Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2006. Том 47, № 5

УДК 512.546.2

О НАКРЫТИЯХ В РЕШЕТКЕ ВСЕХ ГРУППОВЫХ ТОПОЛОГИЙ ПРОИЗВОЛЬНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. И. Арнаутов

Аннотация: Нарост пополнения топологической абелевой группы (G, τ_0) содержит ненулевой элемент простого порядка тогда и только тогда, когда группа G допускает отделимую групповую топологию τ_1, предшествующую данной и такую, что (G, τ_0) не обладает базисом окрестностей нуля из подмножеств, замкнутых в (G, τ_1).

Ключевые слова: абелева группа, групповая топология, решетка топологий, накрытие, предшествующая топология, пополнение.

Работа является продолжением исследований решетки топологий на алгебраических системах, начатых в [1–4]. В ней изучены свойства двух групповых топологий на абелевой группе, между которыми нет других групповых топологий. Указан метод (см. теорему 9) получения групповых топологий, предшествующих данной отделимой групповой топологии и обладающих тем свойством, что исходная топология не имеет базиса окрестностей нуля, состоящего из замкнутых множеств в полученной топологии. Как показано в теореме 10, этим методом может быть получена любая топология с указанными выше свойствами.

Мы будем использовать следующие обозначения. Через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ обозначаются множества натуральных и целых чисел соответственно. Если $k \in \mathbb{Z}$, то $|k|$ — модуль числа k. Через G будем обозначать абелеву группу в аддитивной записи. Если $k \in \mathbb{Z}$ и $U \subseteq G$, то положим

$$kU = \underbrace{U + U + \dots + U}_{|k| \text{ слагаемых}} \quad \text{и} \quad k \cdot U = \{\underbrace{u + u + \dots + u}_{|k| \text{ слагаемых}} \mid u \in U\}.$$

Если $b_1, b_2, \dots$ — некоторая последовательность элементов из G, то положим

$$F(b_1, b_2, \dots) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i \cdot b_i \;\middle|\; s \in \mathbb{N},\ k_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{s} \frac{|k_i|}{2^i} < 1 \right\}.$$

Если $M \subseteq G$ и τ — некоторая топология на G, то через $[M]_{(G,\tau)}$ будем обозначать замыкание множества M в (G, τ), через $\tau|_M$ — сужение топологии τ на M.

Если τ_0 и τ_1 — групповые топологии на G такие, что $\tau_1 < \tau_0$ и между ними на G нет других групповых топологий, то топология τ_0 называется *накрытием топологии* τ_1 и в этом случае будем писать $\tau_1 \prec \tau_0$. Запись $\tau_1 \preceq \tau_0$ означает, что $\tau_1 \prec \tau_0$ либо $\tau_1 = \tau_0$.

Замечание 1. Если A — подгруппа абелевой группы G и τ — некоторая групповая топология на A, то все окрестности нуля в (A, τ), рассмотренные как подмножества в G, составляют совокупность, удовлетворяющую условиям BN1–BN6 (см. [5, теорема 1.2.5]), и, значит, ее можно взять в качестве базиса окрестностей нуля некоторой групповой топологии на G. Эту групповую топологию на G будем обозначать тоже через τ, что не должно вызывать недоразумений, ибо из контекста будет ясно, на какой группе эта топология рассматривается, либо выбор группы не имеет значения.

Замечание 2. Индукцией по n легко доказывается, что если $S_0, S_1, \dots$ — последовательность подмножеств абелевой группы G такая, что $S_{k+1} + S_{k+1} \subseteq S_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то $\left(\sum\limits_{i=n}^{t+n} S_i\right) + S_{t+n} \subseteq S_{n-1}$ для любых $t, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть τ_0 и τ_1 — групповые топологии на абелевой группе G, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, такие, что $\tau_1 < \tau_0$ и (G, τ_0) обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из замкнутых множеств в (G, τ_1). Тогда на группе G существует групповая топология τ, удовлетворяющая первой аксиоме счетности, такая, что $\tau_1 < \tau < \tau_0$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_0$ и $\mathscr{B}_1$ — счетные базисы симметричных окрестностей нуля в (G, τ_0) и (G, τ_1) соответственно такие, что любая окрестность нуля $V \in \mathscr{B}_0$ не является окрестностью нуля в (G, τ_1), но является замкнутым множеством в (G, τ_1).

Дальнейшее доказательство теоремы проведем в несколько шагов.

I. По индукции построим последовательности окрестностей $V_0, V_1, \dots$ нуля в (G, τ_0), принадлежащих $\mathscr{B}_0$, окрестностей $U_1, U_2, \dots$ нуля в (G, τ_1), принадлежащих $\mathscr{B}_1$, и элементов $a_1, a_2, \dots$ группы G такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:

(а) $V_n + V_n \subseteq V_{n-1}$, $V_n \subseteq U_n$ и $2^n U_n \subseteq U_{n-1}$;

(б) $a_n \in U_n \setminus V_0$ и $((F(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1) \cap (2^n U_n) = \varnothing$.

В качестве V_0 и U_1 возьмем произвольные окрестности нуля из $\mathscr{B}_0$ и $\mathscr{B}_1$ соответственно. Существует такая окрестность нуля $V_1 \in \mathscr{B}_0$, что $V_1 + V_1 \subseteq V_0$ и $V_1 \subseteq U_1$. Так как V_0 не является окрестностью нуля в (G, τ_1), то $U_1 \setminus V_0 \neq \varnothing$. В качестве a_1 возьмем произвольный элемент из $U_1 \setminus V_0$. Поскольку $F(0, 0, \dots) \setminus V_0 = \{0\} \setminus V_0 = \varnothing$, для $n = 1$ выполнены условия (а) и (б).

Допустим, что уже определены окрестности $V_0, V_1, \dots, V_s$ нуля в (G, τ_0), принадлежащие $\mathscr{B}_0$, окрестности $U_1, U_2, \dots, U_s$ нуля в (G, τ_1), принадлежащие $\mathscr{B}_1$, и элементы $a_1, a_2, \dots, a_s$ группы G такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \leq s$, выполнены условия (а) и (б). Определим окрестности $U_{s+1} \in \mathscr{B}_1$ и $V_{s+1} \in \mathscr{B}_0$ и элемент $a_{s+1} \in G$ следующим образом.

Так как (согласно условию теоремы) V_1 замкнуто в (G, τ_1), из конечности множества $F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots)$ следует замкнутость в (G, τ_1) множества $(F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1$, причем $0 \notin (F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1$. Тогда существуют такие окрестность U'_s нуля в (G, τ_1), что

$$((F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1) \cap U'_s = \varnothing,$$

и окрестность нуля $U_{s+1} \in \mathscr{B}_1$, что $(2^{s+1} U_{s+1}) \subseteq U_s \cap U'_s$.

Множество V_0 не является окрестностью нуля в (G, τ_1), поэтому $U_{s+1} \setminus V_0 \neq \varnothing$. В качестве элемента a_{s+1} возьмем произвольный элемент из $U_{s+1} \setminus V_0$.

Поскольку $\tau_1 < \tau_0$, существует такая окрестность нуля $V_{s+1} \in \mathscr{B}_0$, что $V_{s+1} \subseteq U_{s+1}$ и $V_{s+1} + V_{s+1} \subseteq V_s$.

Проверим, что окрестности $V_0, V_1, \dots, V_{s+1}$ нуля в (G, τ_0), окрестности $U_1, U_2, \dots, U_{s+1}$ нуля в (G, τ_1) и элементы $a_1, a_2, \dots, a_{s+1}$ группы G удовлетворяют условиям (а) и (б) для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \leq s+1$.

Выполнение условия (а) следует непосредственно из построения окрестностей U_{s+1} и V_{s+1}.

Так как $a_{s+1} \in U_{s+1} \setminus V_0$ и

$$((F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1) \cap (2^{s+1} U_{s+1}) \\ \subseteq ((F(a_1, a_2, \dots, a_s, 0, 0, \dots) \setminus V_1) + V_1) \cap U'_s = \varnothing,$$

то и условие (б) выполнено для $n \leq s+1$.

Продолжая описанный выше процесс выбора окрестностей U_i, V_i и элементов a_i, построим такие последовательности окрестностей $V_0, V_1, \dots$ нуля в (G, τ_0), принадлежащих $\mathscr{B}_0$, окрестностей $U_1, U_2, \dots$ нуля в (G, τ_1), принадлежащих $\mathscr{B}_1$, и элементов $a_1, a_2, \dots$ группы G, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия (а) и (б).

II. Свойства построенных последовательностей.

1. Если $n, s \in \mathbb{N}$ и $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ такие, что $|k_i| < 2^{i+n}$ для $i < s$ и $|k_s| \leq 2^{s+n}$, то $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i U_{i+n} \subseteq U_n$.

В самом деле, если $s = 1$, то $k_1 U_{n+1} \subseteq 2^{n+1} U_{n+1} \subseteq U_n$.

Допустим, что требуемое включение доказано для $s \leq t$. Тогда так как $|k_{n+t}| < 2^{n+t}$, то $|k_{n+t} + 1| \leq 2^{n+t}$ и по допущению

$$\sum_{i=1}^{t+1} k_i U_{i+n} = \left(\sum_{i=1}^{t} k_i U_{i+n}\right) + k_{n+t+1} U_{n+t+1} \\ \subseteq \sum_{i=1}^{t-1} k_i U_{i+n} + (k_{n+t}) U_{n+t} + U_{n+t} \subseteq \sum_{i=1}^{t-1} k_i U_{i+n} + (k_{n+t} + 1) U_{n+t} \subseteq U_n.$$

2. Если $n \in \mathbb{N}$ и $c_1, c_2, \dots$ — последовательность элементов группы G такая, что $c_i \in U_{i+n}$ для любого $i \in \mathbb{N}$, то $F(c_1, c_2, \dots) \subseteq U_n$.

В самом деле, если $g \in F(c_1, c_2, \dots)$, то $g = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i c_i$, где $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{|k_i|}{2^i} < 1$. Тогда $|k_i| < 2^i \leq 2^{n+i}$ и согласно свойству 1 имеем

$$g = \sum_{i=1}^{s} k_i c_i \in \sum_{i=1}^{s} k_i U_{i+n} \subseteq U_n.$$

3. Если $n \in \mathbb{N}$ и $c_i \in \{0, a_{i+n}\}$ для любого $i \in \mathbb{N}$, то

$$F(c_2, c_3, \dots) + F(c_2, c_3 \dots) \subseteq F(c_1, c_2, \dots).$$

В самом деле, если $a, b \in F(c_2, c_3, \dots)$, то $a = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \cdot c_{i+1}$ и $b = \sum\limits_{i=1}^{t} l_i \cdot c_{i+1}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{|m_i|}{2^i} < 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{t} \frac{|l_i|}{2^i} < 1$. Не нарушая общности, можем считать, что $s = t$ (в противном случае добавили бы вместо недостающих слагаемых элементы вида $0 \cdot c_j$). Тогда

$$a + b = \sum_{i=1}^{s} m_i \cdot c_{i+1} + \sum_{i=1}^{t} l_i \cdot c_{i+1} = \sum_{i=1}^{s} (m_i + l_i) \cdot c_{i+1} = \sum_{i=1}^{s+1} k_i \cdot c_i,$$

где $k_1 = 0$ и $k_i = m_{i-1} + l_{i-1}$ для $2 \le i \le s+1$.

Так как
$$\sum_{i=1}^{s+1} \frac{|k_i|}{2^i} = \sum_{i=2}^{s+1} \frac{|m_{i-1} + l_{i-1}|}{2^i} \le \sum_{i=1}^{s} \frac{|m_i|}{2^{i+1}} + \sum_{i=1}^{s} \frac{|l_i|}{2^{i+1}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
то $a + b \in F(c_1, c_2, \dots)$.

4. Если $c_i \in \{0, a_i\}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $c_s = 0$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, то $a_s \notin F(c_1, c_2, \dots) + V_1$.

