предварительные сведения. Все рассматриваемые в данной статье группы считаются конечными. Наши обозначения для групповых и кольцевых структур основываются на обозначениях из [2].

Граф некоммутативности группы имеет некоторые особенности. Например, он всегда *связен* (см. [1]), и его можно рассматривать как *многодольный* граф. Граф $\Gamma = (V, E)$ называется *k-дольным*, $k > 1$, если существует разбиение V на k подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_k$ (называемых долями) таких, что каждое ребро из E соединяет вершину из V_i с вершиной из V_j, $i \neq j$. Пусть $[G : Z(G)] = m$, $m \geq 4$, и $T = \{1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ — трансверсаль группы $Z(G)$ в G. Рассмотрим смежные классы $x_1Z(G), x_2Z(G), \dots, x_{m-1}Z(G)$. Очевидно, что любые два элемента из одного смежного класса перестановочны. Значит, между вершинами внутри каждого из смежных классов ребер нет. Следовательно, можно рассматривать эти смежные классы как доли в графе $\nabla(G)$. Следует заметить, что этот граф можно описать как другой многодольный граф, просто выбрав доли другим способом. Основываясь на вышеизложенных соображениях, с каждым графом некоммутативности $\nabla(G)$ мы связываем некоторый индуцированный подграф, называемый *основным графом* и обозначаемый через $\nabla^u(G)$. Основной граф $\nabla^u(G)$ строится следующим образом: множеством его вершин является трансверсаль $T \backslash \{1\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ и две вершины x_i и x_j смежны тогда и только тогда, когда $x_i x_j \neq x_j x_i$. Рассуждения, подобные доказательству предложения 5 из [1], показывают, что $\nabla^u(G)$ всегда связен.

Обозначим степень вершины x_i в основном графе $\nabla^u(G)$ через d_i. Очевидно, что $d_i \leq m - 2$ для всех $i = 1, 2, \dots, m-1$. Положим

$$D^u(G) := \{d_1, d_2, \dots, d_{m-1}\}.$$

Заметим, что в случае, когда $Z(G) = 1$, выполнено равенство $\nabla^u(G) \cong \nabla(G)$.

Граф называется *регулярным*, если все его вершины имеют одну и ту же степень. В [1] доказано, что если $\nabla(G)$ является регулярным графом, то $G \cong P \times A$, где P — неабелева p-группа и A абелева. Кроме того, $\nabla^u(G)$ регулярен тогда и только тогда, когда регулярен $\nabla(G)$.

С каждой группой G свяжем некоторое множество делителей порядка группы G, а именно множество порядков классов сопряженных элементов группы G, определяемое следующим образом: $\mathrm{cs}(G) := \{|g^G| : g \in G\}$. Очевидно, что $1 \in \mathrm{cs}(G)$.

3. Конструкция. Понятие усеченного кольца косых многочленов было использовано Ридлом в [3] для построения групп некоторого вида. В настоящей работе оно используется для подобных целей и играет важную роль. Зафиксируем степень q простого числа и целое число $e \geq 2$. Пусть $F = \mathrm{GF}(q)$ и $E = \mathrm{GF}(q^e)$. Пусть $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle \sigma \rangle$, где $\sigma : \alpha \mapsto \alpha^q$ для $\alpha \in E$. Пусть $E\{X\}$ — кольцо косых многочленов от переменной X с коэффициентами из E. Другим словами,

$$E\{X\} = \{\alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_k X^k \mid \alpha_i \in E\}.$$

Заметим, что X не предполагается перестановочной с коэффициентами. Вместо этого накладывается соотношение $X\alpha = \alpha^q X$ для $\alpha \in E$. Хорошо известно, что $E\{X\}$ определяет кольцо. Зафиксируем целое число $n \geq 1$ и заметим, что $X^{n+1}E\{X\} = E\{X\}X^{n+1}$ и этот объект является двухсторонним идеалом, который будет обозначаться через (X^{n+1}). Пусть $R = E\{X\}/(X^{n+1})$ и x — образ переменной X в R при естественном гомоморфизме. Тогда

$$R = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in E\}$$

и $|R| = |E|^{n+1} = q^{e(n+1)}$. Кроме того, $x^{n+1} = 0$ и $x\alpha = \alpha^q x$ для $\alpha \in E$. Заметим, что $xR = Rx$ — нильпотентный идеал и $R/xR \cong E$. Теперь если $J = J(R)$ обозначает радикал Джекобсона кольца R, то $xR = J$. Более того, $J^k = x^k R = Rx^k$, и видно, что $J^n \neq 0$, тогда как $J^{n+1} = 0$.

Из общей теории хорошо известно, что если R — кольцо $(1 \in R)$ с радикалом Джекобсона J, то смежный класс $1 + J$ является подгруппой в группе единиц кольца R. Для усеченного кольца косых многочленов R положим

$$P_n(q,e) := 1 + J = \{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in E\}.$$

Фактически $P_n(q,e)$ является p-подгруппой порядка q^{en} группы $R^\times$ единиц кольца R, где p — единственный простой делитель числа q.

