Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 514.763.3

О НОВЫХ ПРИМЕРАХ ПОЛНЫХ НЕКОМПАКТНЫХ МЕТРИК С ГРУППОЙ ГОЛОНОМИИ $\mathrm{Spin}(7)$

Я. В. Базайкин

Аннотация: Строятся полные римановы метрики с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ на некомпактных орбифолдах, являющихся $\mathbb{R}^4$-расслоениями с произвольным 3-сасакиевым сферическим слоем M. Доказано существование гладких метрик при $M = S^7$ и $M = SU(3)/U(1)$, ранее найденных лишь численно.

Ключевые слова: исключительные группы голономии, 3-сасакиевы многообразия.

§ 1. Введение и описание основных результатов

Одной из интересных задач современной дифференциальной геометрии является проблема построения и изучения римановых метрик с экзотическими группами голономий G_2 и $\mathrm{Spin}(7)$. В предлагаемой статье мы ограничиваемся случаем группы $\mathrm{Spin}(7)$.

Экзотические группы голономий выделяются в списке Берже тем, что долгое время был открытым вопрос о существовании примеров метрик с такими группами голономий. Первый полный (некомпактный) пример построен явным образом в 1989 г. в [1]. Существование компактных пространств доказано Джойсом [2] в 1996 г. Конструкция Джойса не дает явного описания метрик, их существование следует из довольно тонкого анализа.

Новый интерес к некомпактным примерам возник относительно недавно со стороны математической физики. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономий $\mathrm{Spin}(7)$ в так называемой M-теории. В работах [3–8] построен ряд новых полных примеров, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются Риччи-плоскими и асимптотически ведут себя как конусы либо как произведения конусов на окружности (асимптотически локально конические метрики, АЛК-метрики). Все построенные примеры представляют собой метрики кооднородности один, т. е. расслаиваются на однородные семимерные слои.

С другой стороны, исследование вопроса о существовании некомпактных примеров представляет собственный интерес для геометрии, поскольку нельзя исключить возможность построения дальнейших компактных примеров из некомпактных при помощи конструкции, схожей с конструкцией Куммера.

В данной статье мы предлагаем общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ по заданному 3-сасакиеву

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–0094а), Комплексного интеграционного проекта 2.15 СО РАН и гранта Президента РФ (проект МК–8712.2006.1).

7-мерному многообразию M. Идея состоит в следующем. Если выбрать 3-сасакиево многообразие M, то конус над M будет иметь группу голономии $Sp(2) \subset \mathrm{Spin}(7)$. Мы деформируем конусную метрику так, чтобы разрешить особенность в вершине конуса и получить метрику, группа голономии которой не станет больше, чем $\mathrm{Spin}(7)$. При этом за деформацию отвечают функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса.

Более подробно, рассмотрим 3-сасакиево расслоение $M \to \mathscr{O}$ с общим слоем, диффеоморфным S^3 либо $SO(3)$, над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathscr{O}$. С этим расслоением можно ассоциировать векторные $\mathbb{H}$- и $\mathbb{C}$-расслоения, пространства которых мы обозначаем через $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ соответственно. Пространства $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ позволяют осуществить разрешение конусной особенности двумя топологически различными способами. При этом метрика на $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ выглядит следующим образом:

$$dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2\eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathscr{H}}, \qquad (*)$$

где g — метрика на 3-сасакиевом многообразии M, $\mathscr{H}$ — касательное к M распределение горизонтальных векторов, η_i — базис 1-форм, аннулирующих $\mathscr{H}$. Условие экзотичности группы голономии метрики $(*)$ сводится тогда к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{A}_1 = \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2 - A_1^2}{A_2A_3}, \quad \dot{A}_2 = \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2 - A_2^2}{A_1A_3}, \\ \dot{A}_3 = \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2 - A_3^2}{A_1A_2}, \quad \dot{B} = -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}.\end{gathered} \qquad (**)$$

Чтобы получить регулярные АЛК-метрики, надо поставить некоторую краевую задачу для системы $(**)$: условие на одном краю должно разрешать конусную особенность, условие на другом должно гарантировать нужное асимптотическое поведение.

Примеры метрик с голономиями $\mathrm{Spin}(7)$ на $\mathscr{M}_1$ для некоторых частных случаев выбора M построены в [3, 4, 6–8]. В статье [5] сообщается о численном анализе, который позволяет предполагать существование метрик на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_4$ для $M = S^7$. Аналогично в [8] приводится численный анализ, свидетельствующий о возможном существовании метрик на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_2$ при $M = SU(3)/S^1$. В данной статье мы в числе прочего строго доказываем существование этих метрик. Точнее, основным результатом нашей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, общий слой 3-сасакиева слоения M равен $SO(3)$ или $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существует однопараметрическое семейство полных регулярных римановых метрик вида $(*)$ с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$, стремящихся на бесконечности к произведению конуса над твисторным пространством $\mathscr{Z}$ и окружности S^1.*

Более того, любая другая полная регулярная метрика вида $(*)$ с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_q$ гомотетична одной из метрик указанного семейства.

Существует много примеров 3-сасакиевых 7-мерных многообразий [9]. Пространства $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$, в общем случае являющиеся орбифолдами, будут многообразиями, если M — регулярное 3-сасакиево многообразие. Это имеет место лишь при $M = S^7$, $M = \mathbb{R}P^7$, $M = SU(3)/S^1$. Стоит отметить, что система уравнений (6) появлялась в работах [5, 8] как результат независимых вычислений в различных алгебрах Ли; совпадение уравнений, конечно, объясняется с позиций данной статьи наличием в обоих случаях 3-сасакиевой структуры на однородных сечениях.

Статья изложена следующим образом. В § 2 приводятся необходимые в дальнейшем сведения о 3-сасакиевых многообразиях. В § 3 рассматривается деформация конусной метрики и выводятся уравнения, редуцирующие группу голономии к Spin(7). Здесь же приводятся условия, гарантирующие регулярность метрики, разрешающей конусные особенности. В § 4 собственно формулируется и доказывается основная теорема, и в § 5 вынесено обоснование условий регулярности.

§ 2. 3-Сасакиевы многообразия

Данный параграф содержит обзор основных необходимых нам результатов о 3-сасакиевых многообразиях. Более полные доказательства и дальнейшие ссылки можно найти в [9].

Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g. *Конусом* $\overline{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$.

Многообразие M называется *сасакиевым*, если группа голономии конуса $\overline{M}$ содержится в $U(\frac{m+1}{2})$ (в частности, m нечетно). Значит, на $\overline{M}$ существует параллельная комплексная структура J. Отождествим M с изометричным ему вложенным подмногообразием $M \times \{1\} \subset \overline{M}$ и положим $\xi = J(\partial_t)$. Векторное поле ξ называется *характеристическим* полем сасакиева многообразия M. Характеристическая 1-форма η сасакиева многообразия определяется соотношением

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

для всех полей X на M.

Лемма 1. *Поле ξ является единичным векторным полем Киллинга на многообразии M.*

Доказательство. То, что поле ξ является единичным, сразу следует из определения. Пусть ∇ и $\overline{\nabla}$ — римановы связности в M и $\overline{M}$. Непосредственно проверяется, что для любых векторных полей X, Y на M

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - t \cdot g(X,Y)\partial_t, \quad \overline{\nabla}_{\partial_t} X = \overline{\nabla}_X \partial_t = \frac{1}{t} X, \quad \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.$$

Тогда для любого векторного поля X на M

$$g(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X \xi, X) = \bar{g}(J(\overline{\nabla}_X \partial_t), X) = \bar{g}(JX, X) = 0.$$

Следовательно, поле ξ киллингово. Лемма доказана.

Если на многообразии M заданы три попарно ортогональные сасакиевы структуры, то M становится 3-сасакиевым. Более точно, многообразие M называется 3-*сасакиевым*, если метрика $\bar{g}$ на $\overline{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp\left(\frac{m+1}{4}\right)$ (в частности, $m = 4n+1$, $n \geq 1$). Последнее означает, что на $\overline{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3, удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Как и в сасакиевом случае, определяются характеристические поля ξ^i и 1-формы η_i:

$$\xi^i = J^i(\partial_t), \quad \eta_i(X) = g(X, \xi^i), \quad i = 1, 2, 3,$$

для всех векторных полей X на M.

Лемма 2. *Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются единичными попарно ортогональными векторными полями Киллинга на M, причем*

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \varepsilon_{ijk}\xi^k, \quad [\xi^i, \xi^j] = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Доказательство. То, что поля ξ^i являются единичными, попарно ортогональными и киллинговыми, сразу следует из определения и предыдущей леммы. Далее,

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \overline{\nabla}_{\xi^i}\xi^j + \delta^{ij}\partial_t = J^j\overline{\nabla}_{\xi^i}\partial_t + \delta^{ij}\partial_t = (J^jJ^i + \delta^{ij})\partial_t = \varepsilon_{ijk}\xi^k,$$

откуда немедленно вытекает, что

$$[\xi^i, \xi^j] = \nabla_{\xi^i}\xi^j - \nabla_{\xi^j}\xi^i = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Лемма доказана.

Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 образуют подалгебру Ли $sp(1)$ в алгебре инфинитезимальных изометрий. Значит, в группе всех изометрий содержится подгруппа либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$, орбиты действия которой определяют трехмерное слоение $\mathscr{F}$. Из леммы следует, что каждый слой $\mathscr{F}$ является вполне геодезическим трехмерным подмногообразием постоянной кривизны 1.

Кратко напомним определения орбифолда (V-многообразия в терминологии Сатаке [10]). Пусть $\mathscr{S}$ — хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности. Локальная униформизующая система для открытой окрестности $U \subset \mathscr{S}$ — это тройка $(\widetilde{U}, \Gamma, \pi)$, где $\widetilde{U}$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$; Γ является конечной группой диффеоморфизмов окрестности $\widetilde{U}$; проекция $\pi : \widetilde{U} \to U$ инвариантна относительно группы Γ и индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\pi} : \widetilde{U}/\Gamma \to U$.

Пусть теперь $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ — два открытых множества в $\mathbb{R}^n$, конечные группы Γ_1 и Γ_2 действуют диффеоморфизмами на $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ соответственно. Назовем непрерывное отображение $f : \widetilde{U}_1/\Gamma_1 \to \widetilde{U}_2/\Gamma_2$ *гладким*, если для каждой точки $p \in \widetilde{U}_1$ найдутся такие окрестности V_1, V_2 точек p и $f(p)$ и локальные униформизующие системы $(\widetilde{V}_1, \Gamma_1, \pi_1)$ и $(\widetilde{V}_2, \Gamma_2, \pi_2)$ для V_1, V_2, что отображение $f|_{V_1}$ поднимается до гладкого отображения $\tilde{f} : \widetilde{V}_1 \to \widetilde{V}_2$, инвариантного относительно действия групп Γ_1, Γ_2. Схожим образом определяются понятия субмерсии, иммерсии, диффеоморфизма и т. д.

Гладким V-атласом для $\mathscr{S}$ называется покрытие $\mathscr{S}$ открытыми множествами U_i вместе с локальными униформизующими системами $(\widetilde{U}_i, \Gamma_i, \pi_i)$ такими, что отображение

$$\mathrm{Id} : U_i \cap U_j \to U_i \cap U_j$$

является диффеоморфизмом (в смысле данного выше определения). Пространство $\mathscr{S}$ вместе с полным V-атласом называется *V-многообразием*, или *орбифолдом*. Очевидным образом определяются понятия главного V-расслоения, V-расслоения, ассоциированного с главным, дифференциальной формы, римановой метрики, римановой субмерсии и т. д.

Риманов орбифолд $\mathscr{O}$ называется *кватернионно-кэлеровым*, если в V-расслоении эндоморфизмов касательного пространства существует параллельное V-подрасслоение $\mathscr{I}$ размерности 3, локально порожденное почти комплексными структурами I^1, I^2, I^3, удовлетворяющими соотношениям алгебры кватернионов, и расслоение $\mathscr{I}$ инвариантно относительно действия локальной униформизующей группы $\mathscr{O}$.

Теорема 1. *Пусть M — замкнутое $(4n+3)$-мерное 3-сасакиево многообразие с определенным, как выше, трехмерным слоением $\mathscr{F}$. Тогда на пространстве листов слоения $\mathscr{F}$ существует структура $4n$-мерного кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathscr{O}$ такая, что естественная проекция $\pi : M \to \mathscr{O}$ является римановой субмерсией и главным V-расслоением со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$. Общий слой π изометричен либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{V}$ трехмерное подрасслоение в TM, порожденное характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3. Пусть $TM = \mathscr{V} \oplus \mathscr{H}$ — ортогональное разложение относительно метрики g. Подрасслоение $\mathscr{V}$ будем назвать *расслоением вертикальных векторов*, $\mathscr{H}$ — *расслоением горизонтальных векторов*.

Пусть $p \in M$. Предположим, что стабилизатором точки p относительно действия $Sp(1)$ является дискретная подгруппа Γ в $Sp(1)$, т. е. лист $\mathscr{F}_p$, проходящий через точку p, изометричен $Sp(1)/\Gamma$. Положим

$$U = \{\exp_p(tX) \mid X \in \mathscr{H}_p,\ |X| = 1,\ 0 \le t \le \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, что $\varepsilon < \mathrm{inj}(M)$, $\mathscr{F}_p$ пересекает U ровно один раз в точке p, и каждый лист слоения $\mathscr{F}$ пересекает U не более чем конечное число раз. Тогда U гомеоморфно $\mathbb{R}^{4n}$ и на U действует изометриями группа Γ по правилу

$$\gamma \in \Gamma : \exp_p(tX) \mapsto \exp_p(td_p\gamma(X)).$$

Легко понять, что окрестность $\mathscr{O}$, состоящая из листов, пересекающих U, гомеоморфна U/Γ и система таких окрестностей, построенных по всем точкам p, задает униформизующий атлас на $\mathscr{O}$.

Очевидно, что метрика g на M имеет вид

$$g = \sum_{i=1}^{3} \eta_i^2 + g|_{\mathscr{H}},$$

где $g|_{\mathscr{H}}$ — ограничение метрики g на горизонтальное распределение. Рассмотрим проекцию $\pi : M \to \mathscr{O}$. Поскольку метрика g инвариантна относительно действия $Sp(1)$, то существует такая риманова метрика $g_{\mathscr{O}}$ на орбифолде $\mathscr{O}$, что для любой точки $p \in M$ ограничение $d\pi_p : \mathscr{H}_p M \to T_{\pi(p)}\mathscr{O}$ является изометрией, при этом $d\pi^*(g_{\mathscr{O}}) = g|_{\mathscr{H}}$. Таким образом, проекция π становится римановой субмерсией, и каждому векторному полю Y на $\mathscr{O}$ однозначно соответствует горизонтальное $Sp(1)$-инвариантное векторное поле X на M такое, что $d\pi(X) = Y$. Связность Леви-Чивита метрики $g_{\mathscr{O}}$ получается проектированием на $\mathscr{H}$ связности Леви-Чивита метрики g [11]. Далее, если X — горизонтальное векторное поле, то

$$g(J^i(X), \xi^j) = g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 0.$$

Таким образом, операторы J^1–J^3 на $\mathscr{H}$ отображают горизонтальные векторы в горизонтальные и задают кватернионную структуру на орбифолде $\mathscr{O}$.

Определим 2-формы на M следующим образом:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\eta_j \wedge \eta_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется, что для любых горизонтальных векторных полей X, Y

$$\omega_i(X,Y) = \frac{1}{2}(X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X,Y])) = \frac{1}{2}\eta_i(-\nabla_X Y + \nabla_Y X)$$
$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi^i, Y) - g(\nabla_Y \xi^i, X)) = g(J^i(X), Y),$$

$$\omega_i(X,\xi^j)=0,\quad \omega_i(\xi^j,\xi^k)=0.$$

Итак, формы ω_i получаются опусканием индекса из ограничений операторов J^i на $\mathscr{H}$.

Далее,

$$\begin{aligned}L_{\xi^i}\eta_j(X)&=\xi^i g(X,\xi^j)-g(\xi^j,[\xi^i,X])=g(\nabla_{\xi^i}X,\xi^j)+g(X,\nabla_{\xi^i}\xi^j)\\&-g(\xi^j,[\xi^i,X])=g(\nabla_X\xi^i,\xi^j)+g(X,\nabla_{\xi^i}\xi^j)=g(\overline{\nabla}_X J^i\partial_t,\xi^j)\\&+g(X,\overline{\nabla}_{\xi^i}J^j\partial_t)=-g(X,J^i\xi^j)+g(X,J^j\xi^i)\\&=2g(X,J^jJ^i\partial_t)=2g(X,\varepsilon_{ijk}\xi^k)=2\varepsilon_{ijk}\eta_k(X).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$L_{\xi^i}\eta_j=2\varepsilon_{ijk}\eta_k. \tag{1}$$

Дифференцируя (1), получаем

$$L_{\xi^i}d\eta_j=2\varepsilon_{ijk}d\eta_k. \tag{2}$$

Пользуясь (2) и соотношением $L_{\xi^i}(\eta_j\wedge\eta_k)=L_{\xi^i}\eta_j\wedge\eta_k+\eta_j\wedge L_{\xi^i}\eta_k$, получаем $L_{\xi^i}\omega_j=2\varepsilon_{ijk}\omega_k$. Поэтому пространство форм, порожденных формами ω_i, инвариантно относительно действия $Sp(1)$, а это значит, что и пространство, порожденное операторами $J^i|_{\mathscr{H}}$, является $Sp(1)$-инвариантным и опускается на $\mathscr{O}$. Итак, в расслоении $\mathrm{End}(T\mathscr{O})$ определено трехмерное подпространство, локально порожденное почти комплексными структурами J^1–J^3.

Далее, для горизонтальных X,Y имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\nabla_XJ^i)(Y)&=\mathscr{H}(\nabla_X(J^iY)-J^i(\nabla_XY))=\mathscr{H}\overline{\nabla}_X(J^iY)-\mathscr{H}J^i(\nabla_XY)\\&=\mathscr{H}J^i(\overline{\nabla}_XY))-\mathscr{H}J^i(\nabla_XY)=0.\end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что распределение этих подпространств параллельно вдоль $\mathscr{O}$.

Доказательство утверждения про общий слой расслоения π можно найти в [9]. Теорема доказана.

Поле ξ^1 соответствует подгруппе S^1 в $Sp(1)$ либо в $SO(3)$. Таким образом, можно рассмотреть одномерное слоение $\mathscr{F}'$ на M, порожденное полем ξ^1. Совершенно аналогично предыдущей теореме можно доказать, что на пространстве слоев слоения $\mathscr{F}'$ можно ввести структуру 6-мерного риманова орбифолда $\mathscr{Z}$, согласованную с римановой субмерсией $\pi':M\to\mathscr{Z}$. Известно, что метрика на $\mathscr{Z}$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна [9]. Орбифолд $\mathscr{Z}$ называется *твисторным пространством* многообразия M.

С каждым 3-сасакиевым многообразием M свяжем два орбифолда $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, разрешающих конусную особенность $\overline{M}$, следующими двумя способами.

1. Рассмотрим стандартное действие на $\mathbb{R}^4=\mathbb{H}$ группы $Sp(1)$, представленной единичными кватернионами, и соответствующее действие $SO(3)=Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$:

$$q\in Sp(1): x\in\mathbb{H}\mapsto qx\in\mathbb{H}.$$

Пусть $\mathscr{M}_1$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^4$ либо $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, ассоциированное с главным расслоением $M\to\mathscr{O}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбифолд $\mathscr{O}$ вложен в $\mathscr{M}_1$ в качестве нулевого слоя, а $\mathscr{M}_1\backslash\mathscr{O}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M и коллапсирующие к нулевому слою $\mathscr{O}$.

2. Пусть $S \simeq S^1$ — подгруппа в $Sp(1)$ либо $SO(3)$, интегрирующая поле Киллинга ξ^1. Рассмотрим действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{i\phi} \in \mathbb{C}.$$

Расслоение $M \to \mathscr{Z}$ является главным со структурной группой S. Пусть $\mathscr{M}_2$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^2$, ассоциированное с $\pi' : M \to \mathscr{Z}$. Таким образом, орбифолд $\mathscr{Z}$ вложен в $\mathscr{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathscr{M}_2 \backslash \mathscr{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M и коллапсирующие к нулевому слою $\mathscr{Z}$. Нам потребуется следующая модификация этой конструкции. Для любого натурального числа p существует очевидное вложение $\mathbb{Z}_p \subset S$, причем $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathscr{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбифолд $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathscr{M}_2$. Легко понять, что $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi' : M \to \mathscr{Z}$ при помощи действия

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{ip\phi} \in \mathbb{C}.$$

В случае если расслоение π регулярно (т. е. униформизующая группа тривиальна), мы говорим, что 3-сасакиево многообразие *регулярно*. В этом случае слоем π является либо $S^3 = Sp(1)$, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathscr{O}$ и $\mathscr{Z}$ — гладкие многообразия.

Теорема 2 [9]. *Если M — компактное регулярное 3-сасакиево многообразие размерности 7, то M изометрично одному из следующих однородных пространств: S^7, $\mathbb{R}P^7$, $SU(3)/T_{1,1}$, где через $T_{1,1}$ обозначена окружность S^1, вложенная в максимальный тор $T^2 \subset SU(3)$ с «весами» $(1, 1, -2)$.*

В случае $M = S^7$ оба пространства $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ являются гладкими 8-мерными многообразиями. Если $M = \mathbb{R}P^7$ либо $M = SU(3)/T_{1,1}$, то общий слой равен $SO(3)$ и многообразиями являются лишь соответствующие пространства $\mathscr{M}_2$.

§ 3. Конструкция метрик с группой голономии Spin(7)

Пусть $\{e^i\}$, $i = 0, 1 \dots, 7$, — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$. Обозначим $e^{ijkl} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$ и определим 4-форму Φ_0 на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\Phi_0 = e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + e^{2367} + e^{0246} \\ + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + e^{0347} - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256}.$$

Пусть N — ориентированное риманово 8-мерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 N$ *задает* Spin(7)-*структуру на* N, если в окрестности каждой точки $p \in N$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pN \to \mathbb{R}^8$ такая, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия N редуцируется к подгруппе $\mathrm{Spin}(7) \subset SO(8)$. Известно [12], что параллельность Φ равносильна ее замкнутости (козамкнутость следует автоматически в силу того, что форма Φ самосопряжена относительно оператора Ходжа):

$$d\Phi = 0. \tag{3}$$

Пусть M, как и выше, компактное семимерное 3-сасакиево многообразие. Рассмотрим на $(0, \infty) \times M$ следующую метрику:

$$\bar{g} = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathscr{H}}, \tag{4}$$

где функции $A_i(t)$ и $B(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$. Локально можно выбрать ортонормированную систему 1-форм $\eta_4,\eta_5,\eta_6,\eta_7$, порождающую аннулятор горизонтального подрасслоения $\mathscr{H}$, так, что

$$\omega_1 = 2(\eta_4\wedge\eta_5 - \eta_6\wedge\eta_7), \quad \omega_2 = 2(\eta_4\wedge\eta_6 - \eta_7\wedge\eta_5), \quad \omega_3 = 2(\eta_4\wedge\eta_7 - \eta_5\wedge\eta_6).$$

Пусть $\Omega = \eta_4\wedge\eta_5\wedge\eta_6\wedge\eta_7 = -\frac{1}{8}\omega_1\wedge\omega_1 = -\frac{1}{8}\omega_2\wedge\omega_2 = -\frac{1}{8}\omega_3\wedge\omega_3$.

Рассмотрим следующую 4-форму:

$$\begin{aligned}\Phi = e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3 + B^4\Omega + \frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^1 - e^2\wedge e^3)\wedge\omega_1 \\ + \frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^2 - e^3\wedge e^1)\wedge\omega_2 + \frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^3 - e^1\wedge e^2)\wedge\omega_3,\end{aligned}$$

где

$$e^0 = dt, \quad e^i = A_i\eta_i,\ i=1,2,3, \quad e^j = B\eta_j,\ j=4,\dots,7.$$

Очевидно, что форма Φ определена глобально на $\overline{M}$ и локально совпадает с Φ_0.

Пользуясь очевидными тождествами

$$d\eta_i = \omega_i - 2\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2},$$

$$d\omega_i = 2d(\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2}) = 2(\omega_{i+1}\wedge\eta_{i+2} - \eta_{i+1}\wedge\omega_{i+2}), \quad i=1,2,3 \bmod 3,$$

получаем соотношения, замыкающие внешнюю алгебру рассмотренных форм:

$$\begin{aligned} &de^0 = 0,\\ &de^i = \frac{A_i'}{A_i}e^0\wedge e^i + A_i\omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1}\wedge e^{i+2}, \quad i=1,2,3 \bmod 3,\\ &d\omega_i = \frac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1}\wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}}e^{i+1}\wedge\omega_{i+2}, \quad i=1,2,3 \bmod 3.\end{aligned} \tag{5}$$

Следующее утверждение получается непосредственными вычислениями при помощи соотношений (5).

Лемма 3. *Условие* (3) *эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered} A_1' = \frac{2A_1^2}{B^2} + \frac{(A_2-A_3)^2 - A_1^2}{A_2A_3}, \quad A_2' = \frac{2A_2^2}{B^2} + \frac{(A_3-A_1)^2 - A_2^2}{A_1A_3},\\ A_3' = \frac{2A_3^2}{B^2} + \frac{(A_1-A_2)^2 - A_3^2}{A_1A_2}, \quad B' = -\frac{A_1+A_2+A_3}{B}.\end{gathered} \tag{6}$$

Метрика (4) при выполнении определенных граничных условий даст гладкую риманову метрику на $\mathscr{M}_1$ или $\mathscr{M}_2$. Проясним эти условия.

Лемма 4. *Пусть* $A_i(t)$, $i=1,2,3$, $B(t)$ — C^∞*-гладкое на промежутке* $[0,\infty)$ *решение системы* (6). *Тогда метрика* (4) *продолжается до гладкой метрики на* $\mathscr{M}_1$ *в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

1) $A_1(0)=A_2(0)=A_3(0)=0$, $|A_1'(0)|=|A_2'(0)|=|A_3'(0)|=1$;

2) $B(0)\neq 0$, $B'(0)=0$;

3) *функции* A_1,A_2,A_3,B *знакоопределенны на промежутке* $(0,\infty)$.

Лемма 5. *В условиях предыдущей леммы пусть $p=4$ либо $p=2$ в зависимости от того, изометричен общий слой M или $Sp(1)$, или $SO(3)$. Для того чтобы метрика (4) продолжалась до гладкой метрики на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) $A_1(0)=0$, $|A_1'(0)|=4$;
2) $A_2(0)=-A_3(0)\neq 0$, $A_2'(0)=A_3'(0)$;
3) $B(0)\neq 0$, $B'(0)=0$;
4) *функции* A_1, A_2, A_3, B *знакоопределенны на промежутке* $(0,\infty)$.

Леммы 4 и 5 доказываются в § 5.

Прежде чем перейти к исследованию системы (6), приведем известные нам на данный момент точные решения этой системы. Если положить $A_1=A_2=A_3$, то система (6) интегрируется элементарными методами и мы получаем следующую метрику на $\mathscr{M}_1$ с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$ [1]:

$$\bar{g}=\frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}}+\frac{9}{25}\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}\right)\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2+\frac{9}{5}r^2 g|_{\mathscr{H}}. \tag{7}$$

Отметим, что метрика (7) была первым примером полной метрики с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$.

Далее, если положить $A_2=A_3$, то система (6) также поддается явному интегрированию, и мы приходим к следующей метрике на $\mathscr{M}_1$:

$$\bar{g}=\frac{(r-r_0)^2}{(r+r_0)(r-3r_0)}dr^2+4r_0^2\frac{(r+r_0)(r-3r_0)}{(r-r_0)^2}\eta_1^2 \\ +(r+r_0)(r-3r_0)\big(\eta_2^2+\eta_3^2\big)+2\big(r^2-r_0^2\big)g|_{\mathscr{H}}. \tag{8}$$

Метрика (8) найдена в [3] для $M=S^4$. Отметим, что в [3, 4] система (6) при условии $A_2=A_3$ полностью исследована и найдены в квадратурах явные решения, приводящие в том числе к регулярным метрикам на $\mathscr{M}_1$. Мы не приводим здесь соответствующие выражения из-за их громоздкости.

Наконец, если положить $A_2=-A_3$, то получаем следующую метрику на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ (где $p=4$ или $p=2$ в зависимости от общего слоя M, как в лемме 5), имеющую группу голономии $SU(4)\subset \mathrm{Spin}(7)$:

$$\bar{g}=\frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8}+r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8\right)\eta_1^2+r^2\big(\eta_2^2+\eta_3^2\big)+r^2 g|_{\mathscr{H}}. \tag{9}$$

Насколько нам известно, эта метрика была впервые описана в [13, 14].

§ 4. Существование метрик на $\mathscr{M}_2$

Следующие определения характеризуют поведение рассматриваемых метрик на бесконечности. Метрика (4) называется *конической*, если функции $A_i(t)$, $B(t)$ являются линейными по t и среди них нет постоянных функций. Например, метрика на конусе $\overline{M}$ получается при $A_i=B=t$. Метрика (4) называется *локально конической*, если функции $A_i(t)$, $B(t)$ линейны по t. Такие метрики локально выглядят как прямое произведение конической метрики на метрику, не зависящую от t. Наконец, метрика (4), определяемая функциями $A_i(t)$, $B(t)$, называется *асимптотически* (*локально*) *конической* (сокращенно АЛК либо

АК), если найдутся функции $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}(t)$, определяющие (локально) коническую метрику, такие, что

$$\left|1 - \frac{A_i(t)}{\widetilde{A}_i(t)}\right| \to 0 \text{ при } t \to \infty,\ i = 1,2,3; \quad \left|1 - \frac{B(t)}{\widetilde{B}(t)}\right| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Легко видеть, что все перечисленные выше метрики (7)–(9) являются АЛК.

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (4) с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset \mathrm{Spin}(7)$ и совпадает с АК-метрикой (9);

2) для каждого набора начальных значений $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$ существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathscr{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика вида (4) на пространстве $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_q$ с группой голономии $H \subset \mathrm{Spin}(7)$ изометрична одной из указанных выше.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Дадим краткую схему доказательства. Мы предлагаем перейти от системы (6) на метрику $\bar{g}$ к системе на конформный класс метрики $\bar{g}$. Для этого нормируем вектор-функцию $(A_i(t), B(t))$ и получаем динамическую систему (10) на S^3. При этом сама метрика $\bar{g}$ восстанавливается по своему конформному классу. Оказывается, для того чтобы метрика $\bar{g}$ была АЛК, нужно, чтобы траектория нормированной системы стремилась к стационарной точке (либо к условно стационарной, понятие которой мы вводим ниже). Далее, мы доказываем, что при заданных начальных данных, диктуемых условиями регулярности, существует исходящая траектория нормированной системы. Наконец, при помощи специально подобранных направляющих функций нормированной системы выясняем асимптотическое поведение траекторий, доказываем сходимость к (условно) стационарным точкам.

Рассмотрим стандартное пространство $\mathbb{R}^4$ и обозначим через $R(t) \in \mathbb{R}^4$ вектор, состоящий из функций $A_1(t), A_2(t), A_3(t), B(t)$. Пусть $V : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — функция от аргумента R, определенная правой частью системы (6) (функция V, конечно, определена лишь в области, где $A_i, B \neq 0$). Таким образом, система (6) имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Пользуясь инвариантностью V относительно гомотетий $\mathbb{R}^4$, сделаем замену $R(t) = f(t)S(t)$, где

$$|S(t)| = 1, \quad f(t) = |R(t)|, \quad S(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)).$$

Таким образом, мы «нормируем» вектор-функцию R, и наша система распадается на «радиальную» и «тангенциальную» части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S\rangle S = W(S), \tag{10}$$

$$\frac{1}{f}\frac{df}{du} = \langle V(S), S\rangle, \quad dt = f\,du. \tag{11}$$

Следовательно, нужно сначала решить автономную систему (10) на трехмерной сфере $S^3 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) | \sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 1\right\}$ и далее находить решения (6) обычным интегрированием из уравнений (11).

Лемма 6. *Система* (10) *допускает дискретную группу симметрий* $S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, *порожденную следующими преобразованиями:*

$$\sigma \in S_3 : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(3)}, \alpha_4),$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4),$$
$$(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)) \mapsto (-\alpha_1(-u), -\alpha_2(-u), -\alpha_3(-u), \alpha_4(-u))$$

(*через* S_3 *мы обозначаем симметрическую группу*).

Рассмотрим двумерные «экваторы» на S^3:

$$E_i = \{S \in S^3 \mid \alpha_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, 4,$$
$$E_{ij}^{+} = \{S \in S^3 \mid \alpha_i + \alpha_j = 0\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \; i \neq j,$$
$$E_{ij}^{-} = \{S \in S^3 \mid \alpha_i - \alpha_j = 0\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \; i \neq j.$$

Каждый из них представляет собой стандартно вложенную двумерную сферу $S^2 \subset S^3$. Следующая лемма немедленно вытекает из симметрии системы (10) относительно перестановок функций A_i.

Лемма 7. *Сфера* E_{ij}^{-} *является инвариантной поверхностью динамической системы, определенной уравнениями* (10).

Лемма 8. *Стационарные решения системы* (10) *на* S^3 *исчерпываются следующим списком нулей векторного поля* W*:*

$$\pm(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, \pm\sqrt{10}/4), \; \pm(-1/2, -1/2, 1/2, \pm 1/2),$$
$$\pm(-1/2, 1/2, -1/2, \pm 1/2), \; \pm(1/2, -1/2, -1/2, \pm 1/2).$$

Точку $S \in S^3$, в которой поле W не определено, назовем *условно стационарной*, если существует гладкая кривая $\gamma(u)$ на S^3, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(0) = S$, такая, что поле W определено во всех точках $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $u \neq 0$, и $\lim\limits_{u\to 0} W(\gamma(u)) = 0$.

Лемма 9. *Система* (10) *обладает следующими условно стационарными точками на* S^3*:*

$$\pm(0, 1/2, 1/2, \pm 1/\sqrt{2}), \; \pm(1/2, 0, 1/2, \pm 1/\sqrt{2}), \; \pm(1/2, 1/2, 0, \pm 1/\sqrt{2}).$$

Доказательство. Пусть точка $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i^2 = 1$, является условно стационарной, т. е. существует кривая $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, с указанными выше свойствами. Очевидно, что конечный предел $\lim\limits_{u\to 0} W(\gamma(u))$ существует лишь в следующих трех случаях с точностью до симметрий описанных в лемме 6: 1) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3$; 2) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha_3$; 3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

1. Положим $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\alpha_2(u) - \alpha_3(u)}{\alpha_1(u)} = h$. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\lim_{u\to 0} W_1(\gamma(u)) = 0, \quad \lim_{u\to 0} W_2(\gamma(u)) = \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 - 2h - \alpha_2\left(\frac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right),$$

$$\lim_{u\to 0} W_3(\gamma(u)) = \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 + 2h - \alpha_2\left(\frac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right),$$

$$\lim_{u\to 0} W_4(\gamma(u)) = -\frac{2\alpha_2}{\alpha_4} - \alpha_4\left(\frac{4\alpha_2^3}{\alpha_4^2} - 6\alpha_2\right).$$

Приравнивая указанные пределы к нулю, получаем условно стационарные точки $\pm(0, 1/2, 1/2, \pm 1/\sqrt{2})$. Остальные точки получаются из найденных при помощи симметрий системы (10), описанных в лемме 6.

2. Положим $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\alpha_2(u)+\alpha_3(u)}{\alpha_1(u)} = h$. Тогда

$$\lim_{u\to 0} W_1(\gamma(u)) = -4, \quad \lim_{u\to 0} W_2(\gamma(u)) = \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 + 2h,$$

$$\lim_{u\to 0} W_3(\gamma(u)) = \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_4^2} - 2 + 2h, \quad \lim_{u\to 0} W_4(\gamma(u)) = 0.$$

Очевидно, что в этом случае условно стационарных точек нет.

3. Положим $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\alpha_1(u)}{\alpha_2(u)} = h$, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\alpha_1(u)}{\alpha_3(u)} = f$. Тогда

$$\lim_{u\to 0} W_1(\gamma(u)) = -2 + \frac{f}{h} + \frac{h}{f} - hf, \quad \lim_{u\to 0} W_2(\gamma(u)) = -2 + \frac{1}{f} + f - \frac{f}{h^2},$$

$$\lim_{u\to 0} W_3(\gamma(u)) = -2 + \frac{1}{h} + h - \frac{h}{f^2}, \quad \lim_{u\to 0} W_4(\gamma(u)) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что и в этом случае условно стационарных точек нет. Лемма доказана.

Лемма 10. *Стационарным решениям системы* (10) *отвечают локально конические метрики на* $\overline{M}$, *а траекториям системы* (10), *асимптотически стремящимся к* (*условно*) *стационарным решениям, — асимптотически локально конические метрики на* $\overline{M}$.

Доказательство. Пусть S_0 — стационарное решение системы (10), т. е. $W(S_0) = 0$. Интегрируя (11), получаем $f = e^{c_1 u + c_2}$, где c_1, c_2 — константы, $c_1 = \langle V(S_0), S_0\rangle$. Тогда $R(t) = f(t)S_0 = (c_0 + c_1 t)S_0$ для некоторой константы c_0. Таким образом, $R(t)$ задает локально коническую метрику.

Пусть теперь S_0 — (условно) стационарное решение системы (10) и траектория $S(u)$ стремится к S_0 при $u \to \infty$. Ясно, что $W(S(u)) \to 0$ при $u \to \infty$. Как и ранее, рассмотрим константу $c_1 = \langle V(S_0), S_0\rangle$. В силу гладкости поля $V(S)$ вдоль кривой $S(u)$ можно сделать вывод, что $\langle V(S(u)), S(u)\rangle \to c_1$ при $u \to \infty$. Значит, $\frac{d}{du}(\ln f(u)) \to c_1$ при $u \to \infty$, и мы заключаем, что функция f не может стремиться к нулю при $u \to \infty$. Следовательно,

$$t = t_0 + \int_{u_0}^{u} f(\xi)\, d\xi \to \infty \quad \text{при} \quad u \to \infty$$

для некоторых констант u_0, t_0. Рассмотрим величину

$$\Delta = \left|1 - \frac{f(t)}{c_1 t}\right| = \frac{|c_1 t - f(t)|}{|c_1 t|}. \tag{12}$$

Если числитель правой части выражения (12) не стремится к ∞, то $\Delta \to 0$ при $u \to \infty$. В противном случае

$$\lim_{u\to\infty} \Delta = \left| \lim_{u\to\infty} \frac{c_1 \frac{dt}{du} - \frac{df}{du}}{c_1 \frac{dt}{du}} \right| = \left| \lim_{u\to\infty} \frac{c_1 - \frac{d}{du}(\ln f)}{c_1} \right| = 0.$$

Итак, $\Delta \to 0$ при $u \to \infty$, т. е. и при $t \to \infty$. Осталось заметить, что $R(t) = f(t)S(t)$, где $S(t) \to S_0$ при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно увидеть, что траектория системы (10), отвечающая решению (7), сходится к стационарной точке $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, \sqrt{10}/4)$, траектория, отвечающая решению (9), — к стационарной точке $(1/2, 1/2, -1/2, 1/2)$ и траектория, отвечающая решению (8), — к условно стационарной точке $(0, 1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$.

Рассмотрим окружности $C_i^{\pm}$, $i = 1, 2, 3$, стандартно вложенные в S^3: $C_1^{\pm} = E_1 \cap E_{23}^{\pm}$, $C_2^{\pm} = E_2 \cap E_{31}^{\pm}$, $C_3^{\pm} = E_3 \cap E_{12}^{\pm}$. Пусть $Q_{\pm} = (0, 0, 0, \pm 1)$ — полюсы сферы S^3, в которых пересекаются все рассмотренные окружности.

В силу леммы 5 для построения регулярной метрики на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ необходима траектория системы (10), выходящая из любой точки на окружностях C_i^+, отличной от полюсов $Q_{\pm}$. Ввиду леммы 6 мы можем без ограничения общности рассматривать в качестве начальной точку $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu)$, где $\lambda, \mu > 0$ и $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$. Остальные решения получатся из рассмотренного случая при помощи симметрий системы (10).

Лемма 11. *Для любой рассмотренной выше точки* $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu) \in C_1^+$ *существует единственная гладкая траектория системы* (10), *выходящая из точки* S_0 *в область* $\alpha_1 < 0$.

Доказательство. Пусть $J = C_1^+ \cap \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_3 > 0,\ \alpha_4 > 0\}$ — дуга окружности, содержащая точку S_0. Обозначим через U открытый шар в $\mathbb{R}^2$ с координатами $x = \alpha_1$, $y = \alpha_2 + \alpha_3$ радиуса ε с центром в нуле. Тогда в окрестности дуги J можно рассмотреть локальные координаты $x, y, z = \alpha_4$. В этих координатах поле W имеет следующие компоненты:

$$W_x = W_1, \quad W_y = W_2 + W_3, \quad W_z = W_4,$$

где $\widetilde{W}_j(S) = V_j(S) - \langle V(S), S\rangle \alpha_j$, $j = 1, 2, 3, 4$,

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \left(x, \frac{1}{2}(y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}), \frac{1}{2}(y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}), z\right),$$

$$V_1(S) = -2 + 2\frac{x^2}{z^2} + 2\frac{1 - z^2 - 2x^2}{z^2 + x^2 + y^2 - 1},$$

$$V_2(S) = \frac{(y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2})^2}{2z^2} - 2 + \frac{2x}{y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}} + \frac{y}{x}\frac{2\sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}}{y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}}, \quad (13)$$

$$V_3(S) = \frac{(y + \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2})^2}{2z^2} - 2 + \frac{2x}{y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}} - \frac{y}{x}\frac{2\sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}}{y - \sqrt{2 - 2z^2 - 2x^2 - y^2}},$$

$$V_4(S) = -\frac{x+y}{z},$$

$$\langle V(S), S\rangle = V_1(S)x + \frac{1}{2}V_2(S)(y - \sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}) \\ + \frac{1}{2}V_3(S)(y + \sqrt{2-2z^2-2x^2-y^2}) + V_4(S)z.$$

В окрестности $J \times U$ рассмотрим систему

$$\frac{d}{dv}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xW_x \\ xW_y \\ xW_z \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Очевидно, что траектории системы (14) совпадают с траекториями системы (10) с точностью до замены параметра $du = x\,dv$. Векторное поле xW является гладким в окрестности $J \times U$, и непосредственные вычисления показывают, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарными точками системы (14) в $J \times U$ будут в точности точки интервала J. Рассмотрим линеаризацию системы (14) в окрестности точки S_0:

$$\frac{dx}{dv} = -4x, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 4y, \quad \frac{dz}{dv} = 0.$$

Линеаризованная система имеет три собственных вектора $e_1 = \left(8, \frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}, 0\right)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ с собственными числами -4, 4 и 0 соответственно.

Из (13) следует, что если $(x,y,z) \to S_0 = (0,0,\mu)$, то $\left\langle (0,0,1), \frac{xW}{|xW|}\right\rangle \to 0$, т. е. угол между вектором xW и вектором, касательным к дуге J, стремится к $\pi/2$ при подходе к точкам J. Это позволяет восстановить «фазовый портрет» системы (14) в окрестности $J \times U$ аналогично тому, как это делается в классическом случае. А именно, рассмотрим область Γ в $J \times U$, ограниченную параболическими цилиндрами $-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y - \alpha x^2 = 0$, $-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y + \alpha x^2 = 0$ и плоскостью $x = \delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Легко посчитать, что в точках первого параболического цилиндра

$$\frac{d}{dv}\left(-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2}x + 8y - \alpha x^2\right) = 12\alpha x^2 + O(x^2+y^2) \geq 0,$$

если выбрать константу α достаточно большой (причем равенство достигается только на J). Значит, траектории пересекают первый параболический цилиндр, проходя изнутри области Γ наружу. Аналогично показывается, что траектории системы (14) пересекают второй параболический цилиндр, ограничивающий область Γ, также проходя изнутри области наружу. Тогда для каждого значения $z = z_0$ найдется траектория, начинающаяся на плоской стенке области в точке (δ, y, z_0), которая входит в точку на оси J, если выбрать δ достаточно малым, а α достаточно большим (это следует из того, что такая траектория не может сильно отклониться вдоль J, поскольку угол, который она составляет с J, стремится к $\pi/2$). Следовательно, если фиксировать точку $S_0 = (0,0,\mu)$ на дуге J, то при уменьшении δ и увеличении α можно найти траекторию, входящую экспоненциально с порядком e^{-4v} в точку S_0 со стороны области $x > 0$. Аналогично будет существовать единственная траектория, входящая в S_0 с противоположной стороны, т. е. со стороны области $x < 0$. Поскольку порядок сходимости x

к нулю равен e^{-4v}, то относительно параметра u произойдет «вход» в точку S_0 за конечное время.

Заметим теперь, что при переходе от параметра u к параметру v происходит обращение ориентации траекторий в области $x<0$. Это означает, что для каждой точки S_0 существует единственная траектория, за конечное время выходящая из точки S_0 и входящая в область $x<0$. При этом выходящая из S_0 траектория будет касаться вектора $e_1=\left(-8,-\frac{2(3\mu^2-1)}{\mu^2},0\right)$. Лемма доказана.

Таким образом, как следует из леммы 11, существуют траектория $S(u)$ системы (10), выходящая при $u=u_0$ из точки S_0, а вместе с ней метрика на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$, регулярная в некоторой окрестности нулевого сечения $\mathscr{O}$. Дальнейшая задача — выяснить поведение метрики при больших u.

Следующая лемма вытекает из непосредственного анализа систем (6) и (10).

Лемма 12. *Если* $S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ *— решение системы* (10), *то имеют место следующие соотношения:*

1) $\frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|\right)=(\alpha_1-\alpha_2)\left[\frac{2}{\alpha_4^2}-2\frac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right]$,
2) $\frac{d}{du}(\alpha_2+\alpha_3)=\frac{4}{\alpha_4^2}(\alpha_2+\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)$, *если* $\alpha_2+\alpha_3=0$,
3) $\frac{d}{du}(\alpha_2+\alpha_4)=\frac{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, *если* $\alpha_2+\alpha_4=0$,
4) $\frac{d}{du}\left(\ln\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|\right)=2\frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_4)}{\alpha_2^2\alpha_4^2}$, *если* $\alpha_1=\alpha_2$,
5) $\frac{d}{du}(\alpha_1+\alpha_2)\to16\left(\alpha_2-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha_2+\frac{1}{2}\right)$ *если* $\alpha_1-\alpha_2\to0$, $\alpha_3\to0$.

Лемма 13. *Траектория системы* (10), *определенная начальной точкой* $S_0=(0,-\lambda,\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu>0$, $2\lambda^2+\mu^2=1$, *обладает одной из следующих асимптотик в зависимости от параметра* μ:

1) *если* $\mu=1/\sqrt{3}$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u\to\infty$ *к стационарной точке* $S_\infty=(-1/2,-1/2,1/2,1/2)$;

2) *если* $\mu>1/\sqrt{3}$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u\to\infty$ *к условно стационарной точке* $S_\infty=(-1/2,-1/2,0,1/\sqrt{2})$;

3) *если* $\mu<1/\sqrt{3}$, *то* $S(u)$ *стремится при* $u\to u_1<\infty$ *к точке* $S_1=(0,0,1,0)$.

Доказательство. Введем обозначения для следующих точек в S^3:

$$O=Q_+=(0,0,0,1),\ A=(0,-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),\ B=(-1/2,-1/2,1/2,1/2),$$

$$C=(0,-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),\quad D=(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},0,1/\sqrt{3}),$$

$$E=(0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),\quad F=(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},0),\quad G=(0,0,1,0).$$

Рассмотрим две области $\Pi,\Gamma\subset S^3$, определенные неравенствами

$$\Pi:\alpha_1\le0,\ \alpha_2\le\alpha_1,\ \alpha_2+\alpha_3\le0,\ \alpha_2+\alpha_4\ge0,\ \alpha_3\ge0,$$

$$\Gamma:\alpha_1\le0,\ \alpha_2\le\alpha_1,\ \alpha_2+\alpha_3\ge0,\ \alpha_2+\alpha_4\le0,\ \alpha_4\ge0.$$

Нетрудно убедиться, что области Π и Γ являются сферическими пирамидами $(OABCD)$ и $(GABEF)$ соответственно. Границами пирамид служат следующие множества:

$\Pi_1=(OAC)=\{\alpha_1=0,\alpha_2+\alpha_3\le0,\alpha_2+\alpha_4\ge0,\alpha_3\ge0\}\subset E_1$,
$\Pi_2=(OBD)=\{\alpha_2=\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3\le0,\alpha_2+\alpha_4\ge0,\alpha_3\ge0\}\subset E_{12}^-$,
$\Pi_3=(OCD)=\{\alpha_1\le0,\alpha_2\le\alpha_1,\alpha_3=0,\alpha_2+\alpha_4\ge0\}\subset E_3$,
$\Pi_4=(OAB)=\{\alpha_1\le0,\alpha_2\le\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3=0,\alpha_2+\alpha_4\ge0\}\subset E_{23}^+$,

$\Pi_5 = (ABCD) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \le 0, \alpha_2 + \alpha_4 = 0, \alpha_3 \ge 0\}$;
$\Gamma_1 = (GAE) = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_1$,
$\Gamma_2 = (GBF) = \{\alpha_2 = \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_{12}^-$,
$\Gamma_3 = (GEF) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_4 = 0\} \subset E_4$,
$\Gamma_4 = (ABFE) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_2 + \alpha_4 \le 0, \alpha_4 \ge 0\} \subset E_{23}^+$,
$\Gamma_5 = (GAB) = \{\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \le \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \ge 0, \alpha_2 + \alpha_4 = 0\}$.

Пирамиды пересекаются по общему участку границы (AB). Ясно, что по дуге (AB) от точки A до точки B идет траектория системы (10), отвечающая метрике (9) с группой голономии $SU(4)$. Начальная точка $S_0 = (0, -\lambda, \lambda, \mu) \in (OE)$.

1. Предположим, что $S_0 \in (OA)$. Если при этом $\mu = 1/\sqrt{3}$, т. е. $S_0 = A$, то траектория совпадает с (AB). Пусть $S_0 \ne A$, т. е. $\mu > 1/\sqrt{3}$. Тогда вектор e_1 (см. доказательство леммы 11) направлен строго внутрь области Π, т. е. при малых u траектория системы (10) попадает в Π. Предположим, что траектория за конечное время $u = u_1$ впервые достигает границы в некоторой точке S_1.

Определим функцию F_1 на S^3: $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{-\alpha_1}{-\alpha_2}$. Из соотношения 1 леммы 12 следует, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (10), идущих внутри областей Π и Γ. Заметим, что $F(S(u)) \to -\infty$ при $u \to u_0 + 0$ и функция $F(S(u))$ строго возрастает при $u > u_0$. Значит, траектория уже не может вернуться в Π_1 (кроме разве точки O) по крайней мере до тех пор, пока не покинула область Π. Таким образом, $S_1 \notin \Pi_1 \backslash \{O\}$. Далее, правая часть соотношения 2 из леммы 12 отрицательна при $S \in \Pi_4$, а правая часть соотношения 3 из леммы 12 положительна при $S \in \Pi_5$. Следовательно, векторное поле W направлено внутрь области Π в точках из Π_4, Π_5, т. е. $S_1 \notin \Pi_4, \Pi_5$.

Допустим, что $S_1 \in \Pi_3 \backslash \Pi_2$. Тогда можно заметить, что компонента W_3 поля W является гладкой функцией в точках Π_3. Следовательно, можно на траектории $S(u)$ перейти к новому параметру α_3 в некоторой окрестности точки S_1, причем точка S_1 достигается при $\alpha_3 = 0$. Кроме того, тангенциальная составляющая поля W имеет в окрестности S_1 порядок $1/\alpha_3$. Это означает, что кривая $S(u)$ не может дойти за конечное время до Π_3. Остается только случай $S_1 \in \Pi_2$, но $(\Pi_2 \backslash \Pi_3) \subset E_{12}^-$ — инвариантная поверхность системы (10), на которой система удовлетворяет теоремам единственности. Поэтому достижение за конечное время точки из $\Pi_2 \backslash \Pi_3$ противоречило бы единственности траекторий. Итак, остается случай $S_1 \in \Pi_2 \cap \Pi_3 = (OD)$.

Предположим, что $S_1 = (\alpha, \alpha, 0, \sqrt{1 - 2\alpha^2})$, $0 \le -\alpha \le 1/\sqrt{3}$. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — касательный вектор к траектории $S(u)$ в точке S_1. Тогда имеет место очевидное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to -0} W(S_1 + \varepsilon X) = \lim_{u \to u_1} W(S(u)) = X.$$

Если $\alpha \ne 0$, то пределы $W(S(u))$ при $u \to u_1$ посчитаны в п. 1 доказательства леммы 9 (с заменой индексов $1, 2, 3$ на $3, 1, 2$). Значит, получаем $x_3 = 0$, что возможно только при $X = 0$. Таким образом, $S_1 = (-1/2, -1/2, 0, 1/\sqrt{2})$ — условно стационарная точка, которая достигается за бесконечное время. Если теперь $\alpha = 0$, т. е. $S_1 = Q_+$, то $X = (x_1, x_2, x_3, 0)$, $x_i \ne 0$, $i = 1, 2, 3$, и соответствующий предел $W(S(u))$ посчитан в п. 3 доказательства леммы 9. После несложных вычислений получаем вектор $X = (-1, -1, -1, 0)$, который входит в точку Q_+ не из области Π, поэтому не подходит.

Итак, траектория $S(u)$ не может за конечное время достигнуть границы области Π, т. е. она целиком лежит в Π, $u \in (u_0, \infty)$. Выясним предельные точки $S(u)$ при $u \to \infty$.

Во-первых, как отмечалось выше, функция F_1 возрастает вдоль траектории $S(u)$. Поскольку внутри области Π нет стационарных точек W (лемма 8), то $S(u)$ при $u \to \infty$ стремится к максимальному (в Π) уровню функции F_1, т. е. к Π_2. Далее, рассмотрим функцию $F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{-\alpha_2}{\alpha_3}$.

Из соотношения 4 леммы 12 следует, что F_2 возрастает внутри области Π в окрестности Π_2. Значит, при $u \to \infty$ траектория $S(u)$ стремится к максимальному уровню F_2 на стенке Π_2, т. е. к $\Pi_2 \cap \Pi_3 = (OD)$, либо к стационарной точке, лежащей на Π_2, — к точке B. Введем в окрестности точки B координаты $x = \alpha_1 + \frac{1}{2}$, $y = \alpha_2 + \frac{1}{2}$, $z = \alpha_3 - \frac{1}{2}$ и рассмотрим линеаризацию системы (10):

$$\frac{dx}{du} = -19x - 3y + 6z, \quad \frac{dy}{du} = -3x - 19y + 6z, \quad \frac{dz}{du} = -13x - 13y + 10z. \quad (15)$$

Непосредственно проверяется, что (15) имеет одно положительное собственное число 4 и два кратных, равных -16. Кратным собственным числам соответствует плоскость $x+y-2z = 0$, состоящая из собственных векторов. Следовательно, в некоторой окрестности точки B будет существовать инвариантная двумерная поверхность, касательная к плоскости $x+y-2z = 0$ и состоящая из траекторий системы (10), входящих асимптотически экспоненциально в точку B; при этом никакие другие траектории в точку B не входят. Легко проверить, что эта поверхность пересекается с областями Π и Γ лишь по дуге (AB) и трансверсальна стенкам Π_4, Π_5, Γ_4, Γ_5, примыкающим к (AB). Следовательно, кроме (AB), ни одна другая траектория из рассматриваемых нами не может войти в B. Таким образом, траектория $S(u)$ стремится к (OD) при $u \to \infty$.

Наконец, рассмотрим функцию $F_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1 + \alpha_2$. Из соотношения 5 леммы 12 следует, что в окрестности дуги (OD) траектория $S(u)$ стремится к точке, в которой $\alpha_2 = -1/2$, т. е. $S(u) \to S_\infty = (-1/2, -1/2, 0, 1/\sqrt{2})$.

2. Предположим, что $S_0 \in (AE)$, причем $\mu < 1/\sqrt{3}$. Здесь рассуждение проводится аналогично п. 1. Сначала последовательно выясняется, в каких точках траектория может за конечное время достичь границы области Γ.

Предположим, что $S_1 = S(u_1) \in \partial\Gamma$. В стенках Γ_4, Γ_5 поле W смотрит внутрь области, что следует из соотношений 2, 3 леммы 12. Таким образом, $S_1 \notin \Gamma_4, \Gamma_5$; к стенке Γ_1 мешает подойти возрастание функции F_1. Далее, если траектория $S(u)$ может достичь стенки Γ_3 за конечное время в некоторой точке $S_1 = S(u_1)$, то такое может быть только в случае $S_1 = G$. Действительно, если $S_1 \neq G$, то можно вдоль кривой $S(u)$ рассмотреть параметр α_4^2. Легко устанавливается, что при этом нормальная по отношению к Γ_3 компонента W ограничена, а тангенциальная стремится к бесконечности; противоречие. То же касается стенки Γ_2 — она инвариантна относительно динамической системы, и во всех ее точках, кроме $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = (FG)$, имеет место теорема единственности траекторий, поэтому никакая траектория, приходящая изнутри, не пересекается с $\Gamma_2 \backslash \{G\}$. Итак, возможен только один случай $S_1 = G$.

Если траектория не доходит до границы Γ за конечное время, то из возрастания функции F_1 следует, что траектория стремится к Γ_2 (мы используем здесь также отсутствие стационарных точек внутри Γ). Свойство 4 леммы 12 показывает, что функция F_2 убывает вдоль траектории. Значит, траектория стремится либо к стационарной точке на Γ_2 (такая точка одна — B), либо к минимальному уровню функции F_2, каковым является точка G. К точке B траектория стремится при $\mu = 1/\sqrt{3}$, а все остальные траектории к этой точке сходиться не могут (рассуждение в точности такое, как в п. 1 доказательства с использованием линеаризации (15) в точке B).

Итак, мы показали, что при $\mu < 1/\sqrt{3}$ возможен только один вариант: траектория $S(u)$ сходится к G за конечное либо бесконечное время. Однако можно заметить, что если взять в качестве параметра на кривой $S(u)$ величину α_4^2, то замена параметра будет гладкой в окрестности точки G. Следовательно, траектория доходит до точки G за конечное либо бесконечное время одновременно для обоих параметров u и α_4^2. С другой стороны, очевидно, что $S(\alpha_4^2) \to G$ при $\alpha_4^2 \to 0$, т. е. $S(u)$ достигает G за конечное время. Лемма доказана.

Следующая лемма завершает доказательство нашей основной теоремы.

Лемма 14. *Группа голономии метрики $\bar{g}$ на $\mathscr{M}_2$, определенной начальной точкой S_0, при $\mu > 1/\sqrt{3}$ совпадает со всей группой* $\mathrm{Spin}(7)$.

Доказательство. Допустим, что $G \subset \mathrm{Spin}(7)$ — группа голономии пространства $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$ с метрикой (4). Асимптотически метрика (4) стремится к метрике, локально изометрической произведению $\mathbb{R} \times C(\mathscr{Z})$. Следовательно, существует подгруппа $H \subset G$, которая является группой голономии предельной метрики на $\mathbb{R} \times C(\mathscr{Z})$. По теореме де Рама группа H равна произведению единичной группы (тривиально действующей на $\mathbb{R}$) и группы голономии H_1 конуса над $\mathscr{Z}$. Поскольку конус семимерен, то априори возможны лишь три случая: $H_1 = SO(7)$, либо $H_1 = G_2$, либо конус над $\mathscr{Z}$ является плоским пространством. В последнем случае $\mathscr{Z}$ обязано быть шестимерной сферой, что противоречит тому факту, что $\mathscr{Z}$ — многообразие (или в общем случае орбифолд) Кэлера — Эйнштейна. Первый случай вообще невозможен, поскольку $H \subset G \subset \mathrm{Spin}(7)$. Остается $G_2 \simeq H \subset G \subset \mathrm{Spin}(7)$. Из классификации простых групп Ли и из классификации групп голономий следует, что это возможно лишь при $G = \mathrm{Spin}(7)$. Лемма доказана.

§ 5. Обоснование условий регулярности

Мы приводим доказательства лемм 4 и 5 для полноты и строгости изложения, поскольку оказалось затруднительно дать точную ссылку. Тем не менее у нас нет сомнений, что эти утверждения специалистам знакомы (а интуитивно очень понятны).

Доказательство леммы 4. Для того чтобы получить риманову метрику на $\mathscr{M}_1$, необходимо, чтобы функции $A_i(t)$, $B(t)$ были знакоопределенны на промежутке $(0, \infty)$ и $A_i(0) = 0$, $B(0) \neq 0$. При этом вне $\mathscr{O} \subset \mathscr{M}_1$ гладкость метрики $\bar{g}$ равносильна гладкости функций $A_i(t)$, $B(t)$ при $t > 0$. Выясним, что происходит в окрестности $\mathscr{O}$.

Пусть G — общий слой 3-сасакиева слоения на M, изометричный либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$. Как и ранее, через $\pi : M \to \mathscr{O}$ обозначим главное G-расслоение M над $\mathscr{O}$. Пусть $F = \mathbb{H}$ при $G = Sp(1)$ и $F = \mathbb{H}/\mathbb{Z}_2$ при $G = SO(3)$ — слой ассоциированного с π расслоения $\mathscr{M}_1$ над $\mathscr{O}$. Рассмотрим произвольную точку $q \in \mathscr{O}$. Тогда существуют открытое множество $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^4$ и дискретная группа $\Gamma \subset G$, действующая на $\widetilde{U}$ таким образом, что некоторая окрестность $\pi^{-1}(q)$ диффеоморфна $(\widetilde{U} \times G)/\Gamma$ (см. доказательство теоремы 1). Действие группы Γ на G сдвигами очевидным образом продолжается до действия Γ на F. Следовательно, некоторая окрестность точки q в $\mathscr{M}_1$ гомеоморфна $(\widetilde{U} \times F)/\Gamma$.

Очевидно, что в случае $G = Sp(1)$ набор, состоящий из $\widetilde{U} \times \mathbb{H}$, группы Γ и соответствующего гомеоморфизма, дает карту на орбифолде $\mathscr{M}_1$ в окрестности точки q и все такие карты попарно согласованы. Если $G = SO(3)$, то в качестве карты нужно рассмотреть $\widetilde{U} \times \mathbb{H}$ (двулистно накрывающее $\widetilde{U} \times \mathbb{H}/\mathbb{Z}_2$), а в качестве группы — группу $\widetilde{\Gamma}$, накрывающую группу Γ при стандартном $\mathbb{Z}_2$-накрытии $Sp(1) \to SO(3)$. Таким образом, для гладкости метрики (4) в окрестности $\mathscr{O}$ нужно показать гладкость метрики, поднятой на каждую построенную выше окрестность $\widetilde{U} \times \mathbb{H}$.

Для каждого $p \in \widetilde{U}$ рассмотрим ограничение метрики $\bar{g}$ на $\{p\} \times \mathbb{H}$:

$$\bar{g}_v = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2. \tag{16}$$

Здесь t — радиальный параметр на $\mathbb{H}$ и метрика $\bar{g}_v$ не зависит от выбора p. Нам понадобится следующий результат.

Лемма 15 [11, 15]. *Метрика $g = dr^2 + h^2(r)\,d\phi^2$, заданная в полярной системе координат (r, ϕ) на стандартном двумерном диске $r \le r_0$, $0 \le \phi \le 2\pi$, является гладкой римановой метрикой тогда и только тогда, когда $|h(r)| > 0$ при $r \in (0, r_0]$ и функция $h(r)$ продолжается до гладкой нечетной функции $h(r)$, определенной на $(-r_0, r_0)$, такой, что $|h'(0)| = 1$.*

Пусть метрика (4) гладкая, следовательно, метрика (16) гладкая. Будем считать, что векторные поля ξ^i, ограниченные на $S^3 \subset \mathbb{H}$, представлены как qi, qj, qk, где $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Рассмотрим ограничение метрики (16) на плоскость, порожденную векторами 1 и i в $\mathbb{H}$:

$$\bar{g}_v|_{1,i} = dt^2 + A_1(t)^2 \eta_1^2.$$

Эта метрика гладкая, если $\bar{g}_v$ гладкая, и, следовательно, по лемме 15 функция A_1 удовлетворяет условию 1 леммы 4. Аналогично из гладкости $\bar{g}_v$ следует выполнение условия 1 леммы 4 для всех A_1–A_3. Далее, метрика (4) является скрещенным произведением метрики (16) и метрики $g|_{\mathscr{H}}$ со скрещивающей функцией $B(t)$, рассматриваемой как функция на $\mathbb{H}$. Отсюда без труда вытекает, что $B'(0) = 0$.

Обратно, пусть условия 1–3 леммы 4 выполнены. Выражение для dA_i/dt позволяет произвести k-кратное формальное дифференцирование по t. Пусть $V_i^{(k)} = d^k A_i/dt^k$ — рациональная функция от переменных A_1, A_2, A_3, B, $i = 1, 2, 3$. Аналогично пусть $V_4^{(k)} = d^k B/dt^k$. Из условий на функции A_i следует, что существуют функции $a_i(t)$, определенные и C^∞-гладкие при $t \ge 0$, такие, что $A_i(t) = t a_i(t)$, $|a_i(0)| = 1$.

Положим $\widetilde{A}_i(t) = -A_i(-t)$ и $\widetilde{B}(t) = B(-t)$ при $t \le 0$. Ясно, что полученные функции $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}(t)$ принадлежат классу C^∞ на промежутке $t \le 0$ и $\widetilde{A}_i(t) = t a_i(-t)$ при $t \le 0$. Более того, из инвариантности системы (6) относительно преобразования $(t, A_i, B) \mapsto (-t, -A_i, B)$ следует, что $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}(t)$ — решение системы (6). Далее,

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t>0} (A_i(t)) = V_i^{(k)}(A_i(t), B(t)) = t^m \frac{P(a_i(t), B(t))}{Q(a_i(t), B(t))}, \tag{17}$$

где полиномы P и Q имеют ненулевые значения при $t = 0$. Поскольку по условию решения $A_i(t), B(t)$ бесконечно гладкие при $t \ge 0$, должен существовать предел выражения (17) при $t \to \infty$ и, следовательно, $m \ge 0$. Подставив в (17) кривую $\widetilde{A}_i(t)$, $\widetilde{B}(t)$, видим, что производные всех порядков функций $A_i(t)$

в точке $t=0$ справа совпадают с соответствующими производными функций $\widetilde{A}_i(t)$ в точке $t=0$ слева (заметим, что отсюда, в частности, следует тривиальность производных четного порядка). Итак, функции $A_i(t)$ и $\widetilde{A}_i(t)$ вместе образуют C^∞-гладкие нечетные функции в окрестности точки $t=0$. Совершенно аналогично функции $B(t)$ и $\widetilde{B}(t)$ образуют C^∞-гладкую четную функцию в окрестности точки $t=0$.

В каждой точке $q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$ можно разложить стандартный координатный базис $\partial/\partial q_i$ по базису $q/|q|$, qi, qj, qk, двойственному формам dt, η_1, η_2, η_3. Это немедленно позволяет посчитать компоненты метрического тензора (16) относительно стандартных координат q_0,q_1,q_2,q_3 в $\mathbb{H}$:

$$g_{00}(q)=\frac{q_0^2|q|^2+A_1^2(|q|)q_1^2+A_2^2(|q|)q_2^2+A_3^2(|q|)q_3^2}{|q|^4},$$

$$g_{11}(q)=\frac{q_1^2|q|^2+A_1^2(|q|)q_0^2+A_2^2(|q|)q_3^2+A_3^2(|q|)q_2^2}{|q|^4},$$

$$g_{01}=\frac{q_0q_1\big(|q|^2-A_1^2(|q|)\big)+q_2q_3\big(A_2^2(|q|)-A_3^2(|q|)\big)}{|q|^4},$$

$$g_{12}=\frac{q_1q_2\big(|q|^2-A_3^2(|q|)\big)+q_0q_3\big(A_1^2(|q|)-A_2^2(|q|)\big)}{|q|^4}$$

(мы приводим лишь некоторые компоненты; остальные получаются из данных соответствующей перестановкой индексов $1,2,3$). Используем следующий несложный факт: если гладкая функция $f(t)$, определенная в окрестности точки $t=0$, нечетна, то $f^2(t)$ — гладкая функция аргумента $u=t^2$ в окрестности точки $t=0$. Для доказательства надо лишь заметить, что в разложении Тейлора функции f до любого порядка будут присутствовать лишь четные степени переменной t и $\frac{d}{du}=\frac{1}{t}\frac{d}{dt}$. Отсюда без труда выводятся существование и непрерывность в точке $t=0$ производной любого порядка функции $f(u)$. Поскольку мы доказали, что функции $A_i(t)$ продолжаются до нечетных функций, тем самым показано, что компоненты метрического тензора, а с ними и метрика (15) являются гладкими.

Вспомним теперь, что метрика (4) является скрещенным произведением $\widetilde{U}$ и $\mathbb{H}$ со скрещивающей функцией $B(t)$, рассматриваемой как функция на $\mathbb{H}$. Следовательно, гладкость метрики равносильна гладкости функции $B(t)$. Схожими рассуждениями (см. также [15]), которые мы опускаем, доказывается, что гладкость B на $\mathbb{H}$ равносильна продолжаемости $B(t)$ до четной функции в окрестности $t=0$, что гарантируется условием 2 леммы. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5 проводится в целом аналогично доказательству леммы 4, и мы сохраняем прежние обозначения для G, π и т. д. Во-первых, чтобы получить риманову метрику на $\mathscr{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо, чтобы функции $A_i(t)$, $B(t)$ были знакоопределенными на промежутке $(0,\infty)$ и $A_1(0)=0$, $A_2(0)\neq 0$, $A_3(0)\neq 0$ и $B(0)\neq 0$. Вне $\mathscr{Z}\subset\mathscr{M}_2$ гладкость метрики $\bar{g}$ равносильна гладкости функций $A_i(t)$, $B(t)$ при $t>0$. Выясним, что происходит в окрестности $\mathscr{Z}$.

Пусть $S\subset G$ — окружность, интегрирующая поле ξ^1. Обозначим через $\pi':\mathscr{Z}\to\mathscr{O}$ расслоение со слоем $S^2=G/S$. Пусть $q\in\mathscr{O}$. Рассмотрим небольшую окрестность U точки q и соответствующую окрестность $\widetilde{U}\subset\mathbb{R}^4$ такую, что $\widetilde{U}/\Gamma=U$ для некоторой дискретной подгруппы $\Gamma\subset G$, действующей на

$\widetilde{U}$ диффеоморфизмами. Если окрестность $\widetilde{U}$ выбрана достаточно малой, то ${\pi'}^{-1}(U) = (\widetilde{U} \times (G/S))/\Gamma$. Тогда $(\pi' \circ \pi)^{-1}(U)$ диффеоморфно $(\widetilde{U} \times (G \times \mathbb{C})/S)/\Gamma$ и гладкость метрики (4) равносильна гладкости метрики, поднятой на каждую окрестность $\widetilde{U} \times (G \times \mathbb{C})/S$.

Метрика (4) представляет собой скрещенное произведение метрики (16) на $(G \times \mathbb{C})/S$ и метрики $g|_{\mathscr{O}}$ на $\widetilde{U}$ со скрещивающей функцией $B(t)$. Если (4) — гладкая метрика, то очевидно, что функция B должна быть гладкой и продолжаться до четной функции от радиального параметра t на $\mathbb{C}$, т. е. удовлетворять условию 3 леммы 5. Далее, из гладкости ограничения метрики (16) на $\mathbb{C}$ и леммы 15 следует, что A_1 удовлетворяет условию 1 леммы 5. Наконец, для того чтобы A_2, A_3 имели производные в точке $t = 0$, необходимо, чтобы либо $A_2(0) = A_3(0)$ (что противоречит условию 1 леммы), либо $A_2(0) = -A_3(0)$, откуда без труда выводятся условия 2 леммы 5.

Обратно, пусть гладкие на $[0, \infty)$ функции A_i, B удовлетворяют всем условиям леммы 5. Как и в предыдущей лемме, показывается, что функция B продолжается до четной гладкой функции аргумента t, поэтому для доказательства гладкости метрики скрещенного произведения (4) достаточно доказать гладкость метрики (16).

Рассмотрим проекцию $p : (G \times \mathbb{C})/S \to G/S$. Ясно, что $(G \times \mathbb{C})/S$ послойно диффеоморфно либо комплексному одномерному каноническому расслоению при $G = Sp(1)$, либо его дублю при $G = SO(3)$. При этом расслоение p — это каноническое расслоение над двумерной сферой G/S. Метрика (16) превращает p в риманову субмерсию со слоем, диффеоморфным $\mathbb{C}$. Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{H}$ — взаимно ортогональные распределения вертикальных и горизонтальных векторов субмерсии p соответственно. Ограничение метрики (16) на $\mathscr{V}$ выглядит следующим образом:

$$dt^2 + A_1^2(t)\eta_1^2. \tag{18}$$

Как в доказательстве леммы 4, показывается, что $A_1(t)$ продолжается до гладкой нечетной функции, откуда ввиду леммы 15 следует гладкость метрики (18) на $\mathscr{V}$. Рассмотрим небольшую окрестность $V \subset G/S$ и точку $gS \in V$. Прообраз точки gS при отображении p выглядит как $(g, z)S \in p^{-1}(gS)$, где $z \in \mathbb{C}$. Горизонтальный касательный вектор в точке $(g, z)S$ можно отождествить с вектором gX, где $X \in sp(1) = \mathrm{Im}(\mathbb{H})$, $X = x_2 j + x_3 k$, $x_i \in \mathbb{R}$. При этом для $s \in S$ векторы gX и gsY проектируются в один и тот же вектор, касательный к G/S в точке gS тогда и только тогда, когда $Y = s^{-1}Xs$. Рассмотрим поля X_1 и X_2 на $(G \times \mathbb{C})/S$, определив их в каждой точке $(g, z)s$ как $g(s^{-1}js)$ и $g(s^{-1}ks)$ соответственно. Тогда поля X_1, X_2 проектируются в некоторые гладкие поля $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ в окрестности V. Ясно, что поля $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$ образуют базис модуля гладких векторных полей в окрестности V и нам нужно проверить гладкость компонент $g_{ij} = g(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j) = g(X_i, X_j)$:

$$\begin{gathered} g_{11} = \frac{A_2^2(|w|) + A_3^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}\big(A_2^2(|w|) - A_3^2(|w|)\big), \\ g_{22} = \frac{A_2^2(|w|) + A_3^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}\big(A_3^2(|w|) - A_2^2(|w|)\big), \\ g_{12} = \frac{y}{2|w|}\big(A_2^2(|w|) - A_3^2(|w|)\big), \end{gathered} \tag{19}$$

где $s = e^{i\phi} \in S$, $t = |z|$ и мы положили $w = x + yi = te^{4i\phi}$.

Доопределим функцию $A_2(t)$ при $t \leq 0$, положив $A_2(t) = -A_3(-t)$ при $t \leq 0$, и аналогично положим $A_3(t) = -A_2(-t)$ при $t \leq 0$. Точно так же, как в доказательстве леммы 4, показывается, что продолженные таким образом функции $A_2(t)$ и $A_3(t)$ являются C^∞-гладкими в окрестности точки $t = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что четные коэффициенты в разложении функций A_2 и A_3 в полином Тейлора противоположны по знаку, а нечетные — совпадают. Далее уже нетрудно показать, что функция $A_2^2 + A_3^2$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Совершенно аналогично функция $\frac{A_2^2 - A_3^2}{|w|}$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Следовательно, функции, входящие в правые части (19), гладкие, откуда следуют гладкость ограничения метрики (16) на $\mathscr{H}$ и гладкость метрики (4). Лемма 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bryant R. L., Salamon S. L.* On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.
2. *Joyce D. D.* Compact Riemannian 8-manifolds with holonomy Spin(7) // Invent. Math. 1996. V. 123, N 3. P. 507–552.
3. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* New complete non-compact Spin(7) manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, N 1–2. P. 29–54.
4. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* New cohomogeneity one metrics with Spin(7) holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, N 3–4. P. 350–365.
5. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* Cohomogeneity one manifolds of Spin(7) and $G(2)$ holonomy // Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N 10. 29 p.
6. *Gukov S., Sparks J.* M-Theory on Spin(7) manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, N 1–2. P. 3–69.
7. *Kanno H., Yasui Y.* On Spin(7) holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$ // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 293–309.
8. *Kanno H., Yasui Y.* On Spin(7) holonomy metric based on $SU(3)/U(1)$. II // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 310–326.
9. *Boyer C., Galicki K.* 3-Sasakian manifolds // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom., VI. Boston MA: Int. Press, 1999. P. 123–184.
10. *Satake I.* The Gauss–Bonnet theorem for V-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9, N 4. P. 464–476.
11. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
12. *Gray A.* Weak holonomy groups // Math. Z. 1971. Bd 123. S. 290–300.
13. *Berard-Bergery L.* Sur de nouvelles varietes Riemanniennes d'Einstein // Inst. Elie Cartan. Univ. Nancy, 1982. V. 6. P. 1–60.
14. *Page D. N., Pope C. N.* Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4, N 2. P. 213–225.
15. *Каждан Д. Л., Уорнер Ф. У.* Функции-кривизны для открытых двумерных многообразий // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 60–80.

Статья поступила 20 февраля 2006 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru