Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2007. Том 48, № 1

УДК 531.38

ИЗОМОРФИЗМ И ГАМИЛЬТОНОВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Аннотация: Рассматриваются вопросы, связанные с гамильтоновой формой двух задач из неголономной механики, — задачи о шаре Чаплыгина и задачи Веселовой. Для этих задач найдено представление в виде обобщенных систем Чаплыгина, которые могут быть проинтегрированы с помощью метода приводящего множителя. Указан конкретный алгебраический вид скобок Пуассона, с помощью которых после надлежащей замены времени могут быть представлены уравнения движения указанных задач. Рассмотрены обобщения этих задач и предложены новые способы реализации неголономных связей. Указан ряд неголономных систем, обладающих инвариантной мерой и достаточным числом первых интегралов, для которых вопрос о гамильтоновой форме даже после замены времени остается открытым. Доказана теорема об изоморфизме динамики шара Чаплыгина и движения тела в жидкости в случае Клебша.

Ключевые слова: неголономные системы, приводящий множитель, гамильтонизация, изоморфизм.

Рассмотрим сначала некоторые общие результаты относительно способа интегрирования неголономных систем, названного С. А. Чаплыгиным [1] методом приводящего множителя. Мы модифицируем этот метод таким образом, чтобы он был применим для более широкого класса систем — так называемых обобщенных систем Чаплыгина. В остальных разделах мы применим эти результаты к явному нахождению пуассоновой структуры и изоморфизмов с другими интегрируемыми гамильтоновыми системами.

1. Обобщенные системы Чаплыгина

Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, уравнения движения которой можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=\dot q_2 S,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=-\dot q_1 S,\qquad S=a_1(q)\dot q_1+a_2(q)\dot q_2+b(q), \tag{1}$$

где L — функция координат и скоростей, которую будем также называть *лагранжианом системы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 04–05–64367, 05–01–01058), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1312.2006.1) и INTAS (грант 04–80–7297).

При специальном выборе функции S получается обычная система Чаплыгина (при этом заведомо $b(q)=0$) [1]. Как показал С. А. Чаплыгин, к виду (1) при $b(q)=0$ приводятся уравнения так называемых саней Чаплыгина, которые могут быть проинтегрированы при помощи излагаемого ниже метода приводящего множителя и решения уравнения Гамильтона — Якоби. В работе [2] показано, что задача Веселовой также является системой Чаплыгина. Напомним, что в задаче Веселовой твердое тело вращается вокруг неподвижной точки, подчиняясь неинтегрируемой связи, заключающейся в том, что проекция угловой скорости на ось, неподвижную в пространстве, равна нулю. Как будет показано далее, к виду (1), но уже при $b(q)\neq 0$ может быть сведена задача о качении динамически несимметричного уравновешенного шара Чаплыгина [3].

Мы будем называть (1) *обобщенной системой Чаплыгина* (не следует путать с [4], где предложено несколько другое обобщение систем Чаплыгина!).

Как показал С. А. Чаплыгин, в случае $b(q)=0$ [1] уравнения сохраняют свой вид при заменах времени

$$N(q)\,dt = d\tau,$$

если N не зависит от скоростей. Покажем, что это справедливо и для уравнений (1).

Обозначив дифференцирование по новому времени через $q_i' = \frac{dq_i}{d\tau}$, находим

$$\dot q_i = Nq_i', \quad \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{1}{N}\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i'}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i} - \frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial q_i}\sum_{k=1}^{2} q_k'\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_k'},$$

где $\overline{L}(q,q') = L(q,Nq')$. Подставляя в (1), получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_q'}\right) - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_1} = q_2'\overline{S}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_2} = -q_1'\overline{S},\\ \overline{S} = NS + \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial q_2}\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_1'} - \frac{\partial N}{\partial q_1}\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_2'}\right).\end{gathered} \tag{2}$$

Для обычной системы Чаплыгина известно [1], что если имеется инвариантная мера с плотностью, зависящей только от координат, то можно подобрать $N(q)$ так, что $\overline{S}=0$, и, следовательно, система в новом времени τ может быть записана в канонической гамильтоновой форме. Укажем обобщение этого результата на случай обобщенных систем Чаплыгина вида (1) в предположении, что лагранжиан — квадратичная функция по скоростям $\dot q_i$ (не обязательно однородная).

Теорема 1. *Пусть*

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j}\right\| \neq 0$$

и система (1) *допускает инвариантную меру, плотность которой зависит лишь от координат. Тогда существует замена времени* $N(q)\,dt = d\tau$ *такая, что*

1) *функция* $\overline{S}$, *определяемая системой* (2), *зависит лишь от координат*: $\overline{S} = \overline{S}(q)$,

2) *в новом времени уравнения движения записываются в гамильтоновой форме*

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \{q_i, \overline{H}\}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = \{p_i, \overline{H}\},$$

где

$$p_i = \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i'}, \quad \overline{H} = \sum_{k=1}^{2} p_k q_k' - \overline{L}|_{q_i' \to p_i},$$

а скобка Пуассона определена соотношениями

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_1, p_2\} = \overline{S}(q), \quad \{q_1, q_2\} = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Выполним преобразование Лежандра для исходной системы (1):

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i P_i \dot{q}_i - L|_{\dot{q}_i \to P_i},$$

при этом

$$\begin{gathered} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial P_2} S, \quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial H}{\partial P_1} S, \\ S = a_1(q)\dot{q}_1 + a_2(q)\dot{q}_2 + b(q) = A_1(q)P_1 + A_2(q)P_2 + B(q). \end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение Лиувилля для плотности инвариантной меры $\rho(q)\,dP_1 dP_2 dq_1 dq_2$ уравнений (4) приводит к равенству

$$\dot{q}_1 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} - A_2(q) \right) + \dot{q}_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + A_1(q) \right) = 0,$$

и поскольку ρ зависит лишь от координат, каждая из скобок должна обращаться в нуль по отдельности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_1} - A_2(q) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_2} + A_1(q) = 0.$$

Запишем теперь уравнение (2) для $\overline{S}$ с учетом того, что $\frac{1}{N} \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i'} = P_i$:

$$\overline{S} = \left(N A_1(q) + \frac{\partial N}{\partial q_2} \right) P_1 + \left(N A_2(q) - \frac{\partial N}{\partial q_1} \right) P_2 + B(q).$$

Таким образом, если мы выберем $N(q) = \rho(q)$, то $\overline{S} = B(q)$, и тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Второе утверждение доказывается непосредственной проверкой уравнений и тождества Якоби. $\square$

Гамильтоновы системы со скобкой (3) встречаются при описании обобщенно потенциальных систем (например, движения заряженных частиц в магнитном поле) или систем с гироскопическими силами [5]. В этом случае замкнутая 2-форма $\Omega = \overline{S}(q)\, dq_1 \wedge dq_2$ называется 2-*формой гироскопических сил.* Локально ее можно представить в виде полного дифференциала: $\Omega = d\omega$, $\omega = W_1(q)dq_1 + W_2(q)dq_2$, при этом уравнения движения (2) можно записать в виде уравнений Лагранжа — Эйлера

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_W}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial L_W}{\partial q_i} = 0,$$

$$L_W = \overline{L} + W(q, q'), \quad W(q, q') = W_1(q) q_1' + W_2(q) q_2',$$

а скобка Пуассона приводится к канонической форме с помощью новых импульсов $\tilde{p}_i = p_i + W_i(q)$.

Если многообразие $\mathscr{M}$, на котором определены координаты q_1, q_2, компактно, то критерий точности формы Ω имеет вид

$$\int\limits_{\mathscr{M}} \Omega = 0.$$

Таким образом, если $\int \Omega \neq 0$, т. е. 2-форма не точна, то обобщенный потенциал W и соответствующие лагранжиан и гамильтониан содержат особенности (так называемый монополь) [6]. В этом случае иногда также говорят о невозможности глобального представления уравнений движения в (канонической) гамильтоновой форме.

2. Система Веселовой

Система Веселовой описывает движение твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи вида $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно векторы угловой скорости тела и орта неподвижной в пространстве оси в системе координат, жестко связанной с твердым телом. Таким образом, для связи Веселовой проекция угловой скорости на неподвижную в пространстве ось равна нулю. Эта связь взаимна связи Суслова [7], для которой равна нулю проекция угловой скорости на ось, неподвижную в теле.

В подвижных осях, связанных с телом, уравнения движения могут быть записаны в виде [8, 9]

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mu\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{5}$$

где μ — неопределенный множитель, $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции, $U(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциальная энергия. Неопределенный множитель μ может быть найден посредством дифференцирования связи:

$$\mu = -\frac{\left(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right)}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \tag{6}$$

В общем случае уравнения (5) допускают интеграл энергии и геометрический интеграл

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \tag{7}$$

а также инвариантную меру $\rho_\omega\, d^3\boldsymbol{\omega} d^3\boldsymbol{\gamma}$ с плотностью

$$\rho_\omega = \sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}. \tag{8}$$

При $U = 0$ имеется дополнительный интеграл

$$F = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})^2 = |\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}|^2, \tag{9}$$

и, следовательно, система интегрируема по теореме Эйлера — Якоби [8].

Замечание 1. Интеграл (9) обобщается при добавлении потенциала Бруна [8, 9] и некоторых других потенциалов [2, 10]. Он может быть обобщен также при добавлении гиростата [8, 9].

Замечание 2. Система (5), (6) со связью $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ была переоткрыта в работе [11] почти десять лет спустя после работ [8, 9]. В [11] выполнено явное интегрирование с использованием сфероконических координат.

Замечание 3. Обобщение связи Веселовой $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = d \neq 0$ рассмотрено в [12]. Оно сведено к квадратурам с использованием метода Чаплыгина интегрирования уравнений движения динамически несимметричного шара при ненулевой постоянной площадей [3].

В работе [2] показано, что система Веселовой является системой Чаплыгина (1) при $b(q) = 0$ и, следовательно, может быть записана в гамильтоновой форме после замены времени $N\,dt = d\tau$, где приводящий множитель N равен ρ_ω^{-1}. Покажем этот факт явно с помощью локальных координат — углов Эйлера θ, φ, ψ, а затем воспользуемся найденной канонической пуассоновой структурой кокасательного расслоения сферы T^*S^2 для построения скобки Пуассона в избыточных переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$. С помощью такой *алгебраизации* пуассоновой структуры можно наиболее естественным образом установить изоморфизм с системой Неймана, т. е. с движением точки по сфере в квадратичном потенциале (прямыми вычислениями он был установлен в [8, 9]). Как мы увидим далее, эта аналогия может быть непосредственно перенесена на шар Чаплыгина и общую систему Клебша (частным случаем которой является система Неймана).

Угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}$ и орт $\boldsymbol{\gamma}$ через углы Эйлера выражаются по формулам

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega} = (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi),\\ \boldsymbol{\gamma} = (\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta).\end{gathered} \tag{10}$$

Уравнение связи имеет вид

$$f = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \dot\psi + \cos\theta\dot\varphi = 0. \tag{11}$$

Исключим из уравнений движения для углов θ, φ неопределенный множитель Лагранжа и представим их в виде системы Чаплыгина:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial U}{\partial\theta} = \dot\varphi S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial\varphi} = -\dot\theta S,\\ S = \frac{\partial T_0}{\partial\dot\psi}\bigg|_{\dot\psi = -\cos\theta\dot\varphi} = \sin^2\theta(\dot\theta(I_2 - I_1)\sin\varphi\cos\varphi - \dot\varphi(I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi + I_3)),\end{gathered} \tag{12}$$

где U — потенциальная энергия тела во внешнем поле, $T_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$ — кинетическая энергия без учета связи, а T — кинетическая энергия после исключения $\dot\psi$ с помощью связи

$$\begin{aligned}T = T_0|_{\dot\psi = -\cos\theta\dot\varphi} = \frac{1}{2}I_1(\dot\theta\cos\varphi - \dot\varphi\sin\varphi\sin\theta\cos\theta)^2&\\ + \frac{1}{2}I_2(\dot\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}I_3\dot\varphi^2\sin^4\theta.&\end{aligned} \tag{13}$$

Замечание 4. Получение представления (12) основано на простом применении обычного дифференцирования с учетом связи (11):

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial T_0}{\partial\dot\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial T_0}{\partial\dot\varphi} - \cos\theta\frac{\partial T_0}{\partial\dot\psi}, \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = \frac{\partial T_0}{\partial\theta} + \dot\varphi\sin\theta\frac{\partial T_0}{\partial\dot\psi}, \quad \frac{\partial T}{d\varphi} = \frac{\partial T_0}{\partial\varphi}.$$

Теорема 2 [2]. *После замены времени $N\,dt = d\tau$, $N = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2}$, уравнения движения системы Веселовой представляются в виде уравнений Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta'}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \tag{14}$$

где $L = T - U|_{\dot\theta = N\theta',\ \dot\varphi = N\varphi'}$ — *функция Лагранжа, представляемая с учетом связи и замены времени в виде*

$$L = \frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})} - U(\boldsymbol{\gamma}).$$

Доказательство основывается на простой проверке того, что после замены времени правая часть $\overline{S}$ уравнений (14), вычисляемая по формуле (2), обращается в нуль. $\square$

Каноническая гамильтонова форма уравнений движения (14) может быть получена с помощью преобразования Лежандра

$$\begin{gathered} p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta'}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi'}, \quad H = p_\theta\theta' + p_\varphi\varphi' - L, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{gathered} \tag{15}$$

Используя канонические переменные (15), можно представить уравнения движения задачи Веселовой после замены времени $(\rho_\omega\sqrt{\det\mathbf{I}})^{-1}dt = d\tau$ в гамильтоновой форме на (ко)алгебре скобок Пуассона $e(3)$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{M} = \rho_\omega \mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \rho_\omega^{-1}\mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}, \\ \frac{d\boldsymbol{M}}{d\tau} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\Gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\Gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \end{gathered} \tag{16}$$

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) + \widetilde{U}(\boldsymbol{\Gamma}), \tag{17}$$

где $\widetilde{U}(\boldsymbol{\Gamma}) = U(\rho_\omega \mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\Gamma})$ и соответственно

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\gamma}^2 = \boldsymbol{\Gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad \rho_\omega = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{1/2} = (\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}, \\ \{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \Gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\Gamma_k, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 0. \end{gathered}$$

Система Веселовой с гиростатом. При добавлении к телу ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью, уравнения движения (5) изменяются следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \mu\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mu = -(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})^{-1}\left((\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\right), \end{gathered}$$

где $\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор гиростатического момента ротора. Эти уравнения также допускают инвариантную меру (8), и к ним применима теорема 1, при этом соответствующая функция $\overline{S}$ имеет вид

$$\overline{S} = \rho\omega^{-1}\sin\theta(k_1\sin\theta\sin\varphi + k_2\sin\theta\cos\varphi + k_3\cos\theta) = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{k}).$$

Соответственно для переменных (16) получим пуассонову структуру вида

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}\big(M_k - \rho_\omega^3 \det\mathbf{I}(\boldsymbol{k}, \mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\Gamma})\Gamma_k\big), \quad \{M_i, \Gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\Gamma_k, \quad \{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 0. \tag{18}$$

Результат о существовании структуры (18) является новым.

Изоморфизм с системой Неймана и Брадена. Несложно видеть, что при $\widetilde{U}=0$ на уровне $H=h$ система изоморфна гамильтоновой системе на $e(3)$ с гамильтонианом $\mathscr{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M})-\frac{h}{(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})}$ при условии $\mathscr{H}=0$. Эта система указана Браденом в [13]. Таким образом, симплектический лист структуры $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})\in\mathbb{R}^6$, на котором происходит реальное движение, задается условием $\boldsymbol{\gamma}^2=1$, $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})=0$, что в классических уравнениях Эйлера — Пуассона соответствует нулевой постоянной площадей [6]. Отметим также, что система (16), (17) задает некоторую интегрируемую потенциальную систему на двумерной сфере и тем самым определяет некоторый геодезический поток.

Обратная замена имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{1/2}\mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}\mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\Gamma}.$$

Таким образом, поиск интегрируемых потенциалов в задаче Веселовой теперь сводится к хорошо изученной задаче поиска интегрируемых случаев для гамильтоновой системы на $e(3)$ с гамильтонианом (17). Так, если $U=0$, то дополнительный интеграл (9) запишется в форме

$$F=(\mathbf{I}\boldsymbol{M},\boldsymbol{M})(\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Gamma})-(\mathbf{I}\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Gamma})^2.$$

(Заметим, что $\{H,F\}=0$ только на нулевой константе $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})=0$.)

В [8, 9] отмечено, что при $U=0$ система (5) эквивалентна задаче Неймана. Как мы видим, здесь такое представление не связано непосредственно с естественным приведением задачи Веселовой к гамильтоновой форме (16), (17) на $e(3)$. Оказывается, изоморфизм с системой Неймана обусловлен существованием преобразования, не сохраняющего скобки Пуассона, но приводящего векторное поле к требуемому виду на поверхности уровня $H=\mathrm{const}$.

Действительно, рассмотрим гамильтонову систему на $e(3)$ при условии $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})=0$, определяемую гамильтонианом

$$H=\alpha\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})+\beta\frac{1}{2}((\boldsymbol{M},\mathbf{I}\boldsymbol{M})(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})-(\boldsymbol{M},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^2). \tag{19}$$

Ясно, что оба слагаемых являются первыми интегралами системы. Справедлива следующая простая

Лемма 1. *На фиксированном уровне интеграла* $\frac{\boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})}{\det\mathbf{I}}=c$ *векторное поле, порождаемое гамильтонианом* (19), *изоморфно векторному полю случая Клебша уравнений Кирхгофа на нулевой постоянной площадей* $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{s})=0$, *которое можно представить в виде*

$$\dot{\boldsymbol{s}}=k(\alpha\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{s}\times\mathbf{I}\boldsymbol{L}),\ \dot{\boldsymbol{L}}=k(\alpha c\boldsymbol{s}\times\mathbf{I}\boldsymbol{s}+\beta(\boldsymbol{L}\times\mathbf{I}\boldsymbol{L}-c(\det\mathbf{I})\boldsymbol{s}\times\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{s})),\ k=-\sqrt{\det\mathbf{I}}. \tag{20}$$

Доказательство. Выполним замену переменных

$$\boldsymbol{L}=\mathbf{I}^{-1/2}\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{s}=(\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2}\mathbf{I}^{1/2}\boldsymbol{\Gamma},$$

сохраняющую соотношения $\boldsymbol{s}^2=\boldsymbol{\Gamma}^2=1$, $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Gamma})=(\boldsymbol{s},\boldsymbol{L})=0$. Вследствие линейности рассмотрим по отдельности случаи $\alpha=1$, $\beta=0$ и $\alpha=0$, $\beta=1$. Для первого случая, записывая уравнения движения в новых переменных, находим

$$\dot{\boldsymbol{s}}=-\sqrt{\det\mathbf{I}}\left(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{L}+(\boldsymbol{s},\boldsymbol{L})\frac{(\boldsymbol{s}\times\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{s},\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{s})}\right),\quad \dot{\boldsymbol{L}}=-\sqrt{\det\mathbf{I}}\frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{L},\boldsymbol{L})}{\det\mathbf{I}(\boldsymbol{s},\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{s})}\boldsymbol{s}\times\mathbf{I}\boldsymbol{s}.$$

Отсюда с учетом отношений $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{L}) = 0$, $\frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{L}, \boldsymbol{L})}{(\boldsymbol{s}, \mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{s})} = \boldsymbol{M}^2(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}) = c \det \mathbf{I}$ приходим к требуемому результату.

Аналогично рассматривается случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$. □

Если считать c постоянным параметром, то векторное поле (20) порождается на $e(3)$ гамильтонианом вида

$$H = k\alpha \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{c}{2}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}) \right) + k\beta \left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \mathbf{I}\boldsymbol{M}) - \frac{c}{2}\det \mathbf{I}(\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Gamma}) \right).$$

При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ это гамильтониан случая Неймана, а при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ — задачи Бруна; при произвольных α, β он соответствует общему случаю Клебша в уравнениях Кирхгофа [6, 14]. С помощью представления (16), (17) для системы Веселовой легко получается

Теорема 3 [8, 9]. *Векторное поле задачи Веселовой (при $U = 0$) на фиксированном уровне интеграла энергии $H = h = \mathrm{const}$ после замены времени изоморфно векторному полю задачи Неймана.*

Замечание 5. Многомерный аналог задачи Веселовой рассматривался в [2, 15]. В [15] найдены инвариантная мера и некоторое число первых интегралов. Интегрируемость многомерного аналога установлена в [2] на специальных инвариантных соотношениях и при дополнительных ограничениях на тензор инерции. При этом также использовался изоморфизм с многомерной задачей Неймана.

3. Шар Чаплыгина

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости (т. е. движение без проскальзывания) в осесимметричном потенциальном поле сил. Уравнения движения в системе координат, связанной с главными осями шара, можно представить в виде [3]

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega}, \quad D = mR^2, \end{gathered} \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикали в подвижных осях, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, m, R — масса и радиус шара, $U = U(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциал внешнего осесимметричного поля. Вектор $\boldsymbol{M}$ имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, а тензор $\mathbf{I}_Q$ представляется в виде

$$\mathbf{I}_Q = \mathbf{J} - D\boldsymbol{\gamma} \otimes \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + D.$$

Уравнения (5) (при произвольном потенциале) обладают интегралом энергии, геометрическим интегралом и интегралом площадей:

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c = \mathrm{const}, \tag{22}$$

а также допускают указанную С. А. Чаплыгиным [3] инвариантную меру $\rho_\mu \, d^3\boldsymbol{M} d^3\boldsymbol{\gamma}$ с плотностью

$$\rho_\mu = (\det \mathbf{I}_Q)^{-1/2} = [\det \mathbf{J}(1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}))]^{-1/2}. \tag{23}$$

В случае отсутствия внешнего поля ($U = 0$) система (5) обладает дополнительным интегралом

$$F = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) \tag{24}$$

и, следовательно, является интегрируемой по теореме Эйлера — Якоби [3]. В работе [3] система (5) проинтегрирована в гиперэллиптических функциях.

Замечание 6. Интеграл (24) допускает обобщение на случай поля Бруна $U(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{k}{2}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})$ [16] и гиростата [5]. Другие интегрируемые потенциалы (при нулевой постоянной площадей $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$) можно отыскать с помощью указанного ниже представления системы на алгебре $e(3)$.

Комментарий. Отметим, что, развивая общий метод приводящего множителя [1], сам Чаплыгин не стал использовать его для решения задачи о качении шара. В работе [16] высказаны соображения о возможных препятствиях использования в этом случае метода приводящего множителя. С другой стороны, по существу еще в [3] ставится вопрос о гамильтоновой записи уравнений о качении шара. Более строгая формулировка вопроса о гамильтоновости (или о гамильтонизации) шара Чаплыгина дана В. В. Козловым [14] и Дюистермаатом [17, 18]. В [19] авторами численно показано, что без замены времени уравнения качения шара Чаплыгина не являются гамильтоновыми — этому препятствует различие в периодах обращения на двумерных инвариантных резонансных торах.

Этот отрицательный результат работы [19] мы дополнили «положительным» результатом [20] о гамильтоновости шара Чаплыгина после соответствующей замены времени, приведя в явном виде нелинейную вырожденную пуассонову структуру и функцию Гамильтона. К сожалению, авторы замечательного обзора [18] не смогли явно верифицировать наш результат, возможно, вследствие некоторых издательских опечаток в [20]. Здесь мы снова повторим результат [20], а также, используя его, укажем интересный *изоморфизм шара Чаплыгина со случаем Клебша* в уравнениях Кирхгофа. Предположение о таком изоморфизме имеется в [9], но в явном виде он так и не был нигде указан. Он тесно связан с указанным выше изоморфизмом между системами Веселовой и Неймана.

В работе [20] показано, что при произвольном потенциале после замены времени и переменных

$$\rho_\mu \, dt = d\tau, \quad \boldsymbol{L} = \rho_\mu \boldsymbol{M} \tag{25}$$

уравнения движения (5) записываются в гамильтоновой форме

$$\frac{dM_k}{d\tau} = \{H, M_k\}, \quad \frac{d\gamma_k}{d\tau} = \{H, \gamma_k\}$$

с нелинейной скобкой Пуассона

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}\big(L_k - (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma}) D\rho_\mu^2 J_i J_j \gamma_k\big), \quad \{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \tag{26}$$

где гамильтонианом является энергия (6), которая может быть записана в виде

$$H = \frac{\det \mathbf{J}}{2}\big((1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}))(\boldsymbol{L}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{L}) + D(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma})^2\big) + U(\boldsymbol{\gamma}). \tag{27}$$

Несложно показать [20], что при $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, $U(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ гамильтониан (27) определяет фазовый поток, взаимный потоку интегрируемой задачи Брадена [13]. Это еще раз подтверждает вывод, сделанный в [12], о том, что задачи

Чаплыгина и Веселовой задают трансверсальные потоки на одних и тех же инвариантных парах.

Покажем теперь, что задача о качении шара Чаплыгина является обобщенной системой Чаплыгина (1) и скобка (26) может быть получена с помощью метода приводящего множителя (см. теорему 1).

Как и в задаче Веселовой, воспользуемся локальными координатами: углами Эйлера θ, φ, ψ и декартовыми координатами центра цилиндра x, y. В подвижной системе координат, связанной с главными осями шара, вектор угловой скорости и нормаль к плоскости имеют вид (10).

Уравнения связей, выражающие условия отсутствия проскальзывания точки контакта, можно представить в виде

$$f_x = \dot{x} - R\dot{\theta}\sin\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi = 0, \quad f_y = \dot{y} + R\dot{\theta}\cos\psi + R\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi = 0. \tag{28}$$

Уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{x}}\right) = \lambda_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{y}}\right) = \lambda_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}}\right) = 0,\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} = \lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} = \lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial \dot{\varphi}},\end{gathered} \tag{29}$$

где T_0 — кинетическая энергия шара без учета связей (28) (которая, очевидно, не зависит от x, y, ψ):

$$T_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}).$$

Исключая неопределенные множители λ_x, λ_y с помощью первых двух уравнений в (29) и связей (28), находим

$$\begin{gathered}\lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial \dot{\theta}} = -mR^2(\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta),\\ \lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial \dot{\varphi}} = -mR^2(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi})\sin\theta.\end{gathered}$$

Следовательно, уравнения движения для углов θ, φ не зависят от ψ, а зависят только от $\dot{\psi}$. Таким образом, мы видим, что ψ — циклическая переменная и может быть исключена при помощи редукции Рауса, после чего уравнения движения для θ, φ могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \theta} = -\dot{\varphi}S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \varphi} = \dot{\theta}S, \quad S = mR^2\sin\theta(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}). \tag{30}$$

Здесь $\mathscr{R}$ — функция Рауса:

$$\mathscr{R}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T_0 - \dot{\psi}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}},$$

в которую $\dot{x}$, $\dot{y}$ необходимо подставить из уравнений связей, а $\dot{\psi}$ исключается с помощью уравнения для циклического интеграла

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{\psi}} = {}&(I_1 - I_2)\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + I_3\dot{\varphi}\cos\theta\\ &+ ((I_1\sin^2\varphi + I_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\psi} = c = \mathrm{const}.\end{aligned} \tag{31}$$

Таким образом, мы представили уравнения движения в виде обобщенной системы Чаплыгина (1) и, поскольку система обладает мерой, можем представить уравнения (30) в гамильтоновой форме со скобкой (3).

Выполним замену времени вида

$$N(\theta,\varphi)dt = d\tau, \tag{32}$$

где в данном случае $N = \rho_\mu$ — плотность инвариантной меры (23).

Согласно (2) в новом времени уравнения движения примут вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\theta'}\right) - \frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\theta} = -\varphi'\overline{S}, \quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\varphi'}\right) - \frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\varphi} = \theta'\overline{S},\\ \overline{S} = cDJ_3N^3\sin\theta(J_1\cos^2\varphi + J_2\sin^2\varphi),\end{gathered} \tag{33}$$

где $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau} = N^{-1}\dot\theta$, $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} = N^{-1}\dot\varphi$, $\overline{\mathscr{R}} = \mathscr{R}(\theta,\dot\theta,\varphi,\dot\varphi)|_{\dot\theta=N\theta',\ \dot\varphi=N\varphi'}$.

Выполняя преобразования Лежандра для системы в новом времени τ, получим следующее утверждение.

Теорема 4 (о гамильтоновости шара Чаплыгина). *Уравнения движения (30) для шара Чаплыгина после замены времени $Ndt = d\tau$ представляются в гамильтоновой форме*

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} - \overline{S}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial\varphi} + \overline{S}\frac{\partial H}{\partial p_\theta}$$

со скобкой Пуассона вида

$$\{\theta,p_\theta\} = \{\varphi,p_\varphi\} = 1, \quad \{p_\varphi,p_\theta\} = \overline{S}(\theta,\varphi), \quad \{\theta,\varphi\} = 0, \tag{34}$$

где

$$p_\theta = \frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\theta'}, \quad p_\varphi = \frac{\partial\overline{\mathscr{R}}}{\partial\varphi'},$$

$$\begin{aligned}H &= \theta' p_\theta + \varphi' p_\varphi - \overline{\mathscr{R}}\\ &= \frac{1}{2}p_\theta^2(I_3\widetilde{I}_{12} - D(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma})) + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}(I_1I_2\sin^2\theta + I_3\widetilde{I}_{12}\cos^2\theta - D(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}))\\ &+ \frac{p_\theta p_\varphi}{\sin\theta}I_3(I_1-I_2)\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{Ncp_\theta}{\sin\theta}(I_1-I_2)(I_3+D\sin^2\theta)\sin\varphi\cos\varphi\\ &\qquad - \frac{Ncp_\varphi}{\sin^2\theta}I_3(\widetilde{I}_{21}+D) + \frac{N^2c^2}{\sin^2\theta}(I_3+D\sin^2\theta)(\widetilde{I}_{21}+D),\end{aligned}$$

$$\widetilde{I}_{12} = I_1\sin^2\varphi + I_2\cos^2\varphi, \quad \widetilde{I}_{21} = I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi.$$

Выражая теперь переменные $\boldsymbol{L} = \rho_\mu\boldsymbol{M}$ (25) с помощью локальных переменных θ, φ, p_θ, p_φ, находим

$$L_1 = p_\theta\cos\varphi - p_\varphi\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta} + cN\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$

$$L_2 = -p_\theta\sin\varphi - p_\varphi\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta} + cN\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}, \quad L_3 = p_\varphi.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что скобки Пуассона (34) при этом отображении преобразуются в указанную выше структуру (26).

Шар Чаплыгина с гиростатом (см. [5]). При добавлении к катящемуся по плоскости шару ротора, который вращается с постоянной угловой скоростью, уравнения движения (21) записываются в виде

$$\dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{M} = \mathbf{I}_Q \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{k}$ — постоянный вектор гиростатического момента. Аналогично для уравнений (30) необходимо выбрать

$$T_0 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{k}).$$

Эта система обладает той же инвариантной мерой (23), и к ней, очевидно, также применим метод приводящего множителя (теорема 1), при этом для соответствующей функции $\overline{S}$ справедливо

$$\overline{S} = N^3 D \sin\theta (cJ_3(J_1 \cos^2\varphi + J_2 \sin^2\varphi) + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{k}).$$

Используя скобку (34) с новой функцией $\overline{S}$, находим коммутационные соотношения (аналогичные (26)) для компонент векторов $\boldsymbol{L} = \rho_\mu(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk}\big(L_k - D \det \mathbf{J}\big(\rho_\mu^2(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{k})\big)\gamma_k\big),$$
$$\{L_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0.$$

Изоморфизм с системой Клебша. Рассмотрим подробнее интегрируемый случай $U = 0$ на нулевой постоянной площадей $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$, поскольку в этом случае скобка (26) соответствует алгебре $e(3)$. Запишем (опуская несущественные множители) гамильтониан (22) и дополнительный интеграл (24) в переменных $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{\gamma}$ в виде

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}) - \frac{1}{2}[(\boldsymbol{L}, \mathbf{B}\boldsymbol{L})(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}) - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{L})^2],$$
$$F = \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{B} = 1 - D\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}.$$

Используя лемму 1, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Векторное поле* (21) *при* $U = 0$ *на фиксированном уровне интеграла* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) = \mathrm{const}$ *и* $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$ *после замены времени* (25) *и переменных*

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^{-1/2}\mathbf{B}^{-1/2}\boldsymbol{\gamma}, \quad \widetilde{\boldsymbol{L}} = \mathbf{B}^{-1/2}\boldsymbol{L}$$

приводится к векторному полю случая Клебша в уравнениях Кирхгофа при нулевой постоянной площадей.

Замечание 7. Возможно, что указанный изоморфизм может быть использован для доказательства интегрируемости n-мерного шара Чаплыгина хотя бы на специальных орбитах подобно соответствующему результату о задаче Веселовой, полученному в [2].

Замечание 8. В работах [15, 21] рассматриваются уравнения n-мерного шара Чаплыгина по $(n-1)$-мерной плоскости. Хотя вопрос об интегрируемости этой задачи до сих пор остается открытым, в [15, 21] найдены инвариантная мера и серия первых интегралов, обобщающих интегралы энергии, площадей и геометрический интеграл.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Полн. собр. сочинений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 15–25.
2. *Fedorov Yu. N., Jovanović B.* Nonholonomic LR-systems as generalized Chaplygin systems with an invariant measure and flows on homogeneous spaces // J. Nonlinear Sci. 2004. V. 4, N 14. P. 341–381.
3. *Чаплыгин С. А.* О катании шара по горизонтальной плоскости // Полн. собр. сочинений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 78–101.
4. *Cantrijin F., de Léon M., de Diego D.* On the geometry of generalized Chaplygin systems // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2002. V. 132, N 3. P. 323–351.
5. *Маркеев А. П.* Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. Т. 21, № 1. С. 64–65.
6. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
7. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: ГТТИ, 1948.
8. *Веселова Л. Е.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 64–68.
9. *Веселов А. П., Веселова Л. Е.* Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Мат. заметки. 1988. Т. 44, № 5. С. 604–619.
10. *Dragović V., Gajić B., Jovanović B.* Generalizations of classical integrable nonholonomic rigid body systems // J. Phys. A. 1998. V. 31, N 49. P. 9861–9869.
11. *Харламов А. П.* Движение по инерции тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи // Механика твердого тела. НАН Украины, Донецк. 1995. Т. 27. С. 21–31.
12. *Фёдоров Ю. Н.* О двух интегрируемых неголономных системах в классической динамике // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1989. Т. 4. С. 38–41.
13. *Braden H. W.* A completely integrable mechanical system // Lett. Math. Phys. 1982. V. 6, N 4. P. 449–452.
14. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
15. *Fedorov Yu. N., Kozlov V. V.* Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1995. V. 168. P. 141–171.
16. *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики. 1985. Т. 8, № 3. С. 85–101.
17. *Duistermaat J. J.* Chaplygin's sphere // Cushman R., Duistermaat J. J., Śniatycki J. Chaplygin and the Geometry of Nonholonomically Constrained Systems. 2000. eprint arXiv: [math/040919]arxiv.org/abs/math.ps
18. *Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P.* Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin Hamiltonization // The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry (Eds. J. E. Marsden, T. S. Ratiu), Festschrift in honor of Alain Weinstein. Boston: Birkhäuser, 2005. (Progr. Math.; V. 232).
19. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Препятствие к гамильтоновости неголономных систем // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 6. С. 764–766.
20. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 793–795.
21. *Фёдоров Ю. Н.* Динамические системы с инвариантной мерой на римановых симметрических парах $(GL(N), SO(N))$ // Регулярная и хаотическая динамика. 1996. № 1. С. 38–44.

Статья поступила 4 июля 2005 г.

Борисов Алексей Владимирович, *Мамаев Иван Сергеевич*
Удмуртский гос. университет, Институт компьютерных исследований,
ул. Университетская, 1, Ижевск 426034
borisov@rcd.ru, mamaev@rcd.ru