Для целого числа $m \geq 1$ множество

$$1 + J^m = \{1 + \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \dots + \alpha_n x^n \mid \alpha_i \in E\}$$

является подгруппой группы $1 + J$ и

$$1 + J > 1 + J^2 > 1 + J^3 > \dots > 1 + J^n > 1 + J^{n+1} = 1.$$

Отметим, что фактор-группа $(1+J^m)/(1+J^{m+1})$ изоморфна аддитивной группе поля E (см. [3, с. 194]).

Теперь мы можем продолжить наше исследование в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Член $Z_i(P_n(q,e))$ верхнего центрального ряда группы $P_n(q,e)$ равен $1 + J^{n-i+1}$. В частности, $Z(P_n(q,e)) = 1 + J^n$.*

Доказательство. См. следствие 2.12(i) в [3]. $\square$

Лемма 2. *Множество порядков классов сопряженности группы $P_n(q,e)$ дается формулой*

$$\mathrm{cs}(P_n(q,e)) = \{(q^{e-1})^i \mid i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Доказательство. См. следствие 3.4(i) в [3]. $\square$

Лемма 3. *$D^u(P_n(q,e)) = \{q^{e(n-1)} - q^{e(n-1-i)+i} \mid i = 1, 2, \dots, n-1\}$. В частности, граф некоммутативности $\nabla(P_2(q,e))$ регулярен.*

Доказательство. Пусть x — некоторый нецентральный элемент из $P_n = P_n(q,e)$. Тогда по лемме 2 выполнено равенство $|x^{P_n}| = (q^{e-1})^i$ для некоторого i такого, что $1 \leq i \leq n-1$, и, следовательно,

$$\deg(x) = |P_n|\left(1 - \frac{1}{|x^{P_n}|}\right) = q^{en}(1 - q^{(1-e)i}).$$

Поскольку $|Z(P_n)| = q^e$, заключаем, что

$$q^{e(n-1)}(1 - q^{(1-e)i}) = q^{e(n-1)} - q^{e(n-1-i)+i} \in D^u(P_n),$$

как и требовалось. Равенство $|D^u(P_n)| = n-1$ дает $|D^u(P_2)| = 1$, и, следовательно, в этом случае граф $\nabla(P_2)$ регулярен. $\square$

Лемма 4. *Пусть p — простое число и r — натуральное число, большее 1. Тогда существует неабелева p-группа P порядка p^{2r} такая, что выполнены следующие утверждения:*

(1) $|Z(P)| = p^r$;

(2) *$P/Z(P)$ является элементарной абелевой p-группой;*

(3) *для каждого нецентрального элемента x из P централизатор $C_P(x)$ равен $Z(P)\langle x\rangle$.*

Доказательство. Пусть $F = \mathrm{GF}(p)$ и $E = \mathrm{GF}(p^r)$. Рассмотрим усеченное кольцо косых многочленов $R = \{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2 \mid \alpha_i \in E\}$, где $x^3 = 0$ и $x\alpha = \alpha^p x$. Тогда $P = P_2(p, r) = \{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_i \in E\}$ является p-подгруппой порядка p^{2r} группы $R^\times$ единиц кольца R. Поскольку $r > 1$, можно выбрать $\alpha \in E\backslash F$. Легко видеть, что $1 + x \notin C_P(1 + \alpha x)$ и, следовательно, P неабелева. (Отметим, что если $r = 1$, то для всех $\alpha \in E$ выполнено равенство $\alpha^p = \alpha$ и, значит, $x\alpha = \alpha^p x = \alpha x$. В этом случае R коммутативно.) Кроме того, по лемме 1 имеем $Z(P) = 1 + J^2 = \{1 + \gamma x^2 \mid \gamma \in E\}$ и тем самым $|Z(P)| = p^r$. С другой стороны, группа $P/Z(P) = (1 + J)/(1 + J^2)$ изоморфна аддитивной группе поля E, поэтому является элементарной абелевой p-группой.

Для того чтобы вычислить централизаторы нецентральных элементов из P, достаточно вычислить централизатор элемента $1+\alpha x$ для некоторого ненулевого $\alpha \in E$. Поскольку 1 и $1+\gamma x^2$ $(\gamma \in E)$ перестановочны с $1+\alpha x$, необходимо определить, при каком условии элемент $1 + \alpha x$ перестановочен с $1 + \beta x$ для $\beta \in E$. Это условие заключается в равенстве $\alpha\beta^p = \beta\alpha^p$ или в эквивалентном равенстве $(\alpha/\beta)^p = \alpha/\beta$. Последнее равенство выполнено в точности тогда, когда α/β лежит в простом подполе поля F. Таким образом, существует ровно p возможностей для α, т. е. $C_P(1 + \alpha x) = Z(P)\langle 1 + \alpha x\rangle$. $\square$

4. Контрпримеры. Как сказано выше, укажем группы G и H с одним и тем же графом некоммутативности такие, что $|G| \neq |H|$.

Основная теорема. *Существуют неабелевы группы G и H такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ и $|G| \neq |H|$.*

Доказательство. Во-первых, предположим, что P — 2-группа порядка 2^{10} такая, что $P/Z(P)$ является элементарной абелевой 2-группой порядка 2^5 и для каждого нецентрального элемента $x \in P$ его централизатор $C_P(x)$ равен $Z(P)\langle x\rangle$. По лемме 4 такая группа P существует, и по лемме 3 граф $\nabla(P)$ регулярен. Заметим, что $P/Z(P)$ содержит в точности $2^5 - 1 = 31$ подгруппу порядка 2. Таким образом, централизаторы нецентральных элементов группы P — это в точности 31 абелева подгруппа вида $Z(P)\langle x\rangle$, где x — нецентральный элемент группы P. Теперь рассмотрим прямое произведение $G := P \times A$, где A — произвольная абелева группа. Два нецентральных элемента группы G перестановочны тогда и только тогда, когда они лежат в одном смежном классе группы G по подгруппе $Z(G) = Z(P) \times A$. Обозначим $|A| = a$. Тогда граф некоммутативности группы G может быть описан следующим образом: в нем $(31)a(2^5)$ вершин, которые разбиты на 31 часть размера $a(2^5)$, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они лежат в разных частях. Фактически граф $\nabla(G)$ является $(2^5)a(30)$-регулярным графом.

Теперь предположим, что Q — 5-группа порядка 5^6 такая, что $Q/Z(Q)$ является элементарной абелевой 5-группой порядка 5^3 и для каждого нецентрального элемента $y \in Q$ централизатор $C_Q(y)$ равен $Z(Q)\langle y\rangle$. Как и прежде, по лемме 4 такая группа Q существует, и по лемме 3 граф $\nabla(Q)$ регулярен. Заметим, что $Q/Z(Q)$ имеет ровно $(5^3-1)/(5-1) = 31$ подгруппу порядка 5. Таким образом, централизаторы нецентральных элементов группы Q — это в точности 31 абелева подгруппа вида $Z(Q)\langle y\rangle$, где y — нецентральный элемент группы Q. Рассмотрим теперь прямое произведение $H := Q \times B$, где B — произвольная абелева группа. Два нецентральных элемента в H коммутируют тогда и только тогда, когда они лежат в одном смежном классе произведения $Z(H) = Z(Q) \times B$ в H. Положим $|B| = b$. Тогда граф некоммутативности группы H может быть описан следующим образом: в нем $(5^3)b(5^3 - 1) = (4)(31)b(5^3)$ вершин, множество этих вершин разбито на 31 подмножество размера $4b(5^3)$, каждое такое подмножество имеет вид $(C_Q(y)\backslash Z(Q)) \times B$, где y — некоторый нецентральный элемент группы Q. Граф задается тем, что две его вершины соединены тогда и только тогда, когда они лежат в разных подмножествах. Это объясняется тем, что централизаторы нецентральных элементов группы H — это 31 подгруппа, в каждой из которых центр имеет индекс 5 и, следовательно, каждый нецентральный элемент перестановочен в точности с $4b(5^3)$ нецентральными элементами. Фактически граф $\nabla(H)$ является $4b(5^3)30$-регулярным графом. Теперь нужно выбрать A и B так, чтобы выполнялось равенство $a(2^5) = 4b(5^3)$. При таком выборе графы некоммутативности $\nabla(G)$ и $\nabla(H)$ имеют одинаковое количество вершин и, более того, изоморфны. Но соответствующие группы G и H имеют неравные порядки $a2^{10}$ и $b5^6$. $\square$

Благодарности. Я выражаю признательность профессору И. М. Айзексу за многочисленные полезные соображения и его вклад в написание этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Могхаддамфар А. Р., Ши У. Дж., Чжоу У., Зокаи А. Р.* О некоммутативных графах, ассоциированных с конечной группой // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 325–332.
2. *Isaacs I. M.* Algebra. California: Brooks/Cole Publ. Company, 1992. (A Graduate Course).
3. *Riedl J. M.* Character degrees, class size, and normal subgroups of a certain class of p-groups // J. Algebra. 1999. V. 218, N 1. P. 190–215.

Статья поступила 2 августа 2005 г.

Ali Reza Moghaddamfar
Department of Mathematics, Faculty of Science,
K. N. Toosi University of Technology,
P. O. Box 16315–1618, Tehran, Iran;
Institute for Studies in Theoretical Physics and Mathematics (IPM)
moghadam@kntu.ac.ir, moghadam@ipm.ir