Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 517.51

О СЛЕДАХ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГРАНИЦЕ ПИКА С ГЁЛЬДЕРОВОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А. С. Романов

Аннотация: Для классов Соболева W_p^1 в «нулевом» пике с гёльдеровой особенностью в вершине рассматривается вопрос о компактности вложения следов соболевских функций в лебеговские классы на границе пика.

Ключевые слова: пространства Соболева, теоремы вложения, след.

Изучение обобщенных функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах в последние годы довольно популярно. Одним из таких обобщений являются введенные Хайлашем [1] классы функций, которые далее мы будем называть *пространствами Соболева — Хайлаша* и обозначать символом $HW_p^1(X, d, \mu)$, где X — метрическое пространство, d — метрика, а μ — борелевская мера.

В данной работе рассматривается модельный пример применения результатов, полученных для пространств Соболева — Хайлаша, к изучению некоторых свойств классических пространств Соболева, определенных в евклидовых областях с изолированными гёльдеровыми особенностями на границе.

Нас будет интересовать вопрос о компактности вложения следов соболевских функций в лебеговские классы на границе «нулевого» пика. Получить полное описание пространства следов в рамках шкалы пространств Соболева — Хайлаша не удается, но можно ожидать, что возникающее на границе пространство Соболева — Хайлаша окажется близким к пространству следов в том смысле, что оно будет компактно вложено в те же лебеговские классы, что и пространство следов.

Предположение о возможности такой близости соответствующих пространств основано на следующих двух соображениях.

1. Для областей $G \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей пространство следов функций класса $W_p^1(G)$ совпадает с пространством Бесова $B_p^{1-1/p}(\partial G)$. При этом [2] для любого $\varepsilon > 0$

$$B_p^{1-1/p}(\partial G) \subset HW_p^1(\partial G, |*|^{1-1/p}, H^{n-1}) \subset B_{p-\varepsilon}^{1-1/(p-\varepsilon)}(\partial G),$$

где $|*|$ — евклидова метрика, H^{n-1} — мера Хаусдорфа на ∂G.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8526.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006.

2. В «нулевых» пиках G_α с гёльдеровыми особенностями в вершине пика при некоторых ограничениях на показатель гёльдеровости α классические пространства Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ и пространства Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx)$ совпадают [3]. При этом в шкале пространств Соболева — Хайлаша имеется достаточно точная теорема вложения для сужений функций на множества меньшей «размерности» [4].

Выражаю искреннюю благодарность профессору В. М. Гольдштейну (университет Бен Гуриона), сформулировавшему ряд вопросов, связанных со следами соболевских функций, обратившему внимание автора на данную тематику и проявившему интерес к используемым в работе методам.

1. Пространства Соболева — Хайлаша

Сформулируем результаты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с конечным диаметром, μ — конечная регулярная борелевская мера на X. Символом $B(a, r)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке $a \in X$ радиуса r.

Функцию $g : X \to [0, \infty)$ будем называть *допустимой* для μ-измеримой функции $u : X \to \overline{R}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство
$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \tag{1}$$
выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \geq 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(\mu)$.

Функциональные пространства $HL_p^1(X, d, \mu)$ и $HW_p^1(X, d, \mu)$ определим условиями
$$HL_p^1(X, d, \mu) = \{u : X \to \overline{R} \mid D_p(u) \neq \varnothing\},$$
$$HW_p^1(X, d, \mu) = \big\{u \in L_p(\mu) \mid u \in HL_p^1(X, d, \mu)\big\}.$$
Как множества функций пространства $HL_p^1(X, d, \mu)$ и $HW_p^1(X, d, \mu)$ совпадают [1].

Полунорма в $HL_p^1(X, d, \mu)$ и норма в $HW_p^1(X, d, \mu)$ вводятся равенствами
$$\big\|u \mid HL_p^1\big\| = \inf_{g \in D_p(u)} \|g \mid L_p\|, \quad \big\|u \mid HW_p^1\big\| = \|u \mid L_p\| + \big\|u \mid HL_p^1\big\|$$
соответственно.

В евклидовых областях $G \subset \mathbb{R}^n$, для которых существует ограниченный оператор продолжения $\mathrm{Ext} : W_p^1(G) \to W_p^1(\mathbb{R}^n)$, пространство Соболева $W_p^1(G)$ и пространство Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G, |*|, dx)$ совпадают как множества функций и их нормы эквивалентны [1]. При этом для функции u из пространства $HW_p^1(G, |*|, dx)$ допустимая функция g может быть определена через максимальную функцию модуля градиента функции u, т. е. $g(x) = CM(|\nabla u|)(x)$ и
$$M(h)(x) = \sup_{r < \operatorname{diam}(G)} \frac{1}{|Q(x, r)|} \int\limits_{Q(x,r)} h(y)\, dy,$$
где $Q(x, r)$ — куб с центром в точке x и ребром $2r$, а $|Q(x, r)|$ — n-мерная лебегова мера куба.

Меру μ называют *s-регулярной*, если для произвольного шара, радиус которого не превосходит диаметра множества X, выполняется оценка $\mu(B(x, r)) \geq br^s$. При этом показатель s играет роль «размерности» метрического пространства (X, d) в аналогах классических соболевских теорем вложения. Следующее утверждение доказано в работе [1].

Предложение 1. *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ является s-регулярной. Тогда пространство Соболева — Хайлаша $HW_p^1(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $u \in L_q(\mu)$, где*

1) $1 \le q \le \frac{ps}{s-p}$ при $p < s$;

2) $1 \le q < \infty$ при $p = s$;

3) $1 \le q \le \infty$ при $p > s$.

Всюду далее будем предполагать, что мера μ удовлетворяет «условию удвоения»

$$\mu(B(x,2r)) \le C_d \mu(B(x,r))$$

при всех $x \in X$ и $r > 0$.

Всякая мера, удовлетворяющая условию удвоения, s-регулярна с показателем $s = \log_2 C_d$.

При $1 < p \le \infty$ принадлежность функции u пространству Соболева — Хайлаша оказывается эквивалентной выполнению неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| d\mu \le r \int\limits_{B(x,r)} g\, d\mu$$

для некоторой функции $g \in L_p(\mu)$ и произвольных $x \in X$ и $r > 0$ [5].

Выполнение для функций пространства $HW_p^1(X,d,\mu)$ неравенства Пуанкаре и результат предложения 1 позволяют переформулировать в удобной для нас форме теоремы 8.2 и 8.3 работы [6].

Предложение 2. *При $1 < p < s$ произвольная последовательность функций $\{u_i\}$, ограниченная в норме $HW_p^1(X,d,\mu)$, содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(\mu)$ к некоторой функции $u \in L_q(\mu)$, при всех $1 \le q < \frac{ps}{s-p}$.*

Пусть подмножество $E \subset X$ и мера ν, удовлетворяющая условию удвоения, таковы, что для произвольного шара $B(x,r)$ с центром $x \in E$ верна оценка $\nu(B(x,r)) \le Cr^{-\alpha}\mu(B(x,r))$, где $0 < \alpha < s$. Тогда для функции $f \in HL_p^1(X,d,\mu)$ при $p > \alpha$ точками Лебега являются ν-почти все точки множества E и в них функция f может быть определена равенством

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f\, d\mu.$$

При этом следы функций из пространств Соболева — Хайлаша $HL_p^1(X,d,\mu)$ на множестве E принадлежат соответствующим гёльдеровым классам, которые можно интерпретировать как пространства Соболева — Хайлаша относительно гёльдеровой метрики. Следующий результат получен в работе [4].

Предложение 3. *Пусть $1 < p < s$, $0 < \alpha < \min(s,p)$. Тогда пространство $L_p^1(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $L_q^1(E, d^{1-\gamma}, \nu)$, где $\frac{\alpha}{p} < \gamma < \frac{s}{p}$ и $q \le \frac{p(s-\alpha)}{s-\gamma p}$.*

2. Взаимосвязь пространств Соболева и Соболева — Хайлаша в «нулевых» пиках

Точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через (x,y), где $x \in R$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Для $1 \le \alpha < \infty$ пик $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ определим условием

$$G_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x < 1,\ 0 < y_k < x^\alpha,\ k = 1,\dots,n-1\}.$$

Обозначим $\Lambda = 1+(n-1)\alpha$. Поскольку для шаров с центром в вершине пика выполняется оценка $|B(0,r)\cap G_\alpha| \sim Cr^\Lambda$, то в различных оценках показатель Λ часто играет роль «размерности» пика G_α.

