Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.543.1+512.642.2

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ОБЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ЯВЛЯЮТСЯ ГРУППАМИ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. А. Толстых

Аннотация: Говорят, что группа имеет *конечную ширину*, если ее ширина относительно любого множества порождающих, замкнутого относительно взятия обратных элементов, конечна. Бергман показал [1], что бесконечные симметрические группы являются группами конечной ширины, и сформулировал несколько вопросов о том, являются ли группами конечной ширины группы автоморфизмов ряда классических структур, упомянув, в частности, бесконечномерные общие линейные группы над полями. В данной работе доказано, что бесконечномерные общие линейные группы над произвольными телами являются группами конечной ширины. Рассмотрена проблема конечности ширины для других бесконечномерных классических групп.

Ключевые слова: общая линейная группа, бесконечномерное векторное пространство, порождающее множество, ширина.

Пусть G — произвольная группа, а S — порождающее множество G, замкнутое относительно взятия обратных элементов. Напомним, что *ширина* $\mathrm{wid}(G, S)$ группы G относительно S — это либо наименьшее натуральное число k такое, что каждый элемент группы G может быть записан в виде произведения не более чем k элементов из S, либо ∞.

Бергман показал в работе [1], что бесконечные симметрические группы имеют конечную ширину относительно *всех* своих порождающих множеств. Будем говорить, что группа G является *группой конечной ширины*, если ее ширина относительно любого множества порождающих, замкнутого относительно взятия обратных элементов, конечна (некоторые авторы используют для групп конечной ширины такие термины, как «группы со свойством Бергмана» и «группы ограниченного диаметра Кэли»). Первый пример бесконечной группы конечной ширины построен Шелахом в работе [2].

В препринте [3], предшествующем работе [1], Дж. Бергман сформулировал несколько вопросов о том, являются ли группы автоморфизмов ряда классических структур группами конечной ширины; предлагалось, в частности, выяснить ситуацию для бесконечномерных общих линейных групп над полями. Препринт Бергмана вызвал значительный интерес, и вскоре были найдены новые примеры бесконечных групп автоморфизмов, являющихся группами конечной ширины. Выяснилось, что группами конечной ширины, например, являются: группы автоморфизмов 2-транзитивных линейно упорядоченных множеств [4], группа автоморфизмов $\mathbb{R}$ как борелевского пространства [5], группы автоморфизмов ω-стабильных и ω-категоричных структур [6] и т. д.

В настоящей работе, отвечая на вопрос Бергмана, мы покажем, что бесконечномерные общие линейные группы над телами являются группами конечной ширины, и рассмотрим проблему конечности ширины для ряда других классических групп бесконечномерных векторных пространств.

Автор признателен Дж. Бергману за замечания к черновому варианту данной работы и благодарен О. В. Белеградеку и В. Г. Бардакову за интересные обсуждения.

1. GL(V) как степень некоторого класса сопряженности

Всюду в настоящей работе V обозначает левое бесконечномерное векторное пространство над телом D. Через Γ мы будем обозначать группу $\mathrm{GL}(V)$, т. е. группу всех биективных линейных преобразований (автоморфизмов) пространства V. Мы будем использовать стандартные обозначения теории бесконечных групп перестановок [7, гл. 4]. Так, если Y — это произвольное подмножество Γ и W — подпространство V, то $Y_{(W)}$ — совокупность всех элементов из Y, которые фиксируют W поточечно, а $Y_{\{W\}}$ — совокупность всех элементов из Y, которые фиксируют W как множество. Всякий символ вида $Y_{*_1,*_2}$ обозначает множество $Y_{*_1} \cap Y_{*_2}$.

Следуя работе [8], будем называть подпространство U векторного пространства V *половинным*, если $\dim U = \operatorname{codim} U = \dim V$. Понятие половинного подпространства развивает идею теоретико-множественного понятия «половинное подмножество» (moiety): если I — бесконечное множество, то всякое подмножество J множества I такое, что $|J| = |I \setminus J|$, называется *половинным* подмножеством I.

Пусть $V = U \oplus U' \oplus W$ — разложение V в прямую сумму половинных подпространств. Зафиксируем некоторую инволюцию π^* из группы $\mathrm{GL}(V)$, переставляющую местами подпространства U и U' и оставляющую на месте все элементы подпространства W.

Доказательство главного результата настоящей статьи, утверждающего, что группа $\mathrm{GL}(V)$ является группой конечной ширины, основывается на следующем результате.

Предложение 1.1. *Ширина группы* $\mathrm{GL}(V)$ *относительно класса сопряженности инволюции* π^* *не превосходит* 32.

Доказательство начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма 1.2. *Предположим, что* U_1, U_2, W *— половинные подпространства* V *такие, что* $V = U_1 \oplus U_2 \oplus W$. *Пусть* $\Gamma = \mathrm{GL}(V)$ *и*

$$H_1 = \Gamma_{(U_2),\{U_1 \oplus W\}} \quad \text{и} \quad H_2 = \Gamma_{(U_1),\{U_2 \oplus W\}}.$$

Тогда ширина $\mathrm{GL}(V)$ *относительно множества* $H_1 \cup H_2$ *не превосходит* 8.

Доказательство леммы представляет собой переработанный вариант доказательства того, что группа $\mathrm{GL}(V)$ порождается множеством $H_1 \cup H_2$, данного Макферсоном в работе [8].

Обозначим множество $H_1 \cup H_2$ через X. Покажем сначала, что

$$\Gamma_{(U_1+W)} \subseteq H_2 H_1 H_2 H_1, \tag{1.1}$$

т. е. ширина подгруппы $\Gamma_{(U_1+W)}$ относительно X не превосходит 4. Рассмотрим автоморфизм $\theta \in \Gamma_{(U_1+W)}$ и предположим, что $(x_i : i \in I)$ — базис подпространства U_2. Тогда

$$\theta x_i = x_i' + a_i + b_i \quad \forall i \in I,$$

где a_i является элементом W, b_i — элементом U_1 и система $(x'_i : i \in I)$ — базисом U_2. Рассмотрим автоморфизм τ_1 из H_2, действующий тождественно на $U_1 + W$ и такой, что

$$\tau_1 x'_i = x_i - a_i \quad \forall i \in I.$$

Пусть, далее, τ_2 — какой-нибудь автоморфизм из H_1, меняющий местами подпространства U_1 и W. Тогда

$$\tau_2\tau_1\theta\tau_2^{-1}x_i = x_i + a'_i \quad \forall i \in I,$$

где $a'_i = \tau_2 b_i$ — элемент, принадлежащий W. Завершая проверку формулы (1.1), находим, работая, как и выше, автоморфизм τ_3 из H_2 такой, что

$$\tau_3\tau_2\tau_1\theta\tau_2^{-1} = \mathrm{id}_V .$$

Рассмотрим теперь произвольный автоморфизм σ из группы $\mathrm{GL}(V)$. Пусть $\mathscr{B}_1 = (y_i : i \in I)$ — базис подпространства U_1. Ясно, что

$$\sigma y_i = z_i + t_i \quad \forall i \in I,$$

где $z_i \in U_1$ и $t_i \in U_2 + W$. Найдется половинное подмножество J множества I такое, что множество $(t_j : j \in J)$ содержится в некотором половинном подпространстве, скажем, L подпространства $U_2 + W$. Тогда подходящий элемент $\gamma_1 \in H_2$ переводит L в половинное подпространство подпространства W. Отсюда следует, что подпространство $\gamma_1\langle z_j + t_j : j \in J\rangle$ является половинным подпространством подпространства $U_1 + W$. Пусть y'_j обозначает элемент $\gamma_1(z_j + t_j)$, где $j \in J$.

Предположим, что $\mathscr{B}_W$ — некоторый базис W и $\mathscr{B}_W^0$ — некоторое половинное подмножество $\mathscr{B}_W$. Умножим преобразование $\gamma_1\sigma$ на автоморфизм γ_2 из H_1, который отображает систему $(y'_j : j \in J)$ на множество $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_W^0$, а затем на автоморфизм $\gamma_3 \in H_2$, который отображает множество $\mathscr{B}_W^0$ на множество $\mathscr{B}_W$. Тогда

$$\gamma_3\gamma_2\gamma_1\sigma y_j = \gamma_3\gamma_2 y'_j = v_j \quad \forall j \in J,$$

где $(v_j : j \in J) = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_W$. Рассуждая аналогично, видим, что система $(y_j : j \in J)$ произведением элемента $\delta_2 \in H_1$ и элемента $\delta_3 \in H_2$ может быть отображена на множество $(v_j : j \in J)$:

$$\delta_3\delta_2 y_j = v_j \quad \forall j \in J.$$

Следовательно,

$$\gamma_3\gamma_2\gamma_1\sigma\delta_2^{-1}\delta_3^{-1}v_j = v_j \quad \forall j \in J.$$

Таким образом, автоморфизм $\gamma_3\gamma_2\gamma_1\sigma\delta_2^{-1}\delta_3^{-1}$ принадлежит подгруппе $\Gamma_{(U_1+W)}$. Применяя (1.1), получаем, что

$$\sigma \in H_2H_1(H_2H_1H_2H_1)H_2H_1,$$

поэтому автоморфизм σ может быть записан в виде произведения не более 8 элементов из $H_1 \cup H_2$, как и утверждалось. Лемма доказана.

Пусть $V = L_1 \oplus M \oplus L_2$ — разложение V в прямую сумму половинных подпространств, I — индексное множество, мощность которого равна размерности V, и пусть $(a_i : i \in I)$, $(a_i^* : i \in I)$ — произвольные базисы L_1, а $(b_i : i \in I)$ —

произвольный базис L_2. Рассмотрим инволюции π_1, π_2 из группы $\mathrm{GL}(V)$, каждая из которых действует на M тождественно и действие которых на базисах (a_i) и (a_i^*) выглядит следующим образом:

$$\pi_1 a_i = b_i \quad \forall i \in I,$$

$$\pi_2 a_i^* = b_i.$$

Очевидно, что обе инволюции π_1, π_2 сопряжены с введенной выше инволюцией π^*. Ясно, что

$$\pi_2\pi_1 a_i = a_i^* \quad \forall i \in I.$$

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{GL}(L_1)$ обозначает линейное преобразование пространства L_1, которое переводит базис (a_i) в базис (a_i^*). Предположим, что для всех $i \in I$

$$\alpha^{-1} a_i^* = \sum_j \beta_{ij} a_j^*,$$

где $\beta_{ij} \in D$. Тогда

$$\pi_2\pi_1 b_i = \pi_2 a_i = \pi_2(\alpha^{-1} a_i^*) = \pi_2\Big(\sum_j \beta_{ij} a_j^*\Big) = \sum_j \beta_{ij} b_j$$

для всех $i \in I$. Таким образом, действие $\pi_2\pi_1$ на $L_2 = \langle b_i : i \in I\rangle$ изоморфно действию α^{-1} на $L_1 = \langle a_i^* : i \in I\rangle$, или, неформально,

$$\pi_2\pi_1 = \alpha \oplus \mathrm{id} \oplus \alpha^{-1}.$$

Немного видоизменив конструкцию автоморфизма $\pi_2\pi_1$, можно представить в виде произведения двух сопряженных с π^* автоморфизмов любой элемент $\mathrm{GL}(V)$, имеющий вид

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \alpha \oplus \mathrm{id} \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \alpha^{-1}, \tag{1.2}$$

где последняя прямая сумма строится по разложению V в прямую сумму половинных подпространств, а α — тип изоморфизма некоторого автоморфизма одного из этих подпространств.

Рассмотрим два автоморфизма σ_1, σ_2 векторного пространства V, имеющих вид (1.2):

$$\sigma_1 = \mathrm{id} \oplus (\alpha \oplus \alpha^{-1} \oplus \alpha \oplus \alpha^{-1} \oplus \dots) \oplus \mathrm{id},$$
$$\sigma_2 = \alpha \oplus (\alpha^{-1} \oplus \alpha \oplus \alpha^{-1} \oplus \alpha \oplus \dots) \oplus \mathrm{id},$$

где оба автоморфизма строятся по одному и тому же разложению V в счетную прямую сумму половинных подпространств. Тогда автоморфизм

$$\sigma_1\sigma_2 = \alpha \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{id} \oplus \mathrm{id} \tag{1.3}$$

является произведением четырех автоморфизмов, сопряженных с π^*.

Пусть U_1, U_2, W — половинные подпространства V такие, что

$$V = U_1 \oplus W \oplus U_2.$$

Из формулы (1.3) следует, что каждый элемент подгруппы $\Gamma_{(U_1),\{U_2\oplus W\}}$ (соответственно подгруппы $\Gamma_{(U_2),\{U_1\oplus W\}}$) является произведением не более четырех автоморфизмов, сопряженных с π^*. Тогда по лемме 1.2 каждый элемент $\mathrm{GL}(V)$

есть произведение не более чем $8 \cdot 4 = 32$ автоморфизмов, сопряженных с π^*, что завершает доказательство предложения 1.1.

Замечание. Легко понять, что в группе $\mathrm{GL}(V)$ инволюция π^* является коммутатором. Действительно, определение π^* показывает, что π^* может быть записана в виде (1.2), а значит, в силу приведенного выше рассуждения — в виде произведения двух сопряженных инволюций.

Таким образом, предложение 1.1 обеспечивает простое доказательство того, что группа $\Gamma = \mathrm{GL}(V)$ совпадает со своим коммутантом. Последний факт был доказан Розенбергом в [9] в качестве следствия полученной им классификации нормальных подгрупп группы $\mathrm{GL}(V)$. Кроме того, из предложения 1.1 вытекает, что коммутаторная ширина группы $\mathrm{GL}(V)$ (ширина относительно множества всех коммутаторов) не превосходит 32. Было бы интересно получить точное значение коммутаторной ширины группы $\mathrm{GL}(V)$, а также точное значение ширины относительно порождающих множеств вида $\Gamma_{(U_1),\{U_2\oplus W\}} \cup \Gamma_{(U_2),\{U_1\oplus W\}}$, рассматривавшихся в предложении 1.1.

2. $\mathbf{GL}(\boldsymbol{V})$ — группа конечной ширины

Теорема 2.1. *Пусть X — произвольное порождающее множество группы $\mathrm{GL}(V)$, замкнутое относительно взятия обратных элементов. Тогда ширина $\mathrm{GL}(V)$ относительно X конечна и, следовательно, группа $\mathrm{GL}(V)$ является группой конечной ширины.*

Доказательство. Пусть X^k обозначает множество $\{x_1 \dots x_k : x_i \in X\}$; будем называть каждое такое множество *степенью* X.

Начнем с доказательства «линейного» аналога ключевого результата Бергмана из [1] (см. формулировку и доказательство леммы 4 в [1]).

Лемма 2.2. *Существуют степень X^m порождающего множества X и разложение $V = U \oplus W$ векторного пространства V в прямую сумму половинных пространств такие, что множество $(X^m)_{\{U\},\{W\}}$ индуцирует группу $\mathrm{GL}(U)$ на подпространстве U.*

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_{k\in N} L_k$ — разложение V в прямую сумму половинных подпространств. Пусть, далее, $L_k^* = \bigoplus_{i\neq k} L_i$, где k — произвольное натуральное число.

Если для некоторой пары (X^k, L_j) множество $(X^k)_{\{L_j\},\{L_j^*\}}$ индуцирует $\mathrm{GL}(L_j)$ на L_j, то заключение леммы справедливо. Предположим противное. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ мы можем найти автоморфизм $\sigma_k \in \mathrm{GL}(L_k)$ такой, что σ_k отличен от всех сужений на L_k элементов множества $(X^k)_{\{L_k\},\{L_k^*\}}$.

Положим $\sigma = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$. Поскольку $\mathrm{GL}(V) = \bigcup_k X^k$, получаем, что $\sigma \in X^j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Ясно, однако, что $\sigma \in (X^j)_{\{L_j\},\{L_j^*\}}$. Но тогда сужение σ на L_j есть σ_j; противоречие.

Пусть X^m, U, W удовлетворяют заключению леммы. Рассмотрим инволюцию $\pi \in \mathrm{GL}(V)$ такую, что действие сужения π на U изоморфно действию π^* на V, а действие π на W тривиально. Тогда в соответствии с предложением 1.1 множество автоморфизмов

$$Z = \left\{\sigma_1\pi\sigma_1^{-1} \dots \sigma_{32}\pi\sigma_{32}^{-1} : \sigma_1, \dots, \sigma_{32} \in (X^m)_{\{U\},\{W\}}\right\}$$

совпадает с группой $\Gamma_{\{U\},(W)}$, ибо всякий автоморфизм $\sigma_k \pi \sigma_k^{-1}$ действует на W тривиально в силу того, что действие π на W тривиально. Ясно, что Z содержится в некоторой степени X. По лемме 1.2 подгруппа $\Gamma_{\{U\},(W)}$ вместе с некоторой сопряженной подгруппой порождает группу $\mathrm{GL}(V)$ и соответствующая ширина не превосходит 8. Таким образом,

$$\mathrm{wid}(\mathrm{GL}(V), Z \cup \rho Z \rho^{-1}) \leq 8,$$

где ρ — некоторый автоморфизм V. Пусть l — натуральное число такое, что $Z \cup \rho Z \rho^{-1} \subseteq X^l$. В таком случае очевидно, что $\mathrm{GL}(V) = X^{8l}$.

3. Другие классические группы, ассоциированные с V

В этом пункте рассмотрим проблему конечности ширины для других классических групп, ассоциированных с V.

Напомним, что проективная общая линейная группа $\mathrm{PGL}(V)$ векторного пространства V — это проективный образ группы $\mathrm{GL}(V)$ (фактор-группа по подгруппе растяжений), аффинная группа $\mathrm{Aff}(V)$ — группа биективных преобразований V, порожденная элементами $\mathrm{GL}(V)$ и параллельными переносами, и, наконец, общая коллинеарная группа $\Gamma\mathrm{L}(V)$ — группа биективных полулинейных преобразований V, а группа $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$ — ее проективный образ.

Предложение 3.1. *Проективная общая линейная группа* $\mathrm{PGL}(V)$ *векторного пространства* V *и аффинная группа* $\mathrm{Aff}(V)$ *векторного пространства* V *являются группами конечной ширины.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно вытекает из теоремы 2.1 и того обстоятельства, что всякий гомоморфный образ группы конечной ширины есть группа конечной ширины.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.1, видим, что некоторая степень X^m порождающего множества группы $\mathrm{Aff}(V)$ содержит группу $\mathrm{GL}(V)$. Можно, не ограничивая общности, считать, что X^m содержит также некоторый нетривиальный параллельный перенос τ. Поскольку присоединенное действие (сопряжениями) группы $\mathrm{GL}(V)$ на множестве нетривиальных параллельных переносов транзитивно, получаем, что

$$\mathrm{Aff}(V) \subseteq X^m X^m \tau X^m \subseteq X^{4m}.$$

Предложение 3.2. *Пусть V — векторное пространство над телом D. Общая коллинеарная группа* $\Gamma\mathrm{L}(V)$ *и проективная общая коллинеарная группа* $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$ *являются группами конечной ширины в том и только в том случае, если группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(D)$ *тела D является группой конечной ширины.*

Доказательство. Предположим, что группа $\Gamma\mathrm{L}(V)$ является группой конечной ширины. Тогда группа $\mathrm{Aut}(D)$ тоже является группой конечной ширины, ибо

$$\mathrm{Aut}(D) \cong \Gamma\,\mathrm{L}(V)/\,\mathrm{GL}(V). \tag{3.1}$$

Докажем обратное. В [1] показано, что класс всех групп конечной ширины замкнут относительно групповых расширений (см. лемму 7 из [1] и последующее обсуждение). Поскольку группа $\mathrm{GL}(V)$ является группой конечной ширины, ввиду (3.1) результат Бергмана обеспечивает требуемое заключение.

Рассуждение в случае группы $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$ аналогично.

Фрид и Коллар показали в [10], что каждая группа может быть реализована как группа автоморфизмов некоторого поля. Таким образом, среди бесконечномерных (проективных) общих коллинеарных групп могут быть как группы конечной ширины, так и группы, не являющиеся группами конечной ширины. В связи с этим было бы интересно выяснить, являются ли, к примеру, группами конечной ширины группы автоморфизмов алгебраически замкнутых полей, имеющих бесконечную степень трансцендентности над простым подполем. Отметим еще, что проективная общая коллинеарная группа $\mathrm{P\Gamma L}(V)$ является группой автоморфизмов проективного пространства $P(V)$. Тем самым бесконечномерные проективные общие линейные группы дают как примеры, так и контрпримеры к плодотворной общей идее, высказанной Бергманом в [3], о том, что новые примеры групп конечной ширины могут быть найдены «среди групп автоморфизмов структур, которые могут быть «собраны» из бесконечного числа копий самих себя».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bergman G.* Generating infinite symmetric groups // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38. P. 429–440.
2. *Shelah S.* On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications // Word problems. II. Amsterdam; New York: North-Holland, 1980. V. 95. P. 373–394. (Stud. Logic Found. Math.).
3. *Bergman G.* Generating infinite symmetric groups // arXiv:math.GR/0401304 2004.
4. *Droste M., Holland W. C.* Generating automorphism groups of chains // Forum Math. 2005. V. 17. P. 699–710.
5. *Droste M., Göbel R.* Uncountable cofinalities of permutation groups // J. London Math. Soc. 2005. V. 71. P. 335–344.
6. *Kechris A. S., Rosendal C.* Turbulence, amalgamation and generic automorphisms of homogeneous structures // arXiv:math.LO/0409567 2004.
7. *Hodges W.* Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
8. *Macpherson D.* Maximal subgroups of infinite-dimensional linear groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1992. V. 53. P. 338–351.
9. *Rosenberg A.* The structure of the infinite general linear group // Ann. of Math. (2). 1958. V. 68. P. 278–294.
10. *Fried E., Kollár J.* Automorphism groups of fields // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1982. V. 29. P. 293–304.

Статья поступила 21 ноября 2005 г.

Толстых Владимир Александрович
Кемеровский гос. университет, математический факультет,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
tvlaa@rambler.ru