Допустим противное, т. е. что $a_s \in F(c_1, c_2, \dots) + V_1$. Тогда $a_s = v + \sum\limits_{i=1}^{t} k_i \cdot c_i$, где $v \in V_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{t} \frac{|k_i|}{2^i} < 1$, и, значит, $|k_i| < 2^i$ для любого $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le s$. Так как $c_s = 0$, то
$$a_s = v + \sum_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i + \sum_{i=s+1}^{t} k_i \cdot c_i.$$
Тогда
$$v + \sum_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i - a_s = -\sum_{i=s+1}^{t} k_i \cdot c_i.$$
Поскольку $c_i \in \{0, a_i\} \subseteq U_i$ и $|k_i| < 2^i$, согласно свойству 1
$$-\sum_{i=s+1}^{t} k_i \cdot c_i \in \sum_{i=s+1}^{t} k_i U_i \subseteq U_s$$
и тем самым $v + \sum\limits_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i - a_s \in U_s$.

Допустим, что $\sum\limits_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i \notin V_1$. Ввиду того, что $\sum\limits_{i=1}^{s-1} \frac{|k_i|}{2^i} \le \sum\limits_{i=1}^{t} \frac{|k_i|}{2^i} < 1$, имеем $\sum\limits_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i \in F(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}) \setminus V_1$. Учитывая условие (б) (см. шаг I настоящего доказательства), получим, что
$$\begin{aligned} v + \sum_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i &\in (a_s + U_s) \cap (V_1 + (F(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, 0, \dots \setminus V_1))) \\ &\subseteq (U_s + U_s) \cap (V_1 + (F(a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, 0, 0, \dots) \setminus V_1))) = \varnothing; \end{aligned}$$
противоречие.

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i \in V_1$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i - a_s \notin V_1$ (в противном случае
$$a_s \in -\sum_{i=1}^{s-1} k_i \cdot c_i + V_1 \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V_0;$$
противоречие с определением элемента a_s). Так как $\sum\limits_{i=1}^{s-1} \frac{|k_i|}{2^i} \le \sum\limits_{i=1}^{t} \frac{|k_i|}{2^i} < 1$, то $\sum\limits_{i=1}^{s-1} \frac{|k_i|}{2^i} \le 1 - \frac{1}{2^{s-1}}$, и тем самым
$$\sum_{i=1}^{s-1} \frac{|k_i|}{2^i} + \frac{1}{2^s} < \sum_{i=1}^{s-1} \frac{|k_i|}{2^i} + \frac{1}{2^{s-1}} \le 1,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{s-1}\frac{|k_i|}{2^i}+\frac{1}{2^s}<1.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{s-1}k_i\cdot c_i-a_s\in F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots),$$

так что

$$\sum_{i=1}^{s-1}k_i\cdot c_i-a_s\in F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots)\setminus V_1.$$

Тогда (см. условие (б) шага I)

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=s+1}^{t}k_i\cdot c_i&=v+\sum_{i=1}^{s-1}k_i\cdot c_i-a_s\\
&\in\left(\sum_{i=s+1}^{t}k_iU_i\right)\cap(V_1+(F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots)\setminus V_1))\\
&\subseteq\left(k_{s+1}U_{s+1}+\sum_{i=s+2}^{t}k_iU_i\right)\cap(V_1+(F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots)\setminus V_1))\\
&\subseteq(k_{s+1}U_{s+1}+U_{s+1})\cap(V_1+(F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots)\setminus V_1))\\
&\subseteq(2^{s+1}U_{s+1})\cap(V_1+(F(a_1,a_2,\dots,a_s,0,0\dots)\setminus V_1))=\varnothing;
\end{aligned}$$

противоречие с условием (б) шага I, что завершает доказательство этого свойства.

III. Построение топологии τ. Пусть $d_1,d_2,\dots$ — последовательность элементов группы G такая, что $d_{2i}=0$ и $d_{2i+1}=a_{2i+1}$ для любого $i\in\mathbb{N}$ (определение элементов a_i см. выше в шаге I). Для каждого $n\in\mathbb{N}$ положим $W_n=F(d_n,d_{n+1},\dots)+V_n$ и покажем, что совокупность $\{W_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ может быть взята в качестве базиса окрестностей нуля некоторой групповой топологии τ на группе G (см. [5, теорема 1.2.4]).

В самом деле, из определения множества $F(b_1,b_2,\dots)$ и окрестностей нуля V_n легко следует, что $0\in W_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$; $W_k\subseteq W_n$, если $n\le k$; $-W_k=W_k$ для любого $k\in\mathbb{N}$. Так как $V_{k+1}+V_{k+1}\subseteq V_k$ для любого $k\in\mathbb{N}$, из свойства 3 легко получаем, что $W_{k+1}+W_{k+1}\subseteq W_k$ для любого $k\in\mathbb{N}$.

Итак, совокупность $\{W_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ задает на G некоторую групповую топологию τ, в которой она является базисом окрестностей нуля.

Так как (см. свойство 2 шага II и условие (а) шага I)

$$W_k=V_k+F(d_k,d_{k+1},\dots)\subseteq U_k+U_k\subseteq U_{k-1}\quad\text{для любого } k\in\mathbb{N},$$

то $\tau_1\le\tau$. Из свойства 4 следует, что $a_{2i}\notin W_1$, и поскольку $a_{2i}\in U_{2i}$ для любого $i\in\mathbb{N}$, то $\tau_1<\tau$.

Аналогично из $V_k\subseteq V_k+F(d_k,d_{k+1},\dots)\subseteq W_k$ для любого $k\in\mathbb{N}$ вытекает, что $\tau\le\tau_0$, и поскольку $a_{2i+1}\notin V_0$ для любого $i\in\mathbb{N}$ (см. выше определение a_i) и $a_{2i+1}=d_{2i+1}\in W_{2i+1}$ для любого $i\in\mathbb{N}$, то $\tau<\tau_0$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть τ_0 и τ_1 — метризуемые отделимые групповые топологии на абелевой группе G такие, что $\tau_1 \prec \tau_0$ и (G, τ_0) является полной топологической группой. Тогда топологическая группа (G, τ_0) обладает базисом окрестностей нуля, которые являются замкнутыми множествами в (G, τ_1).*

Доказательство см. [4, лемма 9].

Теорема 5. *Если абелева группа G допускает такую отделимую групповую топологию τ_0, что τ_0 является атомом в решетке всех групповых топологий на G, а (G, τ_0) — полной топологической группой, то G — простая конечная группа, а τ_0 — дискретная топология.*

Доказательство. Так как τ_0 является атомом в решетке всех групповых топологий на G, то (G, τ_0) — минимальная абелева группа. Поскольку (G, τ_0) — полная топологическая группа, согласно теореме 2.7.7 из [6] (G, τ_0) является компактной группой.

Из того, что τ_0 — атом в решетке всех групповых топологий на G, следует, что (G, τ_0) не содержит нетривиальных замкнутых подгрупп, ибо для любой нетривиальной замкнутой подгруппы A совокупность $\{V + A \mid V$ — окрестность нуля в $(G, \tau_0)\}$ как базис окрестностей нуля задает на G некоторую не антидискретную групповую топологию τ, причем $\tau_0 < \tau$. Тогда (G, τ_0) топологически изоморфна некоторой замкнутой подгруппе топологической группы $\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и, значит, либо $(G, \tau_0) = \mathbb{K}$, либо (G, τ_0) — конечная группа. Так как $\mathbb{K}$ имеет нетривиальные замкнутые подгруппы, то $(G, \tau_0) \neq \mathbb{K}$ и тем самым (G, τ_0) — конечная простая группа. Теорема доказана.

Предложение 6. *Пусть $\mathscr{M}$ — решетка всех групповых топологий на абелевой группе G. Если $\tau_0, \tau_1 \in \mathscr{M}$ — групповые топологии такие, что $\tau_1 \prec \tau_0$, то для любой топологии $\tau \in \mathscr{M}$ верны следующие утверждения:*

1) $\sup\{\tau_1, \tau\} \preceq \sup\{\tau_0, \tau\}$,

2) $\inf\{\tau_1, \tau\} \preceq \inf\{\tau_0, \tau\}$.

Доказательство утверждения 1. Допустим противное, т. е. пусть $\sup\{\tau_1, \tau\} < \tau' < \sup\{\tau_0, \tau\}$ для некоторой топологии $\tau' \in \mathscr{M}$. Тогда из модулярности решетки $\mathscr{M}$ следует, что

$$\tau_1 \leq \sup\{\inf\{\tau_0, \tau\}, \tau_1\} = \inf\{\tau_0, \sup\{\tau_1, \tau\}\} \\ \leq \inf\{\tau_0, \tau'\} \leq \inf\{\tau_0, \sup\{\tau_0, \tau\}\} = \tau_0.$$

Так как между топологиями τ_1 и τ_0 нет других топологий из $\mathscr{M}$, то $\tau_1 = \inf\{\tau_0, \tau'\}$ либо $\tau_0 = \inf\{\tau_0, \tau'\}$.

Если $\tau_0 = \inf\{\tau_0, \tau'\}$, то $\tau_0 \leq \tau'$ и так как $\tau \leq \sup\{\tau_1, \tau\} < \tau'$, имеем $\sup\{\tau_0, \tau\} \leq \tau'$. Получили противоречие с выбором топологии τ'.

Следовательно, $\tau_1 = \inf\{\tau_0, \tau'\}$. Тогда из модулярности решетки $\mathscr{M}$ вытекает, что

$$\sup\{\tau_1, \tau\} = \sup\{\sup\{\tau_1, \tau\}, \inf\{\tau', \tau_0\}\} \\ = \inf\{\tau', \sup\{\tau_0, \sup\{\tau_1, \tau\}\}\} = \inf\{\tau', \sup\{\tau_0, \tau\}\} = \tau';$$

противоречие с выбором топологии τ'. Следовательно, утверждение 1 полностью доказано.

Верность утверждения 2 следует из того, что оно в решетке $\mathscr{M}$ является двойственным к утверждению 1.

Следствие 7. *Пусть B — подгруппа абелевой группы G и $\mathscr{M}$ — решетка всех групповых топологий на G. Если $\tau_0, \tau_1 \in \mathscr{M}$ — групповые топологии такие, что $\tau_1 \prec \tau_0$ в решетке $\mathscr{M}$, то $\tau_1|_B \preceq \tau_0|_B$ в решетке всех групповых топологий на B.*

В самом деле, если τ — групповая топология на G такая, что совокупность $\{B\}$ является базисом окрестностей нуля (G, τ), то согласно предложению 6 $\sup\{\tau, \tau_1\} \preceq \sup\{\tau, \tau_0\}$ в решетке $\mathscr{M}$. Тогда, учитывая замечание 1, в решетке $\mathscr{M}$ имеем $\tau_1|_B = \sup\{\tau, \tau_1\} \preceq \sup\{\tau, \tau_0\} = \tau_0|_B$, а в решетке всех групповых топологий на B получаем $\tau_1|_B \preceq \tau_0|_B$.

Теорема 8. *Пусть τ_0 и τ_1 — групповые топологии на абелевой группе G, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, для которых $\tau_1 \prec \tau_0$. Если (G, τ_0) является отделимой группой, $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ — пополнение топологической группы (G, τ_0) и $\hat{\tau}_1 = \inf\{\tau_1, \hat{\tau}_0\}$ в решетке всех групповых топологий на $\widehat{G}$ (см. замечание 1), то верны следующие утверждения.*

1. В $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ существует такая конечная простая ненулевая подгруппа B, что $\hat{\tau}_1|_B$ является антидискретной топологией на B и для любого базиса окрестностей нуля $\{\widehat{V}_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ совокупность $\{(B + \widehat{V}_i) \cap G \mid i = 1, 2, \dots\}$ будет базисом окрестностей нуля в (G, τ_1).

2. Существует такое простое число p, что для любой окрестности V нуля в (G, τ_0) существует окрестность нуля U, для которой $p \cdot U \subseteq V$.

Доказательство утверждения 1. Поскольку $\tau_1 \prec \tau_0$ в решетке всех групповых топологий на G, то $\tau_1 \prec \tau_0$ в решетке всех групповых топологий на $\widehat{G}$. Согласно предложению 8 $\hat{\tau}_1 = \inf\{\tau_1, \hat{\tau}_0\} \preceq \inf\{\tau_0, \hat{\tau}_0\} = \hat{\tau}_0$. Так как $\hat{\tau}_1|_G \leq \tau_1|_G = \tau_1 \prec \tau_0 = \hat{\tau}_0|_G$, то $\hat{\tau}_1 \neq \hat{\tau}_0$ и, значит, $\hat{\tau}_1 \prec \hat{\tau}_0$ в решетке всех групповых топологий на $\widehat{G}$, причем $\hat{\tau}_1|_G = \tau_1$. Поскольку $\hat{\tau}_0$ и $\hat{\tau}_1$ — метризуемые топологии на $\widehat{G}$ и $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ — полная топологическая группа, из теорем 3 и 4 следует, что $(\widehat{G}, \hat{\tau}_1)$ является неотделимой топологической группой. Если $B = [\{0\}]_{(\widehat{G}, \hat{\tau}_1)}$, то B — ненулевая замкнутая подгруппа в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_1)$, причем $\hat{\tau}_1|_B$ является антидискретной топологией на B, т. е. $B \subseteq U + \widehat{V}$ для любых окрестностей нуля U в (G, τ_1) и $\widehat{V}$ в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$.

Так как $\hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_0$, то B — замкнутая подгруппа в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ и, значит, $(B, \hat{\tau}_0|_B)$ — полная топологическая группа.

Согласно следствию 7 $\hat{\tau}_1|_B \preceq \hat{\tau}_0|_B$ в решетке всех групповых топологий на B. Так как $\hat{\tau}_1|_B$ является антидискретной топологией, а $\hat{\tau}_0|_B$ — отделимой топологией, то $\hat{\tau}_1|_B \prec \hat{\tau}_0|_B$ в решетке всех групповых топологий на B. Тогда по теореме 5 B будет конечной простой группой.

Пусть теперь $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{\widehat{U}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{\widehat{V}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — базисы окрестностей нуля соответственно в (G, τ_1), $(\widehat{G}, \hat{\tau}_1)$, $(\widehat{G}, \tau_0)$, $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ и B — подгруппа, указанная выше в этой теореме.

Легко проверяется, что совокупность $\{(B + \widehat{V}_i) \cap G \mid i = 1, 2, \dots\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ') для некоторой групповой топологии τ' в G. Так как $V_i = \widehat{V}_i \cap G \subseteq (B + \widehat{V}_i) \cap G$ для любого $i \in \mathbb{N}$, то $\tau' \leq \tau_0$. Покажем, что $\tau' \neq \tau_0$. Пусть $0 \neq b \in B$. Из отделимости топологической группы $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ следует, что существует такое натуральное число n, что $\widehat{V}_n \cap (b + \widehat{V}_n) = \varnothing$. Так как G является плотной подгруппой в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$, то $G \cap (b + \widehat{V}_k) \neq \varnothing$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Если $a_k \in G \cap (b + \widehat{V}_k) \subseteq (B + \widehat{V}_k$, то $a_k \notin G \cap \widehat{V}_n) = V_n$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и, значит, $B + \widehat{V}_k \nsubseteq V_n$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\tau' \neq \tau_0$.

Кроме того, поскольку $U_i \subseteq G$ и

$$B + \widehat{V}_i \subseteq (U_i + \widehat{V}_i) + \widehat{V}_i \subseteq U_i + (\widehat{V}_i + \widehat{V}_i) \subseteq U_i + \widehat{V}_{i-1}$$

для любого $i \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned}(B + V_i) \cap G &\subseteq (U_i + \widehat{V}_{i-1}) \cap G \\ &= U_i + (\widehat{V}_{i-1} \cap G) = U_i + V_{i-1} \subseteq U_{i-1} + U_{i-1} \subseteq U_{i-2}\end{aligned}$$

для любого $i \in \mathbb{N}$, откуда $\tau' \geq \tau_1$.

Таким образом, $\tau_1 \leq \tau' < \tau_0$. Поскольку на группе G между топологиями τ_1 и τ_0 нет других групповых топологий, то $\tau_1 = \tau'$ и совокупность $\{(B + \widehat{V}_i) \cap G \mid i = 1, 2, \dots\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1). Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Если B — подгруппа в $\widehat{G}$, указанная в утверждении 1 настоящей теоремы, то $p \cdot B = 0$ для некоторого простого p. Если V — окрестность нуля в (G, τ_0), то $V_n \subseteq V$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $p \cdot \widehat{V}_k \subseteq \widehat{V}_n$. Тогда согласно утверждению 1 этой теоремы $G \cap (B + \widehat{V}_k)$ является окрестностью нуля в (G, τ_1), причем

$$p \cdot (G \cap (B + \widehat{V}_k)) \subseteq G \cap (p \cdot B + p \cdot \widehat{V}_k) \subseteq G \cap \widehat{V}_n = V_n \subseteq V.$$

Утверждение 2 и теорема полностью доказаны.

Теорема 9. *Пусть τ_0 — отделимая топология на абелевой группе G такая, что пополнение $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ топологической группы (G, τ_0) содержит ненулевую конечную простую подгруппу B. Тогда в решетке всех групповых топологий на группе G существует такая групповая топология τ_1, что верны следующие утверждения:*

1) $\tau_1 \prec \tau_0$;

2) (G, τ_0) *не имеет базиса окрестностей нуля, состоящего из замкнутых в* (G, τ_1) *множеств;*

3) *если* $B \cap G = \{0\}$, *то* τ_1 *является отделимой топологией.*

Доказательство. Пусть $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — некоторый базис симметричных замкнутых окрестностей нуля в (G, τ_0). Если $\widehat{V}_\gamma = [V_\gamma]_{(\widehat{G}, \hat{\tau})}$, то совокупность $\{\widehat{V}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$.

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ возьмем $U_\gamma = (\widehat{V}_\gamma + B) \cap G$. Совокупность $\{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ удовлетворяет условиям BN1–BN6 (см. [5, теорема 1.2.5]), тем самым как базис окрестностей нуля задает на G некоторую групповую топологию τ_1. Покажем, что τ_1 является искомой топологией.

Рассмотрим на группе $\widehat{G}$ дискретную топологию τ_0' и групповую топологию τ_1', для которой совокупность $\{B\}$ — базис окрестностей нуля. Так как B — конечная ненулевая простая группа, то $\tau_1' \prec \tau_0'$, причем легко заметить (см. определение топологии τ_1), что $\tau_1 = (\inf\{\tau_1', \hat{\tau}_0\})|_G$. Согласно теореме 6 и следствию 7

$$\tau_1 = (\inf\{\tau_1', \hat{\tau}_0\})|_G \preceq (\inf\{\tau_0', \hat{\tau}_0\})|_G = \hat{\tau}_0|_G = \tau_0.$$

Покажем теперь, что $\tau_1 \neq \tau_0$. Выберем некоторый ненулевой элемент $b \in B$. Тогда $(b + \widehat{V}_\gamma) \cap G \neq \varnothing$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Если $c_\gamma \in (b + V_\gamma) \cap G$, то

$$b \in c_\gamma - \widehat{V}_\gamma \subseteq ((b + \widehat{V}_\gamma) \cap G) + \widehat{V}_\gamma \subseteq U_\gamma + \widehat{V}_\gamma$$

для любого $\gamma \in \Gamma$, так что в решетке всех групповых топологий на $\widehat{G}$ топология $\inf\{\hat{\tau}, \tau_1\}$ неотделима. Так как $\inf\{\hat{\tau}_0, \tau_0\} = \hat{\tau}_0$ — отделимая топология, то $\tau_1 \neq \tau_0$ и $\tau_1 \prec \tau_0$. Утверждение 1 доказано.

Покажем верность утверждения 2. Допустим противное, т. е. что (G, τ_0) имеет базис окрестностей нуля, состоящий из замкнутых в (G, τ_1) множеств. Не ограничивая общности, можем считать, что каждое V_γ является замкнутым в (G, τ_1) множеством. Пусть $0 \neq b \in B$. Так как $\hat{\tau}_0$ — отделимая топология в $\widehat{G}$, существует такое $\gamma_0 \in \Gamma$, что $\widehat{V}_{\gamma_0} \cap (b + \widehat{V}_{\gamma_0}) = \varnothing$. Учитывая предложение 1.2.25 из [5] и то, что $V\gamma_0 \subseteq G$, получим

$$\begin{aligned} V_{\gamma_0} = [V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)} &= \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(V_{\gamma_0} + U_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(V_{\gamma_0} + ((\widehat{V}_\gamma + B) \cap G)) \\ &\supseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(V_{\gamma_0} + ((\widehat{V}_\gamma + b) \cap G)) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}((V_{\gamma_0} + \widehat{V}_\gamma + b) \cap G) \\ &= \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(V_{\gamma_0} + \widehat{V}_\gamma) + b\Big) \cap G = ([V_{\gamma_0}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} + b) \cap G = (\widehat{V}_{\gamma_0} + b) \cap G. \end{aligned}$$

Так как G является плотной подгруппой в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$, то $(\widehat{V}_{\gamma_0} + b) \cap G \neq \varnothing$. Тогда

$$\widehat{V}_{\gamma_0} \cap (b + \widehat{V}_{\gamma_0}) \supseteq V_{\gamma_0} \cap (b + \widehat{V}_{\gamma_0}) \neq \varnothing;$$

получили противоречие с выбором $\widehat{V}_{\gamma_0}$. Утверждение 2 доказано.

Пусть теперь $B \cap G = \{0\}$. Тогда

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma = \Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(\widehat{V}_\gamma + B)\Big) \cap G = ([B]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)}) \cap G = B \cap G = \{0\}$$

и τ_1 является отделимой топологией (см. [5, теорема 1.3.2]).

Теорема полностью доказана.

Теорема 10. *Пусть τ_0 и τ_1 — групповые топологии на абелевой группе G такие, что $\tau_1 \prec \tau_0$ и (G, τ_0) не имеет базиса окрестностей нуля, которые являются замкнутыми множествами в (G, τ_1). Если (G, τ_0) — отделимая топологическая группа и $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ — пополнение топологической группы (G, τ_0), то в $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ имеется такая конечная простая ненулевая подгруппа D, что верны следующие утверждения:*

(A) *если $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — базис окрестностей нуля в (G, τ_0) и $\widehat{V}_\gamma = [V_\gamma]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)}$, то совокупность $\{(D + \widehat{V}_\gamma) \cap G \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1);*

(Б) *если (G, τ_1) — отделимая топологическая группа, то $D \cap G = \{0\}$.*

Доказательство. 1. Заметим, что совокупность $\{[V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1). В самом деле, легко проверить, что совокупность $\{[V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ удовлетворяет условиям BN1–BN6 (см. [5, теорема 1.2.5]) и как базис окрестностей нуля задает на G некоторую групповую топологию τ. Так как $V_\gamma \subseteq [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}$ для любого $\gamma \in \Gamma$, то $\tau \leq \tau_0$. Из того, что $\tau_1 \leq \tau_0$ и (G, τ_1) обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из замкнутых множеств в (G, τ_1), следует, что $\tau_1 \leq \tau$ и, значит, $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$. Ввиду того, что (G, τ_0) не имеет базиса окрестностей нуля, состоящего из замкнутых множеств в (G, τ_1), имеем $\tau < \tau_0$. Поскольку $\tau_1 \prec \tau_0$, то $\tau_1 = \tau$ и совокупность $\{[V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1).

2. Так как $\tau_1 \prec \tau_0$, то (G, τ_0) обладает симметричной окрестностью нуля V_0, которая не является окрестностью нуля в (G, τ_1). Существует такая последовательность $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots$ симметричных окрестностей нуля в (G, τ_0), что $V_{i+1} + V_{i+1} \subseteq V_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Согласно [5, теорема 1.2.5] совокупности $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и $\{[V_i]_{(G,\tau_1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, взятые в качестве базисов окрестностей нуля, задают на G некоторые групповые топологии τ'_0 и τ'_1 соответственно, причем $\tau'_0 = \inf\{\tau'_0, \tau_0\}$ и $\tau'_1 \leqslant \inf\{\tau'_0, \tau_1\}$. Так как совокупность $\{V_i + [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid i \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в $(G, \inf\{\tau'_0, \tau_1\})$, то $\inf\{\tau'_0, \tau_1\} \leqslant \tau'_1$, откуда $\inf\{\tau'_0, \tau_1\} = \tau'_1$.

Согласно предложению 6 $\tau'_1 = \inf\{\tau'_0, \tau_1\} \preceq \inf\{\tau'_0, \tau_0\} = \tau'_0$. Поскольку V_0 не окрестность нуля в (G, τ_1), а каждое из множеств $[V_i]_{(G,\tau_1)}$ — окрестность нуля в (G, τ_1), то V_0 не окрестность нуля в (G, τ'_1) и тем самым $\tau'_0 \neq \tau'_1$, а потому $\tau'_1 \prec \tau'_0$.

3. Пусть $H = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i$ и $\varphi : G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Если $(G/H, \bar\tau_0) = (G, \tau'_0)/H$ и $(G/H, \bar\tau_1) = (G, \tau'_1)/H$, то $(G/H, \bar\tau_0)$ является отделимой топологической группой. Легко проверяется, что $\bar\tau_1 \prec \bar\tau_0$, т. е. топологии $\bar\tau_1$ и $\bar\tau_0$ удовлетворяют условиям теоремы 8. Пусть $\overline{B}$ — конечная простая ненулевая подгруппа в пополнении $(\widetilde{G/H}, \tilde\tau_0)$ топологической группы $(G/H, \bar\tau_0)$, указанная в теореме 8.

Если $\widetilde{V}_i = [\varphi(V_i)]_{(\widetilde{G/H}, \tilde\tau_0)}$, то совокупность $\{\widetilde{V}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ является базисом окрестностей нуля в $(\widetilde{G/H}, \tilde\tau_0)$, а совокупность $\{(\overline{B} + \widetilde{V}_i) \cap (G/H) \mid i \in \mathbb{N}\}$ — базисом окрестностей нуля в $(G/H, \bar\tau_1) = (G, \tau'_1)/H$. Так как $H \subseteq V_i \subseteq [V_i]_{(G,\tau_1)}$ для любого $i \in \mathbb{N}$, то совокупность

$$\{\varphi^{-1}((\overline{B} + \widetilde{V}_i) \cap (G/H)) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

— базис окрестностей нуля в (G, τ'_1). Поскольку $\tau'_1 \leq \tau_1$, совокупность

$$\{(\varphi^{-1}((\overline{B} + \widetilde{V}_i) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid i \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma\}$$

является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1).

4. Множество V_0 не является окрестностью нуля в (G, τ_1) (см. выбор V_0), так что $\tau_1 < \sup\{\tau_1, \tau'_0\} \leq \tau_0$, а ввиду $\tau_1 \prec \tau_0$ имеем $\sup\{\tau_1, \tau'_0\} = \tau_0$, так что совокупность $\{V_i \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_0).

5. Так как V_0 не является окрестностью нуля в (G, τ_1) (см. выбор V_0) и для любых $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$ множество

$$(\varphi^{-1}((\overline{B} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}$$

является окрестностью нуля в (G, τ_1) (см. конец доказательства п. 3), то

$$(\varphi^{-1}((\overline{B} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \nsubseteq V_0.$$

Из конечности группы $\overline{B}$ следует существование такого ненулевого элемента $\bar{b} \in \overline{B}$, что

$$(\varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \nsubseteq V_0$$

для любых $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$. Зафиксируем этот ненулевой элемент $\bar{b} \in \overline{B}$.

6. Для любых $\gamma \in \Gamma$ и $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$F_{\gamma,k} = (\varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}$$

и покажем, что совокупность $\mathscr{F} = \{F_{\gamma,k} \mid \gamma \in \Gamma,\ k \in \mathbb{N}\}$ является базисом некоторого фильтра Коши в (G, τ_0).

Так как

$$F_{\gamma,k} = (\varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \nsubseteq V_0,$$

то $F_{\gamma,k} \neq \varnothing$ для любых $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$. Поскольку из того, что $\widetilde{V}_{k_1} \subseteq \widetilde{V}_{k_0}$ и $V_{\gamma_1} \subseteq V_{\gamma_0}$, следует, что $F_{\gamma_1,k_1} \subseteq F_{\gamma_0,k_0}$, совокупность $\mathscr{F}$ является базисом некоторого фильтра Φ в G.

Покажем теперь, что Φ является фильтром Коши в (G, τ_0).

В самом деле, пусть V — произвольная окрестность нуля в (G, τ_0). Согласно п. 4 настоящего доказательства существуют такие $k \in \mathbb{N}$ и $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$, что $V_k \cap [V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)} \subseteq V$ и $V_{\gamma_1} - V_{\gamma_1} \subseteq V_{\gamma_0}$. Тогда

$$\begin{aligned}
F_{k+1,\gamma_1} - F_{k+1,\gamma_1} &= (\varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_{k+1}) \cap (G/H))) \cap [V_{\gamma_1}]_{(G,\tau_1)} \\
&\quad - (\varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_{k+1}) \cap (G/H))) \cap [V_{\gamma_1}]_{(G,\tau_1)} \\
&\subseteq (\varphi^{-1}((\widetilde{V}_{k+1} - \widetilde{V}_{k+1}) \cap (G/H))) \cap ([V_{\gamma_1}]_{(G,\tau_1)} - [V_{\gamma_1}]_{(G,\tau_1)}) \\
&\subseteq (\varphi^{-1}(\widetilde{V}_k \cap (G/H))) \cap ([V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)}) \\
&= (\varphi^{-1}([\varphi(V_k)]_{(\widetilde{G/H},\widetilde{\tau}_0)} \cap (G/H))) \cap ([V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)}) \\
&= (\varphi^{-1}(\varphi(V_k))) \cap ([V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)}) = V_k \cap [V_{\gamma_0}]_{(G,\tau_1)} \subseteq V_{\gamma_0} \subseteq V.
\end{aligned}$$

7. Так как $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ — полная топологическая группа, то $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} [F_{k,\gamma}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} \neq \varnothing$. Пусть $d \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} [F_{k,\gamma}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} \neq \varnothing$ и D — подгруппа в $\widehat{G}$, порожденная элементом d. Покажем, что D является искомой подгруппой.

8. Так как $\overline{B}$ — простая ненулевая группа, то $p \cdot \bar{b} = 0$ для некоторого простого числа p. Учитывая п. 4 настоящего доказательства, получим

$$\begin{aligned}
p \cdot d &\in \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} [p \cdot F_{k,\gamma}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} ((p \cdot \varphi^{-1}((\bar{b} + \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [p \cdot V_\gamma]_{(G,\tau_1)}) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} ((\varphi^{-1}((p \cdot \bar{b} + p \cdot \widetilde{V}_k) \cap (G/H))) \cap [p \cdot V_\gamma]_{(G,\tau_1)}) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} ((\varphi^{-1}(\widetilde{V}_k) \cap (G/H)) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}) \\
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} ((\varphi^{-1}(\varphi(V_k))) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N},\gamma\in\Gamma} (V_k \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma = \{0\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, D является простой ненулевой подгруппой в $(\widehat{G}, \hat{\tau})$.

9. Легко проверить, что совокупность $\{(D + \widehat{V}_\gamma) \cap G \mid \gamma \in \Gamma\}$ удовлетворяет условиям BN1–BN6 (см. [5, теорема 1.2.5]) и как базис окрестностей нуля задает на G некоторую групповую топологию τ'. Тогда $\tau_0 \geqslant \sup\{\tau', \tau_1\}$.

Так как $(\widehat{G}, \hat{\tau}_0)$ является отделимой топологической группой, то существует такое $\gamma_1 \in \Gamma$, что $d \notin \widehat{V}_{\gamma_1} - \widehat{V}_{\gamma_1}$, поэтому $(d + \widehat{V}_{\gamma_1}) \cap \widehat{V}_{\gamma_1} = \varnothing$. Кроме того, для любого $\gamma \in \Gamma$

$$d \in [F_{1,\gamma}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} \subseteq [[V_\gamma]_{(G,\tau_1)}]_{(\widehat{G},\hat{\tau}_0)} \subseteq [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + \widehat{V}_\gamma$$

и

$$(d + \widehat{V}_\gamma) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} = (d - \widehat{V}_\gamma) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \neq \varnothing.$$

Тогда $(d + \widehat{V}_\gamma) \cap [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} \nsubseteq V_{\gamma_1}$ и, значит, $\tau_0 > \sup\{\tau', \tau_1\}$. Так как по условию теоремы $\tau_1 \prec \tau_0$, то $\tau_1 = \sup\{\tau', \tau_1\}$. Аналогично ввиду (см. теорему 9, п. 1) $\tau' \prec \tau_0$ имеем $\tau' = \sup\{\tau', \tau_1\}$, т. е. $\tau_1 = \tau'$, и совокупность $\{(D + \widehat{V}_\gamma) \cap G \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1).

Утверждение А доказано.

Так как $d \in [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + \widehat{V}_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, из конечности D следует, что $D \subseteq [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + \widehat{V}_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$D \cap G \subseteq ([V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + \widehat{V}_\gamma) \cap G = [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + (\widehat{V}_\gamma \cap G) = [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} + V_\gamma = [V_\gamma]_{(G,\tau_1)}$$

для любого $\gamma \in \Gamma$. Поскольку τ_1 — отделимая топология, имеем

$$D \cap G \subseteq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} [V_\gamma]_{(G,\tau_1)} = \{0\}.$$

Утверждение Б и теорема полностью доказаны.

Теорема 11. *Если τ_0 и τ_1 — отделимые групповые топологии на абелевой группе G такие, что $\tau_1 \prec \tau_0$ и (G, τ_0) является полной топологической группой, то (G, τ_0) обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из замкнутых в (G, τ_1) множеств.*

Доказательство. Допустим противное: (G, τ_0) не обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из замкнутых в (G, τ_1) множеств. Тогда согласно предыдущей теореме в топологической группе $(\widehat{G}, \hat{\tau}) = (G, \tau)$ существует такая ненулевая конечная подгруппа B, что для любого базиса окрестностей нуля $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ в (G, τ_0) совокупность $\{(\widehat{V}_\gamma + B) \cap G \mid \gamma \in \Gamma\}$ является базисом окрестностей нуля в (G, τ_1). Так как (G, τ_0) — полная топологическая группа, то $\widehat{G} = G$ и $\widehat{V}_\gamma = V_\gamma$. Тогда

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} ((\widehat{V}_\gamma + B) \cap G) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (\widehat{V}_\gamma + B) = B \neq \{0\};$$

получили противоречие с тем, что топология τ_1 отделима.

Замечание. Теорема 11 обобщает теорему 4 (в теореме 11 не требуется метризуемости топологий, но ее доказательство использует теорему 10, доказательство которой использует теорему 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнаутов В. И., Филиппов К. М.* О предмаксимальных топологиях на векторных пространствах // Bul. Acad. Ştiinţe Republicii Moldova. Matematica. 1996. V. 1, N 20. P. 96–105.
2. *Арнаутов В. И., Филиппов К. М.* О максимальных цепях в решетке модульных топологий // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 42, № 3. С. 491–506.
3. *Arnautov V. I., Filippov K. M.* On coverings in the lattice of linear topologies // Bul. Acad. Ştiinţe Republicii Moldova. Matematica. 1999. V. 2, N 30. P. 7–16.

4. *Arnautov V. I., Filippov K. M.* On coverings in the lattice on a group of finite period // Bul. Acad. Ştiinţe Republicii Moldova. Matematica. 2002. V. 2. P. 77–87.

5. *Arnautov V. I., Glavatski S. T., Michalev A. V.* Introduction to the theory of topological rings and modules. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker inc., 1996.

6. *Dikranjan D. N., Prodanov I. R., Stoyanov L. N.* Topological groups. New York; Basel: Marcel Dekker inc., 1989.

Статья поступила 9 марта 2005 г.

Арнаутов Владимир Иванович
Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова,
str. Academiei, 5, Chişinău, MD-2012, Moldova,
`arnautov@math.md`