При $\alpha = 1$ получаем область с липшицевой границей, пространство Соболева $W_p^1(G_1)$ и пространство Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_1, |*|, dx)$ совпадают, их нормы эквивалентны и для функции $u \in HW_p^1(G_1, |*|, dx)$ допустимая функция g может быть определена через максимальную функцию модуля градиента функции u, т. е. $g(x) = CM(|\nabla u|)(x)$.

При $\alpha > 1$ граница пика G_α имеет гёльдерову особенность в вершине. Известно, что для области G_α невозможно продолжение функций $u \in W_p^1(G_\alpha)$ на все пространство $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса, однако можно показать, что при достаточно больших значениях показателя суммируемости p пространства $W_p^1(G_\alpha)$ и $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx)$ совпадают.

Вложение $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx) \subset W_p^1(G_\alpha)$ выполняется всегда [1], а для доказательства обратного включения воспользуемся тем фактом, что, хотя ограниченного оператора продолжения с сохранением класса для функций пространства $W_p^1(G_\alpha)$ не существует, при некоторых $1 < q < p$ существует ограниченный оператор продолжения $\mathrm{Ext} : W_p^1(G_\alpha) \to W_q^1(G_1)$ [7].

Используемый в работе [7] оператор продолжения, к сожалению, не очень подходит для получения нужных нам оценок. Поэтому, используя схему работы [3] и простые геометрические соображения, построим другое, удовлетворяющее нашим требованиям, продолжение функции из пика G_α в пик G_1.

Для $1 \le k \le n-1$ рассмотрим систему вложенных пиков:

$$P_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x < 1,\ 0 < y_i < x,\ 1 \le i \le k,\ 0 < y_j < x^\alpha,\ k+1 \le j \le n-1\}.$$

Заметим, что $G_\alpha \subset P_1$ и $P_{n-1} = G_1$.

Продолжим вначале функцию $u \in W_p^1(G_\alpha)$ в пик P_1. Пусть $(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in P_1$ и $y_1 = m_1 x^\alpha + t_1$, где $m_1 = \left[\frac{y_1}{x^\alpha}\right]$ — целая часть. Положим

$$v_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = u(x, y_1^*, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где $y_1^* = t_1$ при четных значениях m_1 и $y_1^* = x^\alpha - t_1$ при нечетных значениях m_1.

На каждом отрезке, параллельном оси OY_1, значения функции v_1 определяются дублированием значений функции u по симметрии относительно точек, в которых значение y_1 кратно значению x^α. Таким образом, продолжение происходит по симметрии последовательно в слои, в которых $lx^\alpha < y_1 < (l+1)x^\alpha$. Количество получаемых слоев зависит от близости значения x к нулю и эквивалентно значению $x^{1-\alpha}$. На каждой прямой, параллельной осям координат и пересекающей пик P_1, будет лишь конечное число точек «склейки» функции v_1, являющейся продолжением функции u в пик P_1, поэтому функция v_1 принадлежит классу $ACL(P_1)$.

Повторяя данную процедуру, построим продолжение из пика P_k в пик P_{k+1} и в конечном счете функцию v, определенную в липшицевом пике G_1 условием $v(x,y) = u(x,y^*)$, где $y_k = m_k x^\alpha + t_k$, $y_k^* = t_k$ при четных значениях m_k и $y_k^* = x^\alpha - t_k$ при нечетных значениях m_k.

Функция v будет принадлежать классу $ACL(G_1)$, и несложно найти ее производные

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y_k}(x,y)\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial y_k}(x,y^*)\right|; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y^*) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y_k}(x,y^*)\frac{\partial y_k^*}{\partial x}(x,y).$$

Учитывая, что для точки $(x, y) \in G_1$ всегда $y_k < x$, получаем

$$\left|\frac{\partial y_k^*}{\partial x}(x, y)\right| \le 2\alpha m_k x^{\alpha-1} = 2\alpha \left[\frac{y_k}{x^\alpha}\right] \frac{x^\alpha}{y_k} \frac{y_k}{x} \le 2\alpha.$$

Следовательно,

$$|\nabla v(x, y)| \le C_0 |\nabla u(x, y^*)|.$$

Обозначим через D_x сечение пика G_1 гиперплоскостью, ортогональной оси OX и проходящей через точку $(x, 0)$, а через E_x — сечение пика G_α той же гиперплоскостью. Из конструкции продолжения следует, что

$$\int\limits_{D_x} |\nabla v(x, y)|^q dy \le C x^{(1-\alpha)(n-1)} \int\limits_{E_x} |\nabla u(x, y)|^q\, dy.$$

Используя неравенство Гёльдера при $q < p$, легко получить оценку интеграла от модуля градиента функции v по пику G_1:

$$\begin{aligned}\int\limits_{G_1} |\nabla v(x, y)|^q\, dxdy &= \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{D_x} |\nabla v(x, y)|^q\, dy\Bigg)\, dx \\ &\le C \int\limits_0^1 x^{(1-\alpha)(n-1)} \Bigg(\int\limits_{E_x} |\nabla u(x, y)|^q\, dy\Bigg)\, dx \\ &= C \int\limits_{G_\alpha} x^{(1-\alpha)(n-1)} |\nabla u(x, y)|^q\, dxdy \le C \|u \mid L_p^1(G_\alpha)\|^q \Bigg(\int\limits_0^1 x^{-s}\, dx\Bigg)^{\frac{p-q}{p}},\end{aligned}$$

где $s = \frac{(n-1)(\alpha q - p)}{p - q}$. Последний интеграл сходится при $q < \frac{np}{1+(n-1)\alpha}$. Следовательно, при $p > \frac{1+(n-1)\alpha}{n} = \frac{\Lambda}{n}$ функция v принадлежит пространству $W_q^1(G_1)$ при некотором $q > 1$. Отметим, что возникающие ограничения на показатели суммируемости согласуются с результатами работы [7].

Пространства $W_q^1(G_1)$ и $HW_q^1(G_1, |*|, dx)$ совпадают, и для функции v допустимая функция g может быть определена через максимальную функцию модуля градиента функции v, т. е. $g = CM(|\nabla v|) \in L_q(G_1)$. Для того чтобы доказать принадлежность функции u пространству $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx)$, достаточно показать, что $M(|\nabla v|) \in L_p(G_\alpha)$. В общем случае из принадлежности функции пространству $L_q(G_1)$, конечно, не следует принадлежность ее пространству $L_p(G_\alpha)$, но в данном случае функция v не является произвольной — ее значения получаются дублированием по соответствующим слоям значений функции u, это и позволяет нам получить нужные оценки.

С каждой точкой $z = (x, y) \in G_\alpha$ свяжем число $r(z)$ такое, что

$$M(|\nabla v|)(z) \le \frac{2}{|Q(z, r(z))|} \int\limits_{Q(z, r(z))} |\nabla v|\, dt d\tau,$$

где $t \in R,\ \tau \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Пик G_α разобьем на непересекающиеся подмножества, полагая

$$A = \{(x, y) \in G_\alpha \mid r(x, y) > 1/4\}, \quad B = \{(x, y) \in G_\alpha \setminus A \mid r(x, y) < x/2\},$$

$$D_k = \{(x,y) \in G_\alpha \setminus A \mid 2^{k-1}x \le r(x,y) < 2^k x,\ k = 0,1,\dots\}.$$

На множестве A функция $M(|\nabla v|)$ ограничена, поскольку при $z \in A$

$$M(|\nabla v|)(z) \le \frac{2}{|Q(z,r(z))|} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le C_1 \int\limits_{G_1} |\nabla v|\,dtd\tau$$
$$\le C_2 \|\nabla v \mid L_q(G_1)\| \le C_3 \|\nabla u \mid L_p(G_\alpha)\|.$$

Следовательно,

$$\int\limits_A (M(|\nabla v|))^p\,dxdy \le C\|\nabla u \mid L_p(G_\alpha)\|^p.$$

Обозначим через μ сужение n-мерной меры Лебега на пик G_α, т. е. $\mu(E) = |E \cap G_\alpha|$.

Пусть $z = (x,y) \in B$ и $r(z) < x^\alpha$. Тогда

$$\int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le C_0 \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla u|\,d\mu.$$

Отсюда

$$M(|\nabla v|)(z) \le \frac{2}{|Q(z,r(z))|} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le \frac{2C_0}{\mu(Q(z,r(z))} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla u|\,d\mu.$$

Если $x^\alpha \le z(z) < \frac{x}{2}$, то

$$\int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le C_1 \left(\frac{r + x^\alpha}{(x-r)^\alpha}\right)^{n-1} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla u|\,d\mu$$

и

$$\frac{\mu(Q(z,r(z))}{|Q(z,r(z))|} \le C_2 \frac{x^{\alpha(n-1)}}{r^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$M(|\nabla v|)(z) \le \frac{2}{|Q(z,r(z))|} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le \frac{C_3}{\mu(Q(z,r(z))} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla u|\,d\mu.$$

Следовательно, для всякой точки $z = (x,y) \in B$ выполняется оценка

$$M(|\nabla v|)(z) \le \widetilde{C}\mathscr{M}(|\nabla u|)(z),$$

где

$$\mathscr{M}(|\nabla u|)(z) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(Q(z,r))} \int\limits_{Q(z,r)} |\nabla u| d\mu. \tag{2}$$

Поскольку мера μ удовлетворяет условию удвоения в пике G_α, максимальный оператор (2) ограничен в пространстве $L_p(G_\alpha)$ при $p > 1$ [8] и тем самым $M(|\nabla v|) \in L_p(B)$.

Пусть точка $z = (x,y)$ лежит в D_k. Тогда $x + r(z) < 2^{k+1}x$ и

$$M(|\nabla v|)(z) \le \frac{2}{|Q(z,r(z))|} \int\limits_{Q(z,r(z))} |\nabla v|\,dtd\tau \le \frac{C}{(2^k x)^n} \int\limits_0^{2^{k+1}x} t^{(n-\Lambda)}\,dt \int\limits_{E_t} |\nabla u|\,d\tau,$$

при этом оценка не зависит от y.

Так как $r(z) \le \frac{1}{4}$, для всякой точки $z = (x, y) \in D_k$ получаем $x \le 2^{-(k+1)}$. Делая в интеграле замену переменной $w = 2^{k+1}x$, имеем

$$\int\limits_{D_k} (M(|\nabla v|))^p\, dxdy \le \int\limits_0^{2^{-(k+1)}} x^{\Lambda-1}\left(\frac{C}{(2^k x)^n}\int\limits_0^{2^{k+1}x} t^{(n-\Lambda)}\, dt \int\limits_{E_t} |\nabla u|\, d\tau\right)^p dx$$
$$\le \frac{C_1}{2^{k\Lambda}}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^w h(t)\, dt\right)^p w^{\Lambda-np-1} dw,$$

где $h(t) = t^{(n-\Lambda)} \int\limits_{E_t} |\nabla u|\, d\tau$.

Поскольку $\Lambda - np < 0$, последовательно используя неравенства Харди и Гёльдера, приходим к оценке

$$\int\limits_{D_k} (M(|\nabla v|))^p\, dxdy \le \frac{C_2}{2^{k\Lambda}}\int\limits_0^1 (th(t))^p t^{\Lambda-np-1}\, dt$$
$$= \frac{C_2}{2^{k\Lambda}}\int\limits_0^1 t^{(\Lambda-1)(1-p)}\left(\int\limits_{E_t} |\nabla u|\, d\tau\right)^p dt \le \frac{C_2}{2^{k\Lambda}}\int\limits_{G_\alpha} |\nabla u|^p\, d\tau dt.$$

Суммируя найденные оценки, получаем, что

$$\int\limits_{G_\alpha} (M(|\nabla v|))^p\, dxdy = \int\limits_A (M(|\nabla v|))^p\, dxdy + \int\limits_B (M(|\nabla v|))^p\, dxdy$$
$$+ \sum_k \int\limits_{D_k} (M(|\nabla v|))^p\, dxdy \le \widetilde{C}\int\limits_{G_\alpha} |\nabla u|^p\, dxdy.$$

Таким образом, при $p > \Lambda/n$ функция $M(|\nabla v|)$ является допустимой для функции u в пике G_α и принадлежит пространству $L_p(G_\alpha)$. Значит, пространство Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ и пространство Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx)$ совпадают, и их нормы эквивалентны.

3. Компактность вложения следов на границе пика

Пусть $\alpha \ge 1$ и $\alpha < p < \Lambda$. Поскольку $\alpha \ge \Lambda/n$, пространства Соболева $W_p^1(G_\alpha)$ и Соболева — Хайлаша $HW_p^1(G_\alpha, |*|, dx)$ совпадают, и мы можем воспользоваться утверждениями предложений 1–3.

Обозначим через μ сужение n-мерной меры Лебега на пик $\overline{G}_\alpha$, а через ν — сужение $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на границу пика G_α. Неравенство (1) в определении пространств Соболева — Хайлаша должно выполняться лишь почти всюду относительно меры μ, поэтому можно считать, что изначально метрическим пространством, на котором определяется пространство HW_p^1, является множество $\overline{G}_\alpha$ — замыкание пика.

Для произвольной точки $x \in \partial G_\alpha$ и произвольного шара $B(x, r)$, $r < \operatorname{diam} G_\alpha$ верна оценка $\nu(B(x,r)) \le Cr^{-\alpha}\mu(B(x,r))$. Согласно работе [4] для произвольной функции $u \in HW_p^1(\overline{G}_\alpha, |*|, \mu)$ точками Лебега относительно меры μ являются ν-почти все точки $x \in \partial G_\alpha$. Поэтому значения следа v функции u на границе ∂G_α могут быть определены как предел средних значений функции u по мере μ, т. е.

$$v(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} u \, d\mu.$$

Меры μ и ν удовлетворяют условию удвоения, и «размерность» пика $\overline{G}_\alpha$ определяемая по мере μ, равна Λ. Введем на $\overline{G}_\alpha$ новую метрику равенством $d(x,y) = |x-y|^{1-\gamma}$, где $\frac{\alpha}{p} < \gamma < 1$.

Согласно предложению 3 пространство $HL^1_p(\overline{G}_\alpha, |*|, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $HL^1_r(\partial G_\alpha, d, \nu)$, где $r \le \frac{p(\Lambda-\alpha)}{\Lambda-\gamma p}$.

Из доказательств теорем 1 и 3 работы [3] следует существование такой функции g_γ, что для ν-почти всех точек $x \in \partial G_\alpha$ и для μ-почти всех точек $y \in G_\alpha$ выполняется неравенство

$$|v(x) - u(y)| \le (d(x,y))^{1-\gamma}(g_\gamma(x) + g_\gamma(y)), \tag{3}$$

при этом

$$\|g_\gamma \mid L_r(\partial G_\alpha, \nu)\| \le C_1 \big\|u \mid HL^1_p(G_\alpha, |*|, \mu)\big\|,$$
$$\|g_\gamma \mid L_p(G_\alpha, \mu)\| \le C_2 \big\|u \mid HL^1_p(G_\alpha, |*|, \mu)\big\|.$$

Интегрируя по переменной y неравенство (3) по всему пику G_α по мере μ и деля результат на $\mu(G_\alpha)$, получаем

$$|v(x)| \le C_3 g_\gamma(x) + C_4 \big\|u \mid HW^1_p(G_\alpha, |*|, \mu)\big\|,$$

следовательно,

$$\Bigg(\int\limits_{\partial G_\alpha} |v|^r \, d\nu\Bigg)^{1/r} \le C\big\|u \mid HW^1_p(G_\alpha, |*|, \mu)\big\|.$$

Таким образом, оператор следа

$$\mathrm{Tr} : HW^1_p(G_\alpha, |*|, \mu) \to HW^1_r(\partial G_\alpha, d, \nu)$$

ограничен.

«Размерность» множества ∂G_α, определяемая мерой ν и метрикой d, равняется $s_1 = \frac{\Lambda-\alpha}{1-\gamma}$.

Согласно предложению 1 пространство $HW^1_r(\partial G_\alpha, d, \nu)$ непрерывно вложено в пространство $L_{q_0}(\partial G_\alpha, d, \nu)$, где $q_0 = \frac{rs_1}{s_1-r}$, и с учетом предложения 2 компактно вложено в пространство $L_q(\partial G_\alpha, d, \nu)$ при $1 \le q < q_0$.

Пересчитывая показатели суммируемости, получаем следующее утверждение для классических пространств Соболева.

Теорема. *Пусть $\alpha \ge 1$ и $p > \alpha$. Оператор следа*

$$\mathrm{Tr} : W^1_p(G_\alpha) \to L_q(\partial G_\alpha, \nu)$$

будет компактным при

1) $1 \le q < p\frac{\Lambda-\alpha}{\Lambda-p}$, *когда* $p < \Lambda$;

2) $1 \le q < \infty$, *когда* $p \ge \Lambda$.

Второй пункт теоремы является следствием первого, поскольку область G_α ограничена и пространство $W^1_p(G_\alpha)$ непрерывно вложено в пространство $W^1_{p^*}(G_\alpha)$ при всех $p^* < p$.

Точность оценки для показателя q в п. 1 теоремы может быть проверена на простом примере.

Пример. Рассмотрим последовательность липшицевых функций $\{u_k\}$, определяемых в точке $(x, y) \in G_\alpha$ условием

$$u_k(x, y) = k^{-1+\Lambda/p} \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1/2k, \\ 2(1 - kx), & 1/2k \le x \le 1/k, \\ 0, & x \ge 1/k. \end{cases}$$

Поскольку $|u_k| \le k^{-1+\Lambda/p}$, а $|\nabla u_k| = 2k^{\Lambda/p}$ при $1/2k \le x \le 1/k$ и $|\nabla u_k| = 0$ в остальных случаях, то $\|\nabla u_k \mid L_p(G_\alpha)\| \le C_0$ и $\|u_k \mid L_p(G_\alpha)\| \le C_1 k^{-1}$. Значит, последовательность функций $\{u_k\}$ ограничена в норме пространства $W_p^1(G_\alpha)$.

Обозначим через v_k след функции u_k на границе пика G_α, тогда $v_k(x, y) = k^{-1+\Lambda/p}$ при $0 < x \le 1/2k$ и $v_k(x, y) = 0$ при $x \ge 1/k$.

Пусть $E_k = \partial G_\alpha \cap B(0, 1/2k)$. Если $q_0 = p\frac{\Lambda-\alpha}{\Lambda-p}$, то

$$\|v_k \mid L_{q_0}(\partial G_\alpha, \nu)\|^{q_0} \ge k^{q_0(-1+\Lambda/p)} \int\limits_{E_k} d\nu \ge C > 0.$$

Так как последовательность $\{v_k\}$ сходится к нулю почти всюду на ∂G_α и при этом $\|v_k \mid L_{q_0}(\partial G_\alpha, \nu)\| \ge C_0 > 0$, из данной последовательности нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_{q_0}(\partial G_\alpha, \nu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hajl asz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. *Haj_lasz P., Martio O.* Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains // J. Funct. Anal. 1997. V. 143, N 1. P. 221–246.
3. *Романов А. С.* Об одном обобщении пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 949–953.
4. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.
5. *Haj_lasz P., Kinnunen J.* Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14, N 3. P. 601–622.
6. *Haj_lasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
7. *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Продолжение функций из классов С. Л. Соболева во внешность области с вершиной пика на границе. II // Čzech. Math. J. 1987. Т. 37, № 1. С. 128–150.
8. *Stromberg J. O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989. (Lecture Notes in Math.; 1381).

Статья поступила 28 октября 2005 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru