Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2006. Том 47, № 6

УДК 519.21+(517.9+518.61):532+519.6

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА СТОКСА В ОБЛАСТИ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. В. Юринский

Аннотация: Рассматривается локализация главного собственного числа (ГСЧ) оператора Стокса при условии Дирихле в области со случайной мелкозернистой границей. Область течения содержится в кубе растущего объема. Статистические свойства случайной микроструктуры одинаковы во всех кубических ячейках единичного размера, а ее существенные характеристики независимы в отдельных ячейках. В этих условиях асимптотика ГСЧ при неограниченном увеличении содержащего область течения куба оказывается детерминированной: можно указать неслучайные верхнюю и нижнюю границы, которые заключают ГСЧ с вероятностью, сходящейся к единице. Ранее автором было доказано, что в плоском случае неслучайные односторонние границы для ГСЧ могут быть выбраны асимптотически эквивалентными — это означает сходимость ГСЧ к неслучайному пределу по вероятности при надлежащей нормировке. В статье обосновывается существование предела для течений Стокса в пространствах более высоких размерностей.

Ключевые слова: оператор Стокса, главное собственное число, случайные пористые среды, случайная шахматная структура, асимптотика большого объема.

§ 1. Введение

Статья посвящена стоксовским течениям в пористой среде. Рассматриваемые соленоидальные поля скоростей принадлежат пространству Соболева $\mathbf{H}_0^1(F_t)$, где область

$$F_t = \widehat{Q}_t^0 \backslash S, \quad \widehat{Q}_t^0 = (-t/2, t/2)^d \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

дополняет случайное замкнутое множество S, моделирующее «скелет» пористой среды. Рассматриваемая среда является, по существу, так называемой «случайной шахматной структурой». Все используемые в вычислениях характеристики замкнутых множеств

$$S_z = S \cap (z + Q^0) \tag{1.2}$$

предполагаются статистически независимыми для различных кубических ячеек $z + Q^0 = \{x : x - z \in Q^0\}$, $z \in \mathbb{Z}^d$, $Q^0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$, а их распределения не зависят от «номера ячейки» z.

Работа написана при поддержке фонда FCT(PORTUGAL) через Centro de Matemática UBI, Projecto DECONT — Differential Equations of Continuum Mechanics.

Обозначим через $\|\cdot\|_2$ норму в пространстве L^2. Известная вариационная характеризация главного собственного числа (ГСЧ) оператора Стокса (см. [1, § 1.8; 2, § 6.5]) выражает его через минимальное рэлеевское отношение:

$$\mathfrak{S}_t = \inf\bigl\{\|\phi\|_2^{-2}\|\nabla\phi\|_2^2 : \mathrm{div}(\phi) = 0, \phi \in \mathbf{H}_0^1(F_t)\bigr\}. \tag{1.3}$$

Цель этой статьи — показать, что нормализованное ГСЧ $(\ln t)^{2/d}\mathfrak{S}_t$ формулы (1.3) сходится по вероятности к неслучайному пределу при $t \to \infty$ в размерностях $d > 2$. При $d = 2$ сходимость установлена ранее [3]. Основной результат работы — оценка ГСЧ $\mathfrak{S}_t$ сверху, которая асимптотически эквивалентна нижнему доверительному пределу, полученному в [3] для более общей модели случайной пористой среды. Указанные односторонние оценки определяют для $(\ln t)^{2/d}\mathfrak{S}_t$ произвольно узкий доверительный интервал, накрывающий предельное значение $(\ln t)^{2/d}\mathfrak{S}_t$ с вероятностью, сходящейся к единице при $t \to \infty$.

Интерес к локализации ГСЧ оператора со случайными элементами возник первоначально в физике и физической химии неупорядоченных неоднородных сред, где эта характеристика может интерпретироваться как скорость поглощения частицы, диффундирующей в среде со случайно расположенными «ловушками», типичное время релаксации и т. п. (см., например, [4, 5] и приведенную там библиографию).

Строгие результаты о локализации ГСЧ эллиптического оператора в присутствии случайной мелкозернистой границы с условием Дирихле или неотрицательного случайного потенциала восходят к работам Шнитмана (см. [4, 5]), где детерминированное предельное поведение ГСЧ было обнаружено для операторов Лапласа и Шредингера при достаточно общих предположениях о случайных элементах задачи. Эффекты, обусловливающие детерминированное асимптотическое поведение ГСЧ при росте объема области, в известном смысле противоположны усреднению. Локализацию ГСЧ определяют флуктуации случайных полей, задающих случайную границу или потенциал.

Вывод оценки сверху составляет наиболее легкую часть известных доказательств сходимости нормализованного ГСЧ оператора Лапласа к неслучайному пределу (при использовании как метода увеличения включений [4–7], так и позднейшего метода [8–10], основанного на анализе асимптотики ГСЧ вспомогательной задачи с малым потенциалом). Для постановки задачи, описанной в (1.1), (1.2), соответствующее рассуждение сводится к оценке максимального объема области фиксированной формы, содержащегося в F_t при типичной конфигурации среды.

Для оператора Стокса построение верхней границы для ГСЧ усложняется необходимостью проверки того, что типичная конфигурация случайной области течения допускает существование соленоидальных пробных функций с достаточно малыми рэлеевскими отношениями.

Как в плоском случае, так и при размерности $d > 2$ соленоидальные функции из $\mathbf{H}_0^1(\widehat{Q}_t^0)$ могут быть приближены соленоидальными функциями с компактным носителем, содержащимся в области течения, без существенного изменения рэлеевского отношения. При этом построение пробных функций с желаемыми свойствами в пространственном случае существенно иное, чем использованное в [3] для $d = 2$.

1.1. Основной результат. В используемой ниже модели пористой среды скелет состоит из изолированных твердых включений с регулярной «мажорантой». Характеристическая функция твердой фазы с вероятностью 1 удовлетворяет неравенству

$$\forall x \quad 1_S(x;\omega) \le \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon_z(\omega) 1_W(x-z), \tag{1.4}$$

где $\varepsilon_z(\omega) \in \{0,1\}$ — случайные величины, а замкнутое подмножество открытой единичной ячейки $W \subset Q^0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^d$ имеет положительную лебегову меру $|W| > 0$. Таким образом, каждое множество S_z в (1.2) или пусто, или содержится в $z + W = \{x : x - z \in W\}$.

Случайные величины ε_z независимы и одинаково распределены,

$$0 < p = \mathbf{P}\{\varepsilon_z = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\varepsilon_z = 1\} < 1. \tag{1.5}$$

Множество W в условии (1.4) таково, что существует ограниченный линейный оператор $\mathscr{B}_W$, который отображает $L^2(Q^0\backslash W) \cap \{\int_{Q^0\backslash W} f(x)\,dx = 0\}$ в $\mathbf{H}^1_0(Q^0\backslash W)$, разрешает уравнение $\operatorname{div}(\mathscr{B}_W f) = -f$ и удовлетворяет условию

$$\int_{Q^0\backslash W} (|\nabla \mathscr{B}_W f|^2 + |\mathscr{B}_W f|^2) \le c_W \int_{Q^0\backslash W} f^2, \tag{1.6}$$

где константа c_W определяется выбором W. (Оператор $\mathscr{B}_W$ из (1.6) существует для множеств с локально липшицевой границей, см. [11] или [12, § III.3].)

Модели пористой среды с твердой фазой, состоящей из изолированных включений, достаточно обычны в задачах усреднения течений в периодических или случайных пористых средах (см., например, [13][1)] или [14, 15]). Эти модели удобнее для анализа, чем рандомизированные варианты известных периодических микроструктур [16], в которых связны и область течения, и ее дополнение.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* (1.4)–(1.6), *то при* $d \ge 3$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{(\ln t)^{2/d} \mathfrak{S}_t < ((1/d)\ln(1/p))^{2/d} \mathscr{S} + \varepsilon\} = 1, \tag{1.7}$$

где

$$\mathscr{S} = \inf\bigl\{\|\phi\|_2^{-2} \|\nabla\phi\|_2^2 : \operatorname{div}(\phi) = 0,\ |\{|\phi| > 0\}| = 1,\ \phi \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)\bigr\}. \tag{1.8}$$

Величина $\mathscr{S}$ может быть выражена через рэлеевские отношения течений слабо сжимаемой жидкости [3]:

$$\mathscr{S} = \lim_{\alpha\to 0+} \mathscr{C}_\alpha, \quad \mathscr{C}_\alpha = \inf\bigl\{\|\phi\|_2^{-2} \mathscr{K}_\alpha(\phi) : |\{|\phi| > 0\}| = 1\bigr\}, \tag{1.9}$$

где $\mathscr{K}_\alpha(\phi) = \|\nabla\phi\|_2^2 + (1/\alpha)\|\operatorname{div}(\phi)\|_2^2 = \int K_\alpha(\phi)$, векторнозначные пробные функции принадлежат $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ и

$$K_\alpha(\phi(x)) = |\nabla\phi(x)|^2 + (1/\alpha)(\operatorname{div}(\phi(x)))^2.$$

Эвристически величину $\mathscr{C}_\alpha$ можно интерпретировать как наименьшее возможное значение главного собственного числа оператора $\phi \mapsto -\Delta\phi - (1/\alpha)\nabla\operatorname{div}(\phi)$ при условии Дирихле на границе произвольной области единичной меры. При изменении масштаба наименьшее ГСЧ выражается формулами

$$\begin{gathered}\inf\bigl\{\|\phi\|_2^{-2} \mathscr{K}_\alpha(\phi) : |\{|\phi| > 0\}| = u\bigr\} = u^{-2/d} \mathscr{C}_\alpha,\\ \inf\bigl\{\|\phi\|_2^{-2} \|\nabla\phi\|_2^2 : \operatorname{div}(\phi) = 0, |\{|\phi| > 0\}| = u\bigr\} = u^{-2/d} \mathscr{S}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

[1)] Приложение «Поток несжимаемой жидкости в пористой среде — сходимость процесса усреднения» по наброску Л. Тартара.

При одновременном выполнении условий (1.4)–(1.6) и условий теоремы 1.1 из [3] имеет место сходимость нормализованного ГСЧ к неслучайному пределу:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|(\ln t)^{2/d}\mathfrak{S}_t - ((1/d)\ln(1/p))^{2/d}\mathscr{S}| < \varepsilon\} = 1.$$

Теорема 1.1 доказывается в § 2. Доказательство основано на возможности найти (для всякого достаточно большого значения t и типичной конфигурации случайной среды) пробную функцию с носителем, содержащимся в области течения F_t, которая имеет рэлеевское отношение (1.8), достаточно близкое к $\mathscr{S}$.

Соотношение (1.7) доказано для $d = 2$ при слегка иных условиях в [3] с помощью рассуждения, которое применимо в условиях теоремы 1.1. Доказательство для плоского случая основано на возможности ограничиться в определении (1.8) пробными функциями с компактными носителями. Эта возможность не установлена для более высоких размерностей.

1.2. Предварительные сведения. Точки $\mathbb{R}^d$ и их координаты обозначаются через $x = (x_j)$, скалярное произведение и евклидова норма — через $x\cdot y = \sum x_j y_j$ и $|x| = \sqrt{x\cdot x}$. Еще одна норма обозначается через $|x|_* = \max_j |x_j|$, а соответствующее расстояние от точки до множества — через

$$\mathrm{Dist}(x, B) = \inf\{\max_j |x_j - y_j| : y \in B\}.$$

Для тензоров $a = (a_{jk}, j, k = 1, \ldots, d) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ норма $|a| = (a : a)^{1/2}$ соответствует произведению $a : b = \sum\limits_{j,k=1}^{d} a_{jk}b_{jk}$ тензоров $a, b \in \mathbb{R}^{d\times d}$.

Множества, которые получаются сдвигами и изменением масштаба, обозначаются через

$$a + \alpha G = \{x \in \mathbb{R}^d : x = a + \alpha y, y \in G\}, \quad a \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{R},\ G \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Обозначения $Q = \left(-\frac12, \frac12\right]^d$, $Q^0 = \left(-\frac12, \frac12\right)^d$, $\overline{Q} = \left[-\frac12, \frac12\right]^d$ неизменно относятся к единичным кубам. Целочисленная решетка $\mathbb{R}^d$ обозначается через $\mathbb{Z}^d$.

Если множество S конечно, то $\#(S)$ — число его элементов, $|A|$ — лебегова мера $A \subset \mathbb{R}^d$.

Для функции $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ координаты градиента и его норма суть $\nabla_j\psi = (\partial/\partial_j)\psi$ и $|\nabla\psi| = \left(\sum\limits_{j=1}^{d}(\nabla_j\psi)^2\right)^{1/2}$. Для векторнозначных функций обозначения аналогичны: если $\phi = (\phi^{(j)})$ принимает значения из $\mathbb{R}^d$, то

$$|\nabla\phi|^2 = \sum_{j,k=1}^{d}(\nabla_j\phi^{(k)})^2.$$

Обозначение дивергенции $\mathrm{div}(\phi)$ или $\nabla\cdot\phi$. Обозначения интегралов часто сокращены: $\int\limits_G f(x)\,dx$ может быть сокращено до $\int\limits_G f$ или $\int f$, если контекст исключает непонимание.

Символы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ обозначают вероятности и математические ожидания на вероятностном пространстве $\langle\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}\rangle$; как обычно,

$$\mathbf{E}\{\xi; A\} = \mathbf{E}\xi\mathbf{1}_A = \int\limits_A \xi(\omega)d\mathbf{P}(\omega).$$

Обозначения функциональных пространств следуют [1] или [12]. Для $G \subseteq \mathbb{R}^d$ пространства скалярных или векторнозначных суммируемых функций обозначаются через $L^p(G)$, а $\|\cdot\|_p$ или $\|\cdot\|_{L^p(G)}$ — соответствующая норма. Если G — ограниченное открытое множество, то пространство Соболева $H^1_0(G)$ есть замыкание в норме $\|\phi\|_{H^1} = \left(\|\phi\|_2^2 + \|\nabla\phi\|_2^2\right)^{1/2}$ пространства $C_0^\infty(G)$ скалярных гладких функций с компактным носителем в G. Его аналог для векторнозначных функций обозначается через $\mathbf{H}^1_0(G)$, и аналогично [1, § 1.1.4] пространство соленоидальных полей на G определено как $\mathbf{V}(G) = \{\phi \in \mathbf{H}^1_0(G) : \operatorname{div}(\phi) = 0\}$. Пространства $H^1(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ являются замыканиями множества гладких и векторнозначных функций с компактными носителями в норме $\|\phi\|_{H^1}$.

В вычислениях используется классическое мультипликативное неравенство для пространства Соболева $H^1_0(G)$ (см. [17, § II.2]):

$$\|\phi\|_{2/(1-2/d)} \le C(d)\|\nabla\phi\|_2, \quad d \ge 3. \tag{1.11}$$

Обозначения $c, c_i, \hat{c}$ и т. п. относятся к положительным константам. Если не ставится цели найти их числовые значения, одно и то же обозначение может в зависимости от контекста относиться к разным величинам. Неявные «равенства» $c + c = c$, $c \cdot c = c$ и т. п. означают, что значение новой константы, возникшей в вычислениях, определяется теми же параметрами, что и значения их предшественниц.

1.3. Блочные приближения множеств.

Построение блочного приближения. Ниже множество E конечной лебеговой меры $|E|$ приближается множеством U, представляющим из себя объединение кубических «блоков» нескольких стандартных размеров. Использованная для этого конструкция является упрощенным вариантом соответствующего построения [3, лемма 3.3].

Выберем нечетное натуральное число T и вещественное число $H_0 > 0$ (впоследствии T будет велико). Эти параметры определяют иерархию масштабов и разбиений пространства $\mathbb{R}^d = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^d} C^k_z$ на равные кубы

$$C^k_z = H_k(z + Q), \quad H_k = T^k H_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.12}$$

Ниже кубы наименьшего размера C^0_z называются *ячейками*, а C^k_z — *блоками* уровня $k > 0$. Каждый блок C^{k+1}_z является объединением T^d подблоков $C^k_\zeta \subset C^{k+1}_z$ без общих точек.

На каждом уровне k кубы C^k_z разделяются на два класса в зависимости от доли объема, которую покрывает E. Классификация определяется еще одним параметром $\gamma \in (0, 1)$. Блок C^k_z называется «пустым», если его номер z принадлежит множеству

$$\mathbb{E}_k = \left\{z : \left|C^k_z\right|^{-1}\left|C^k_z \cap E\right| > 1 - \gamma\right\}. \tag{1.13}$$

Соответствующие «массивные» множества в $\mathbb{R}^d$ — объединения блоков $E^+_k = \bigcup_{z\in\mathbb{E}_k} C^k_z$ и $E_k = E \cap E^+_k$. Поскольку мера $|E|$ конечна, $\mathbb{E}_k = \varnothing$ для достаточно большого k. Очевидно, $\bigcup_{k\ge 0} E_k \subseteq E$ и $|E_k| \le |E^+_k| \le (1-\gamma)^{-1}|E_k|$.

Определим множества

$$\Psi_k = \bigcup_{\ell\ge k} E^+_\ell, \quad \Phi_k = E^+_k \backslash \Psi_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.14}$$

По построению множества Φ_k не имеют общих точек, каждое множество Φ_k является объединением пустых блоков уровня k, а Ψ_k — объединением непересекающихся пустых блоков C^ℓ_ζ, $\ell \geq k$, поэтому

$$|\Phi_k| \leq (1-\gamma)^{-1}|\Phi_k \cap E|, \quad |\Psi_k| \leq (1-\gamma)^{-1}|E|.$$

Для каждого k дополнение Ψ_k покрывается непустыми блоками уровня k, потому что все пустые кубы этого и более высоких уровней содержатся в Φ_l, $l \geq k$.

Чтобы определить множество U, используются еще параметры $K^* \in \mathbb{N}$ и $m_0 \in \mathbb{N}$ (последний выбирается так, что $m_0 < T$).

Пусть $k_0 \in \{0, 1, \dots, K^*\}$ — самый низкий уровень, для которого

$$|\Phi_{k_0} \cap E| \leq |E|/(K^*+1), \quad |\Phi_{k_0}| \leq (1-\gamma)^{-1}|E|/(K^*+1). \tag{1.15}$$

(Существование такого уровня следует из неравенства $\sum\limits_{k=0}^{K^*} |\Phi_k \cap E| \leq |E|$.) Множество U выбирается как $m_0 H_{k_0}$-окрестность множества Ψ_{k_0}, определенного в (1.14):

$$U = \{x : \mathrm{Dist}(x, \Psi_{k_0}) \leq m_0 H_{k_0}\}. \tag{1.16}$$

Его мера допускает простую оценку через меру исходного множества E. Если точка U удалена не более чем на $m_0 H_{k_0}$ от некоторого пустого блока $C^\ell_\zeta \subset \Psi_{k_0}$, $\ell > k$, размером $H_\ell = T^{\ell - k_0} H_{k_0}$, то она принадлежит большему кубу $(1 + cm_0/T)H_\ell(\zeta + Q)$, мера которого $(1+cm_0/T)^d |C^\ell_\zeta|$. Объем множества Φ_{k_0} мал (см. (1.15)), и его $m_0 H_{k_o}$-окрестность не может иметь объем более $(2m_0+1)^d|\Phi_{k_0}|$. Следовательно,

$$|U| \leq \left(1 + c' \frac{m_0}{T}\right) |\Psi_{k_0}| + c'' \frac{m_0^d |E|}{(K^*+1)(1-\gamma)}. \tag{1.17}$$

Это неравенство будет использоваться в ситуации, где параметры удовлетворяют условию

$$m_0/T < \gamma, \quad m_0^d/(K_*+1) < \gamma. \tag{1.18}$$

В этом случае существуют положительные константы c_i такие, что при $\gamma < c_0$

$$|U| \leq \left(1 + c_1 \left(\frac{m_0}{T} + \frac{m_0^d}{K^*+1}\right)\right) \frac{|E|}{1-\gamma} \leq (1 + c_2\gamma)|E|. \tag{1.19}$$

Срезка для блочного приближения. Впоследствии будет нужно заменять функциями, обращающимися в нуль вне множества U формулы (1.16), пробные функции ψ из $\mathbf{H}^1$, определенные на большем множестве. Замена будет производиться в ситуации, где легко контролировать L^2-норму ψ на непустых кубах любого уровня.

В качестве инструмента при выводе необходимых оценок используется частный случай неравенства Пуанкаре — Фридрихса (см. [6, предложение 3.1]; доказательство можно найти также в [7]). Пусть множество Q^+ выпукло, а Q^0 — его подмножество положительной лебеговой меры. Если ϕ — функция из H^1, определенная на Q^+, $Q^1 \subseteq Q^+$ и $|Q^1|/|Q^0| \leq \alpha_*^d$, то

$$\int\limits_{Q^1} |\phi(x)|^2\,dx \leq 2\alpha_*^d \int\limits_{Q_0} |\phi(x)|^2\,dx + \rho^2(Q^+)C(\alpha_*) \int\limits_{Q^+} |\nabla\phi(x)|^2\,dx, \tag{1.20}$$

здесь $\rho(Q^+)$ обозначает диаметр Q^+, причем константа в неравенстве допускает оценку $C(\alpha_*) \le c(d)\max\{\alpha_*, \alpha_*^{d-1}\}$, где $c(d)$ зависит только от размерности d.

Предположим, что куб $Q^+ = C_z^{k_0}$, $z \notin \mathbb{E}_{k_0}$, непуст (см. (1.13)), $Q^0 = Q^+ \backslash E$, $Q^1 = Q^+ \cap E$, а величина $\alpha_*^d = (1-\gamma)/\gamma$ велика. В этом случае из (1.20) следует, что

$$\int\limits_{Q^+} |\phi(x)|^2\,dx \le \frac{c}{\gamma}\biggl(\int\limits_{Q^+\backslash E} |\phi|^2 + H_{k_0}^2 \int\limits_{Q^+} |\nabla\phi(x)|^2\,dx\biggr). \tag{1.21}$$

То же неравенство справедливо для каждого множества, являющегося объединением непустых k_0-блоков без общих внутренних точек.

Пусть U — множество, определенное в (1.16). Возьмем дифференцируемую срезающую функцию $\zeta_U : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ такую, что

$$\zeta_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Psi_{k_0}, \\ 0, & \mathrm{Dist}(x, \Psi_{k_0}) \ge m_0 H_{k_0}, \end{cases} \qquad |\nabla\zeta_U(x)| \le \frac{c}{m_0 H_{k_0}}, \tag{1.22}$$

где константа c не зависит от формы[2)] множества Ψ_{k_0}. У такой срезающей функции градиент $\nabla\zeta_U$ не равен нулю только на непустых блоках $C_z^{k_0} \subset U\backslash\Psi_{k_0}$, $z \notin \mathbb{E}_{k_0}$. По неравенству Коши

$$|\nabla(\zeta_U\psi)| \le (1+\mu)(|\nabla\psi|^2 + (1/\mu)|\nabla\zeta_U|^2|\psi|^2),$$

$$(\mathrm{div}(\zeta_U\psi))^2 \le (1+\mu)((\mathrm{div}(\psi))^2 + (1/\mu)|\nabla\zeta_U|^2|\psi|^2)$$

для каждого $\mu > 0$. Из (1.21) и (1.22) следует, что квадратичный функционал $\mathscr{K}_\alpha$ формулы (1.9) допускает следующую оценку: если $\alpha < 1$ и $\mu = \varepsilon_1 \overset{\mathrm{def}}{=} (\alpha\gamma m_0^2)^{-1/2}$, то

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_\alpha(\zeta_U\psi) &\le (1+\mu)\int\limits_U K_\alpha(\psi) + 2\frac{1+\mu}{\alpha\mu}\int\limits_{U\backslash\Psi_{k_0}} |\nabla\zeta_U|^2|\psi|^2 \\ &\le (1+\mu)\int\limits_U K_\alpha(\psi) + c\frac{2(1+\mu)}{\alpha\mu\gamma m_0^2}\biggl(\int\limits_{U\backslash\Psi_{k_0}} |\nabla\psi|^2 + H_{k_0}^{-2}\int\limits_{(U\backslash\Psi_{k_0})} |\psi|^2\biggr) \\ &\le (1+c'\varepsilon_1)\int\limits_U K_\alpha(\psi) + c''\varepsilon_1 H_{k_0}^{-2}\int\limits_{(U\backslash\Psi_{k_0})} |\psi|^2.\end{aligned}$$

Используя специальный вид зависимости (1.10) главного собственного числа от выбора масштаба, можно заключить из вышесказанного о существовании не зависящих от $\alpha \in (0,1)$ положительных констант c_i таких, что при $\alpha\gamma m_0^2 > c_0$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Psi_{k_0}} |\psi|^2 &\le \int\limits_U |\zeta_U\psi|^2 \le (|U|^{2/d}/\mathscr{C}_\alpha)\mathscr{K}_\alpha(\zeta_U\psi) \\ &\le (1+c_1\varepsilon_1)(|U|^{2/d}/\mathscr{C}_\alpha)\int\limits_U K_\alpha(\psi) + c_2\varepsilon_1 H_{k_0}^{-2}\|\psi\|^2_{L^2(U\backslash\Psi_{k_0})}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

[2)] Можно, например, положить $\zeta_U(x) = Z((m_0 H_{k_0})^{-1}\,\mathrm{Dist}_+(x, \Phi^+))$, где функция Z гладкая.

§ 2. Верхняя оценка для главного собственного числа

Этот параграф содержит доказательство теоремы 1.1 для $d \geq 3$. Оно заканчивается в п. 2.2. Доказательство основано на лемме 2.1, которая устанавливает существование пробных функций, совместимых с типичными конфигурациями скелета среды S и имеющих рэлеевские отношения формулы (1.3), произвольно близкие к $\mathscr{S}$ (см. (1.8), (1.9)).

2.1. Пробные функции с малыми рэлеевскими отношениями.

Лемма 2.1. *Если $d \geq 3$ и выполнены условия (1.4), (1.6), то для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого натурального числа $M \geq M_0(\varepsilon)$ существуют конечное множество $\mathbb{F}_{\varepsilon,M} \subset \mathbb{Z}^d$ такое, что*

$$\#(\mathbb{F}_\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)M^d, \quad \mathbb{F}_{\varepsilon,M} \subseteq c_0 \exp\{c_1 M^2\} Q, \tag{2.1}$$

а также соленоидальное векторное поле $\phi_{\varepsilon,M} \in \mathbf{V}(\mathbb{R}^d)$, которое допускает оценку

$$\|\phi_{\varepsilon,M}\|_2^{-2} \|\nabla \phi_{\varepsilon,M}\|_2^2 \leq (\mathscr{S} + \varepsilon) M^{-2} \tag{2.2}$$

и удовлетворяет включениям

$$\operatorname{supp}(\phi_{\varepsilon,M}) \subset \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{z \notin \mathbb{F}_{\varepsilon,M}} (z + W), \quad \operatorname{supp}(\phi_{\varepsilon,M}) \subseteq c_0 M \exp\{c_1 M^2\} Q, \tag{2.3}$$

где константы $c_i > 0$ определяются выбором ε и не зависят от M.

Доказательство. Фиксируем малое число $\delta > 0$ и выберем функцию $\psi_\delta^0 \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ так, что $\operatorname{div}(\psi_\delta^0) = 0$ и

$$\left|\left\{|\psi_\delta^0| > 0\right\}\right| = 1, \quad \|\psi_\delta^0\|_2^{-2} \|\nabla \psi_\delta^0\|_2^2 \leq (1+\delta^2)\mathscr{S}. \tag{2.4}$$

Выберем еще натуральное число $N = N(\delta)$ таким образом, что

$$\|\psi_\delta^0\|_2^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus NQ} |\psi_\delta^0(x)|^2 \, dx + \|\nabla \psi_\delta^0\|_2^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus NQ} |\nabla \psi_\delta^0(x)|^2 \, dx + \left|\left\{|\psi_\delta^0| > 0\right\} \cap (\mathbb{R}^d \setminus NQ)\right| \leq \delta^3. \tag{2.5}$$

Новый параметр δ будет впоследствии выбран как функция ε.

Соленоидальное векторное поле леммы $\phi_{\varepsilon,M}$ будет получено несколькими изменениями пробной функции с измененным пространственным масштабом

$$\psi_1(x) = M^{-d/2} \psi_\delta(M^{-1}x). \tag{2.6}$$

Эта функция ψ_1 удовлетворяет условиям $\operatorname{div}(\psi_1) = 0$ и

$$\|\psi_1\|_2 = 1, \quad |\{|\psi_1| > 0\}| = M^d, \quad \|\nabla \psi_1\|_2^2 \leq (1+\delta^2)\mathscr{S} M^{-2}. \tag{2.7}$$

(a) Первый шаг на пути к ϕ_ε состоит в преобразовании ψ_1 в соленоидальное векторное поле ψ_2 с компактным носителем, удовлетворяющее условию (2.3). Положим

$$R_\ell = 2^\ell MN, \ \ell = 0, 1, \dots, \quad A_\ell = R_\ell Q \setminus R_{\ell-1} Q, \ \ell \geq 1. \tag{2.8}$$

Множества $A_\ell \subset \mathbb{R}^d \setminus MNQ$ не имеют общих точек, и из (2.5) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus MNQ} |\psi_1|^2 \leq \delta^3.$$

Поэтому существует число $\ell_0 \in [1, M^2]$ такое, что

$$\int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2 \leq \frac{\delta^3}{M^2}. \tag{2.9}$$

Выберем срезающую функцию $\zeta_1 : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ так, что $\zeta_1(x) = 1$ при $x \in \frac{3}{2}R_{\ell_0 - 1}Q$, $\zeta_1(x) = 0$ при $x \notin R_{\ell_0}Q$ и $|\nabla\zeta_1(x)| \le c_1/R_{\ell_0}$. Векторное поле $\zeta_1\psi_1$ не соленоидально на A_{ℓ_0}, но его дивергенция мала:

$$\int\limits_{A_{\ell_0}} (\operatorname{div}(\zeta_1\psi_1))^2 = \int\limits_{A_{\ell_0}} |\nabla\zeta_1 \cdot \psi_1|^2 \le c_1^2 R_{\ell_0}^{-2} \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2.$$

Легко видеть, что поток поля $\zeta_1\psi_1$ через границу ∂A_{ℓ_0} равен нулю. Поэтому из [12, § III.3, теорема 3.1] следует существование функции $w \in \mathbf{H}_0^1(A_{\ell_0})$ такой, что $\operatorname{div}(w) = -\nabla\zeta_1 \cdot \psi_1$ и

$$\int\limits_{A_{\ell_0}} |\nabla w|^2 \le c_2 R_{\ell_0}^{-2} \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2, \quad \int\limits_{A_{\ell_0}} |w|^2 \le c_3 \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2.$$

Вывод этих оценок использует неравенства $\|w\|_2 \le |A_{\ell_0}|^{1/d}\|w\|_{2/(1-2/d)}$ и (1.11).

Векторное поле $\psi_2 = \zeta_1\psi_1 + w$ соленоидально. По построению оно удовлетворяет условию (2.3), а также

$$\int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_2|^2 \le c_4 \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2. \tag{2.10}$$

(б) Векторное поле ψ_2 «подправляется» так, чтобы сделать его совместимым с любой конфигурацией скелета среды на множестве A_{ℓ_0}.

Пусть $Z : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ — срезающая функция для центральной ячейки $C_0^0 = Q$ такая, что

$$Z(x) = \begin{cases} 1, & x \in \partial Q, \\ 0, & x \in W, \end{cases} \quad |\nabla Z(x)| \le c.$$

Обозначим символом $\mathscr{T}_z f(x) = f(x-z)$ оператор сдвига на вектор с целочисленными координатами $z \in \mathbb{Z}^d$. Поток поля ψ_2 через границу множества $z + (Q\backslash W)$ равен нулю для каждой ячейки $C_z^0 \subset A_{\ell_0}$, поскольку ψ_2 соленоидально. Это обстоятельство позволяет применить оператор условия (1.6) для того, чтобы определить в отдельной ячейке $C_z^0 \subset A_{\ell_0}$ соленоидальное векторное поле

$$\psi_{3,z}(x) = \mathscr{T}_{-z}(Z\mathscr{T}_z\psi_2 + \mathscr{B}_W \nabla Z \cdot \mathscr{T}_z\psi_2)(x),$$

которое принадлежит $\mathbf{H}^1(C_z^0)$, совпадает с ψ_2 на ∂C_z^0, обращается в нуль на $z + W$ и допускает оценку

$$\int\limits_{C_z^0} (|\psi_{3,z}|^2 + |\nabla\psi_{3,z}|^2) \le c \int\limits_{C_z^0} |\psi_2|^2. \tag{2.11}$$

Векторное поле

$$\psi_3(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in Q^+ = R_{\ell_0 - 1}Q, \\ \psi_{3,z}(x), & x \in C_z^0,\ C_z^0 \subset A_{\ell_0}, \\ 0, & x \notin R_{\ell_0}Q, \end{cases} \tag{2.12}$$

соленоидально. Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_3|^2 \le c \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2 \le c' \frac{\delta^3}{M^2}, \quad \|\nabla\psi_3\|_2^2 \le c_1 \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_2|^2 \le c_2 \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2 \le c_3 \frac{\delta^3}{M^2}. \tag{2.13}$$

По построению $\psi_3 = \psi_1$ на центральном кубе Q^+. Для малых $\delta \le \delta_0$ из (2.13), (2.5) и (2.7) вытекает, что рэлеевское отношение ψ_3 удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\psi_3\|_2^{-2}\|\nabla\psi_3\|_2^2 \le \Bigg(\|\psi_1\|_2^2 - \int\limits_{A_{\ell_0}} |\psi_1|^2\Bigg)^{-1}\Bigg(\int\limits_{Q^+} |\nabla\psi_1|^2 + c_3\delta^3/M^2\Bigg)$$
$$\le \frac{(1+\delta^2)\mathscr{S}M^{-2} + c_4\delta^3/M^2}{1-\delta^3/M^2} \le (1+c_5\delta^2)\mathscr{S}M^{-2}. \quad (2.14)$$

(в) Следующий шаг построения состоит в выборе множества $\mathbb{F}_{\varepsilon,M} \subset \mathbb{Z}^d$ таким образом, чтобы его плотная «оболочка» $\mathbb{F}_{\varepsilon,M} + Q$ могла служить удовлетворительным приближением к «пустому пространству»

$$E = Q^+ \cap \{|\psi| > 0\}, \quad \psi = \psi_3, \quad Q^+ = R_{\ell_0-1}Q, \quad (2.15)$$

определенному с использованием функции (2.12). Эта часть построения реализуется с помощью техники п. 1.3.

Значения параметров, используемых в построении, выражаются через большое нечетное число $T = T_0(\delta)$, которое выбирается как функция малого параметра $\delta > 0$ из (2.4):

$$\gamma = T^{-\kappa}, \quad m_0, K_* \in \mathbb{N}, \quad m_0 \sim T^{\kappa}, \quad K_* = T, \quad (2.16)$$

где $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2d}\right)$ — фиксированный малый показатель. Иерархия масштабов (1.12) и «пустых» множеств отправляется от разбиения пространства на ячейки $C_z^0 = z + Q$ размером $H_0 = 1$. Окончательный выбор $\delta = \delta(\varepsilon)$ и, следовательно, $T = T_0(\delta)$ делается в конце доказательства таким образом, чтобы удовлетворить оценкам леммы. Ниже предполагается, что T велико и

$$M > T^{2T}, \quad m_0^d/T \le cT^{-1+d\kappa} \le \delta^2. \quad (2.17)$$

На центральном кубе Q^+ пробная функция ψ равна исходному соленоидальному векторному полю ψ_1 формулы (2.6). Заметим, что при $\gamma < |W|$ все пустые ячейки содержатся в Q^+ и каждый пустой блок имеет общие точки с Q^+. По (2.5) и (2.7) полный объем пустого пространства удовлетворяет неравенствам

$$(1-\delta^3)M^d \le |E| \le M^d.$$

Если блок C_z^k непуст, $z \notin \mathbb{E}_k$, то

$$\big|C_z^k \cap \{\psi = 0\}\big| \ge \big|\big(C_z^k \cap Q^+\big) \cap \{\psi = 0\}\big| + |W|\big|C_z^k \backslash Q^+\big|$$
$$\ge |W|\big(\big|\big(C_z^k \cap Q^+\big) \cap \{\psi = 0\}\big| + \big|C_z^k \backslash Q^+\big|\big) \ge \gamma|W|\big|C_z^k\big|, \quad (2.18)$$

потому что для непустого блока

$$\big|C_z^k \backslash E\big| = \big|\big(C_z^k \cap Q^+\big) \cap \{\psi = 0\}\big| + \big|C_z^k \backslash Q^+\big| \ge \gamma\big|C_z^k\big|.$$

Для каждого непустого блока неравенства (2.18) и (1.21) приводят к оценке

$$\int\limits_{C_z^k} |\psi|^2 \le c\frac{H_k^2}{\gamma}\int\limits_{C_z^k} |\nabla\psi|^2, \quad z \notin \mathbb{E}_k.$$

Следовательно, если $\mathbb{J} \cap \mathbb{E}_k = \varnothing$, то

$$\int\limits_J |\psi|^2 \le C \frac{H_k^2}{\gamma} \int\limits_J |\nabla\psi|^2, \quad J = \bigcup_{z \in \mathbf{J}} C_z^k. \tag{2.19}$$

Выберем $k_0 \le K_*$ и U, как в (1.15) и (1.16). По (1.19) общее число ячеек в U допускает оценку

$$\#\{z : C_z^0 \subset U\} \le \left|C_0^0\right|^{-1} |U| \le (1 + c_2\gamma)|E| \le (1 + c_2\gamma) M^d \tag{2.20}$$

при условии, что $\gamma < |W|$.

Множество U содержит бо́льшую часть свободного пространства E. Оценку для числа пустых ячеек, не покрытых U, можно вывести из (1.23).

По выбору параметров в (2.16) величина γm_0^2 велика, если велико T. Векторное поле ψ соленоидально, поэтому $K_\alpha(\psi) = |\nabla\psi|^2$. Все множество $U \backslash \Psi_{k_0}$ покрывается непустыми k_0-блоками. Специфический выбор (2.15) множества E, дающий (2.19), приводит (1.23) с $\alpha = \left(\gamma m_0^2\right)^{-1/2}$ к виду

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Psi_{k_0}} |\psi|^2 &\le \int\limits_U |\zeta_U \psi|^2 \le (|U|^{2/d}/\mathscr{C}_\alpha) \mathscr{K}_\alpha(\zeta_U \psi) \\
&\le (|U|^{2/d}/\mathscr{C}_\alpha)(1 + c_1\left(\alpha\gamma m_0^2\right)^{-1/2}) \int\limits_U |\nabla\psi|^2 + c_2\left(\alpha\gamma m_0^2\right)^{-1/2} H_{k_0}^{-2} \|\psi\|^2_{L^2(U \backslash \Psi_{k_0})} \\
&\le (\mathscr{S}/\mathscr{C}_{(\gamma m_0^2)^{-1/2}})\left(1 + c_1\left(\gamma m_0^2\right)^{-1/4}\right)(|U|^{2/d}/\mathscr{S}) \|\nabla\psi\|_2^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Поскольку размеры всех блоков, использованных при построении, удовлетворяют неравенству $H_k \le T^T$, из (2.19), (2.17) и (2.7) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \backslash \Psi_{k_0}} |\psi|^2 \le \frac{C}{\gamma} H_{k_0}^2 \int\limits_{\mathbb{R}^d \backslash \Psi_{k_0}} |\nabla\psi|^2 \le C T^{2T+\kappa} \int\limits_{\mathbb{R}^d \backslash \Psi_{k_0}} |\nabla\psi|^2.$$

Поэтому (2.21), (2.14) и (2.17) показывают, что

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_2^2 &\le \frac{\mathscr{S}}{\mathscr{C}_{(\gamma m_0^2)^{-1/2}}} \left(1 + c_1\left(\gamma m_0^2\right)^{-1/4}\right)(|U|^{2/d}/\mathscr{S}) \|\nabla\psi\|_2^2 + C T^{2T+\kappa} \|\nabla\psi\|_2^2 \\
&\le \frac{\mathscr{S}}{\mathscr{C}_{(\gamma m_0^2)^{-1/2}}} \left(1 + c_1\left(\gamma m_0^2\right)^{-1/4}\right)(1 + c_5\delta^2)(|U|/M^d)^{2/d} \|\psi\|_2^2 \\
&\qquad + C T^{-2T+\kappa} \mathscr{S}(1 + c_5\delta^2) \|\psi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, при $T > T(\delta)$

$$(1 - \delta^3) \le (1 + c_6\delta^2)(|U|/M^d)^{2/d} \mathscr{S}/\mathscr{C}_{(\gamma m_0^2)^{-1/2}}.$$

Кроме того,

$$|U| \ge (1 + 5\delta^2)^{-1} M^d, \tag{2.22}$$

если число $\delta > 0$ мало, а $T = T(\delta)$ достаточно велико.

Вместе с (1.19) полученное неравенство дополняет (2.20) оценкой части пустого пространства, которую покрывает $Q^+ \backslash U$:

$$|(Q^+ \backslash U) \cap E| \le c\delta^2 M^d. \tag{2.23}$$

Действительно, соединяя (1.17) и (2.22), можно заключить, что

$$|\Psi_{k_0}| \geq (1 + c'T^{-1+\kappa})^{-1}(|U| - \hat{c}T^{\kappa d-1}|E|).$$

Поскольку $|E| \leq M^d$, при больших $T = T(\delta)$ мера свободного пространства в U допускает оценку

$$|U \cap E| \geq (1-\gamma)|\Psi_{k_0}| \geq \frac{1-\gamma}{1 + c'T^{-1+\kappa}}\left(\frac{M^d}{1+5\delta^2} - \hat{c}T^{\kappa d-1}M^d\right) \geq \frac{M^d}{1+6\delta^2}.$$

Все свободное пространство E содержится в Q^+. Поэтому можно заключить, что

$$|(Q^+ \backslash U) \cap E| = |E| - |U \cap E| \leq M^d(1 - 1/(1+6\delta^2)),$$

а это подразумевает (2.23).

(г) Последний шаг построения состоит в том, чтобы «подправить» векторное поле ψ формул (2.12), (2.15) и сделать его совместимым с некоторыми специфическими конфигурациями скелета среды. Как ранее в части (б) доказательства, «поправки» вносятся отдельно в некоторых ячейках центрального куба Q^+. Чтобы выбрать те ячейки $C_z^0 \subset Q^+$, в которых поправки необходимы, все ячейки делятся на две категории.

Ячейки, где ψ не обращается в нуль на заметной части объема, соответствуют «свободному» множеству

$$\mathbb{F}_\delta^* = \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z^0 \subset U\} \cup \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z^0 \subset Q^+ \backslash U, |E \cap C_z^0| > \delta\}.$$

Такие ячейки немногочисленны: в соответствии с (2.20) и (2.23) при малых δ и большом $T = T_0(\delta)$

$$\#(\mathbb{F}_\delta^*) \leq (1 + c(\gamma+\delta))M^d \leq (1 + c'\delta)M^d.$$

Множество $\mathbb{F}_{\varepsilon,M} = \mathbb{F}_{\delta(\varepsilon)}^*$ обладает свойствами, указанными в формулировке леммы, если число $\delta = \delta(\varepsilon)$ выбрано достаточно малым.

Расположение ячеек, где ψ не обращается в нуль только на очень малой части объема, определяет «плотные» множества

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{Z}^d : C_z^0 \subset Q^+\} \backslash \mathbb{F}_\delta^*, \quad D = \bigcup_{z \in \mathbb{D}} C_z^0.$$

Из (1.20) с $Q^0 = C_z^0 \cap \{|\psi| = 0\}$, $Q^1 = C_z^0 \backslash \{|\psi| = 0\}$ и $\alpha_*^d \leq \delta/(1-\delta)$ следует, что

$$\int_{C_z^0} |\psi|^2 \leq c\delta^{1/d} \int_{C_z^0} |\nabla\psi|^2, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.24}$$

Остается изменить ψ_3 отдельно на каждой ячейке C_z^0, $z \in \mathbb{D}$. Повторение выкладки, использованной при выводе (2.13), приводит к соленоидальному векторному полю

$$\phi_\delta^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in C_z^0,\ z \in \mathbb{F}_\delta^*, \\ \mathscr{T}_{-z}(Z\mathscr{T}_z\psi + \mathscr{B}_W \nabla Z \cdot \mathscr{T}_z\psi)(x), & x \in C_z^0,\ z \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

На основании (2.24) полученное поле допускает оценки

$$\|\phi_\delta^* - \psi\|_2^2 + \|\nabla(\phi_\delta^* - \psi)\|_2^2 \leq c\int_D |\psi|^2 \leq c\delta^{1/d}\|\nabla\psi\|_2^2,$$

поэтому векторное поле $\phi_{\varepsilon,M} = \phi_{\delta(\varepsilon)}^*$ обладает свойствами, указанными в формулировке леммы, если только $\delta = \delta(\varepsilon)$ достаточно мало.

Этот выбор параметра δ окончательно определяет $N = N(\delta)$ в формуле (2.5) так же, как $T = T_0(\delta(\varepsilon))$ и остальные параметры, указанные в (2.16). Нижнюю границу леммы для M определяет (2.17). $\square$

Доказательство теоремы 1.1. При $d \geq 3$ доказательство основано на использовании леммы 2.1. Фиксируем малое положительное число ε и воспользуемся этим числом и соответствующими константами формулы (2.1), чтобы определить $R(M) = c_0 M \exp\{c_1 M^2\}$. Пусть $\mathbb{F}_{\varepsilon,M}$ и $\phi_{\varepsilon,M} \in \mathbf{H}_0^1(R(M))$ суть соответственно конечное множество и соленоидальная пробная функция, описанные в лемме 2.1.

Выберем функцию $M = M(t)$ с натуральными значениями таким образом, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M^d(t)}{\ln t} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{1}{d}\ln\frac{1}{p}. \tag{2.25}$$

Ниже $\phi_t = \phi_{\varepsilon,M(t)}$ и $\mathbb{F}_t = \mathbb{F}_{\varepsilon,M(t)}$, а R_t — функция с целыми значениями, которая удовлетворяет условию

$$R_t \geq R(M(t)), \quad \ln R_t = c(\ln t)^{2/d}(1+o(1)) \quad \text{при } t\to\infty.$$

Рассмотрим функции $\phi_{t,\zeta}(x) = \phi_t(x - 2R_t\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{Z}(t)$, где $\mathbb{Z}(t) = \{\zeta \in \mathbb{Z}^d : R_t(2\zeta + Q) \subset \widehat{Q}_t\}$.

Функция $\phi_{t,\zeta}$ может служить пробной функцией определения (1.3), если только конфигурация скелета среды удовлетворяет условию

$$\varepsilon_z = 0, \quad z \in \mathbb{F}_{t,\zeta} = 2R_t\zeta + \mathbb{F}_t,$$

потому что в этом случае $\phi_{t,\zeta}$ обращается в нуль вне области течения (1.1) по условию (1.4). Принимая во внимание инвариантность рэлеевского отношения при сдвигах функции, из сказанного выше выводим следующую верхнюю оценку для главного собственного числа:

$$\mathfrak{S}_t \leq \|\phi_{t,\zeta}\|_2^{-2}\|\nabla\phi_{t,\zeta}\|_2^2 = \|\phi_t\|_2^{-2}\|\nabla\phi_t\|_2^2. \tag{2.26}$$

Множества $\mathbb{F}_{t,\zeta}$, $\zeta \in \mathbb{Z}_t$, не имеют общих точек. По условию (1.5) события $A_{t,\zeta} = \bigcap_{z\in\mathbb{F}_{t,\zeta}} \{\varepsilon_z = 0\}$ независимы и имеют одну и ту же вероятность

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}\{A_{t,\zeta}\} = \exp\{-\#(\mathbb{F}_\varepsilon)\ln(1/p)\} \geq \exp\{-d(1-\varepsilon)\ln t\}.$$

Вероятность $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}(\bigcup_{\zeta\in\mathbb{Z}(t)} A_{t,\zeta})$ того, что произойдет хотя бы одно из этих событий, допускает оценку

$$\mathbf{P}_t \geq 1 - \prod_{\zeta\in\mathbb{Z}(t)}(1 - \mathbf{P}(A_{t,\zeta})) \geq 1 - \exp\{-\#(\mathbb{Z}(t))\mathbf{p}(t)\}.$$

Принимая во внимание (2.25), нетрудно видеть, что $\lim_{t\to\infty} \#(\mathbb{Z}(t))\mathbf{p}(t) = +\infty$ и, следовательно, $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}_t = 1$, поскольку при $d \geq 3$ и $t \to \infty$

$$\#(\mathbb{Z}(t)) \geq \left(\frac{1}{2}\frac{t}{R_t}\right)^d = \exp\{(d + \mathscr{O}(1/(\ln t)^{(d-2)/d}))\ln t\}.$$

Следовательно, неравенство (2.26) выполняется с вероятностью, которая сходится к единице при $t \to \infty$. На основании (2.25) и (2.2) вероятность того, что

$$(\ln t)^{2/d}\frac{\|\nabla\phi_{\varepsilon,M}\|_2^2}{\|\phi_{\varepsilon,M}\|_2^2} \leq (\mathscr{S} + \varepsilon)\left(\frac{\ln t}{M_t^d}\right)^{2/d} \leq (\mathscr{S} + 2\varepsilon)\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2/d}\left(\frac{1}{d}\ln\frac{1}{p}\right)^{2/d},$$

сходится к единице при $t \to \infty$. Это доказывает теорему, так как число $\varepsilon > 0$ произвольно. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.

2. *Evans L. C.* Partial differential equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Graduate Studies in Maths.; V. 19).

3. *Юринский В. В.* Локализация нижней границы спектра для оператора Стокса в случайной пористой среде // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 386–413.

4. *Sznitman A.-S.* Capacity and principal eigenvalues: the method of enlargement of obstacles revisited // Ann. Probab. 1997. V. 25, N 3. P. 1180–1209.

5. *Sznitman A.-S.* Brownian motion, obstacles and random media. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1998.

6. *Beliaev A. Yu., Yurinsky V. V.* Bottom of Laplacian's spectrum in Poisson cloud // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 4. P. 113–150.

7. *Yurinsky V. V.* Spectrum bottom and largest vacuity // Probab. Theory Relat. Fields. 1999. V. 114, N 2. P. 151–175.

8. *Merkl F., Wütrich M. V.* Phase transition of the principal Dirichlet eigenvalue in a scaled Poissonian potential // Probab. Theory Relat. Fields. 2001. V. 119, N 4. P. 475–507.

9. *Merkl F., Wütrich M. V.* Infinite volume asymptotics of the ground state energy in scaled Poissonian potential // Ann. Inst. H. Poincaré – PR. 2002. V. 38, N 3. P. 253–204.

10. *Yurinsky V. V.* On the principal eigenvalue of the Schrödinger operator with a scaled random potential // Contemporary Mathematics. 2003. V. 339. P. 201–216. (Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conf. on Waves in Periodic and Random Media, Mount Holyoke College, South Hadley MA, June 22–28, 2002; P. Kuchment, Editor. Amer. Math. Sci., Providence, RI, 2003, ISSN 0271–4132).

11. *Боговский М. Е.* О решении некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами Div и Grad // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. Т. 1. С. 5–40.

12. *Galdi G. P.* An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. New York: Springer-Verl., 1994. V. 1.

13. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

14. *Allaire G.* Homogenization of the Navier–Stokes equations in open sets perforated by tiny holes // Arch. Rational Mech. Anal. 1991. V. 113. Part I: P. 209–259; Part II: P. 261–298.

15. *Rubinstein J.* On the macroscopic description of slow viscous flow past a random array of spheres // J. Statist. Phys. 1982. V. 44, N 5–6. P. 849–863.

16. *Allaire G.* Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium // Asymptotic Analysis. 1989. V. 2, N 3. P. 203–222.

17. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 5 августа 2004 г.

Юринский Вадим Владимирович
Departamento de Matemática,
Universidade da Beira Interior,
Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6200-001 Covilhã
PORTUGAL
yurinsky@ubi.pt