Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

С. Н. Глазатов

Аннотация: Доказаны существование и единственность обобщенного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса квазилинейных псевдопараболических уравнений в нецилиндрических областях. Также исследована однозначная разрешимость в этих областях вариационного неравенства, связанного с рассматриваемым классом уравнений.

Ключевые слова: нелинейное псевдопараболическое уравнение, нецилиндрическая область, первая начально-краевая задача, обобщенное решение, вариационное неравенство, метод штрафа.

В статье рассмотрен ряд задач в нецилиндрических по выделенной временной переменной областях для некоторого класса квазилинейных уравнений третьего порядка, в литературе их принято называть *псевдопараболическими.* Рассматриваются первая начально-краевая задача для таких уравнений и вариационное неравенство, связанное с ними.

Но сначала будет уместно вкратце осветить тот круг проблем, которые, будучи в той или иной мере исследованы различными авторами, обусловили интерес к задачам, рассматриваемым в настоящей статье.

В конце 1960-х — начале 1970-х гг. в работах [1, 2] и других изучена первая начально-краевая задача для уравнения

$$\rho_0 u_{tt} - \sigma(u_x)u_{xx} - \lambda u_{xxt} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\rho_0 > 0$, $\lambda > 0$ — постоянные, $\sigma(\xi) \geq \delta > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$.

Впоследствии эти рассмотрения были перенесены на широкий класс многомерных уравнений. Некоторая библиография, касающаяся этого круга вопросов, имеется в монографиях [3, 4] и в статье [5]. В цитированных там работах рассмотрены задача Коши и первая начально-краевая задача в цилиндрических по переменной t областях для различных частных случаев уравнения

$$\rho_0 u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i(\nabla_x u))_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (w_i(\nabla_x u_t))_{x_i} + F(x,t,u,u_t,\nabla_x u) = f(x,t) \tag{2}$$

либо его модификаций.

Во всех этих работах, кроме [4], предполагались условие гиперболичности оператора, составленного из первых двух слагаемых в (2), и монотонность по u_t оператора, определяемого третьим слагаемым. В таком случае уравнение (2) получило название *сильно возмущенного гиперболического* или *псевдогиперболического уравнения.* При дополнительных условиях на рост и гладкость функций $\sigma_i(\xi)$, $w_i(\xi)$ и $F(x,t,\eta_1,\eta_2,\xi)$, входящих в (2), в этих работах доказаны существование и единственность решений рассмотренных задач в различных классах функций.

Что касается вариационных неравенств, связанных с уравнениями вида (2), то здесь можно указать работы [6, 7]. В [6] при $F \equiv 0$ рассмотрена задача с препятствием на решение $u(x,t)$ для линейного многомерного уравнения (2). Некоторые вариационные неравенства для уравнения типа уравнения (2) исследованы в [7].

Отметим также то, что имеются работы (см. [8–11]), где начально-краевые задачи для псевдогиперболических уравнений вида (2) рассматривались в нецилиндрических областях. При этом разные авторы предлагали для решения этих задач различную технику. В работах [8, 9], где изучены лишь линейные уравнения вида (2) с $F \equiv 0$, для доказательства обобщенной разрешимости поставленных краевых задач использовались методы теории полугрупп и теория интерполяции функциональных пространств. В работах [10, 11] поставлены краевые задачи для нелинейных уравнений вида (2) и для их исследования предложен иной метод — метод «выпрямления» границы, который позволил получить более регулярные, чем в [8, 9], решения.

Имеется также значительное количество работ (см., например, монографии [4, гл. 2, п. 1.1; 12] и статьи [13–15], а также библиографию в них), посвященных изучению различных постановок задач для многих частных случаев нелинейного псевдопараболического уравнения общего вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i(\nabla_x u))_{x_i} - \sum_{i=1}^{n}(w_i(\nabla_x u_t))_{x_i} + F_1(x,t,u,\nabla_x u) = f(x,t). \tag{3}$$

Такие задачи интересны с математической точки зрения, а их трудность определяется и тем, что уравнение не разрешено относительно старшей (в данном случае первой) производной по переменной t.

Вместе с тем какие-либо работы, посвященные начально-краевым задачам и вариационным неравенствам в нецилиндрических областях для уравнений вида (3), автору не известны вообще.

Основной целью настоящей статьи является распространение теории начально-краевых задач и вариационных неравенств в нецилиндрических областях на уравнения вида (3) хотя бы для случая $F_1 \equiv 0$, $w_i(\xi) = \xi_i$. В этом случае при $\sigma_i(\xi) = \xi_i$ и $n \le 3$ уравнение (3) выведено в работе [16] и описывает распространение жидкости в неоднородном грунте. Нелинейные уравнения, рассматриваемые в статье, вероятно, имеют модельный характер, но интересны с математической точки зрения, поскольку здесь мы имеем дело с новыми неклассическими задачами, и традиционно известные методы исследования нелинейных краевых задач и вариационных неравенств зачастую нуждаются в более или менее значительной модификации по сравнению, например, с их использованием в монографии [17].

Будет исследована разрешимость первой начально-краевой задачи для некоторого класса уравнений вида (3) в специальных нецилиндрических областях.

Мы уделим основное внимание двумерному случаю. Он является наиболее показательным в смысле техники доказательства соответствующего результата. Кроме того, описание области с «криволинейной» границей наиболее интересно именно в двумерном случае, поскольку «боковая» граница в отличие от многомерного случая здесь, вообще говоря, имеет две компоненты связности.

Итак, на плоскости переменных (x,t) рассмотрим область Q, которая ограничена отрезками прямых $t=0$ и $t=T$ $(0<T<+\infty)$ и двумя кривыми γ_1 и γ_2, которые задаются соответственно уравнениями $\varphi_1(x)-A_1t=0$ и $\varphi_2(x)-A_2t=0$. Здесь $\varphi_1\in C(\mathbb{R})$ строго монотонно убывает, $\varphi_2\in C(\mathbb{R})$ строго монотонно возрастает, A_i принимают одно из двух значений: либо 0, либо 1. Если $A_i=0$, то это соответствует случаю, когда γ_i — отрезок прямой, параллельной оси Ot, а равенство $\varphi_i(x)=0$ соответствует равенству $x=\varphi_i^{-1}(0)$, т. е. уравнению упомянутой прямой. Обозначим $\alpha=\varphi_1^{-1}(0)$, $\beta=\varphi_2^{-1}(0)$ и потребуем, чтобы $\alpha\le\beta$ в случае $A_1^2+A_2^2>0$ и $\alpha<\beta$ в случае $A_1=A_2=0$. Введем также обозначения $a=\varphi_1^{-1}(T)$, $b=\varphi_2^{-1}(T)$. Очевидно, что $a\le\alpha$ и $\beta\le b$, причем равенство возможно лишь в случае, когда соответствующий участок границы прямолинейный.

В области Q рассмотрим уравнение

$$B_0u\equiv u_t-(a(u_x))_x-u_{xxt}=f(x,t). \tag{4}$$

К нему присоединим начально-краевые условия

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in(\alpha,\beta), \tag{5}$$

$$u|_{\gamma_1}=u|_{\gamma_2}=0. \tag{6}$$

Если $\alpha=\beta$, то условие (5) отсутствует.

Заметим, что в работе [16] выделен и изучен важный для приложений случай $n=1$, т. е. в линейном случае задача (4)–(6) имеет физический смысл, разъясненный в [16].

Функция $a(\xi):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $a\in C(\mathbb{R})$, $|a(\xi)|\le C_0(1+|\xi|^{p-1})$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$, $C_0>0$, $p\ge 2$, $a(\xi)$ не убывает на $\mathbb{R}$ и $a(0)=0$. Обозначим

$$A(\xi)=\int\limits_0^{\xi}a(\sigma)\,d\sigma$$

и потребуем выполнения оценки $A(\xi)\ge C_1|\xi|^p-C_2$ для всех $\xi\in\mathbb{R}$, где $C_1>0$ и C_2 — некоторые константы.

Начально-краевая задача. *Найти в области Q решение уравнения* (4), *удовлетворяющее начально-краевым условиям* (5), (6).

Обозначим через I_τ пересечение области Q и прямой $t=\tau$.

Определение. Назовем функцию $u(x,t)\in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\big)$ такую, что $u_t\in L^2\big(0,T;W_2^1(I_t)\big)$, *обобщенным решением начально-краевой задачи* (4)–(6), если она удовлетворяет начально-краевым условиям (5), (6) и для любой функции $v(x,t)\in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\big)$ выполняется равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{I_t}u_tv\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{I_t}a(u_x)v_x\,dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{I_t}u_{xt}v_x\,dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_{I_t}fv\,dxdt.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все указанные выше условия на коэффициент $a(\xi)$ уравнения* (4) *и на область Q. Тогда для любой функции $f(x,t)\in L^2(Q)$*

и для любой функции $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\alpha,\beta)$ *существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи* (4)–(6).

Доказательство. Построим цилиндрическую область Q_T, ограниченную отрезками прямых $t = 0$ и $t = T$ и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Очевидно, что $Q \subseteq Q_T$. Проведем доказательство лишь для случая, когда $A_1 = A_2 = 1$ (т. е. обе компоненты связности боковой границы являются криволинейными). Остальные случаи значительно проще. Обозначим $G = Q_T \setminus \overline{Q}$, и пусть G_1 — та компонента G, частью границы которой является γ_1, а G_2 — та компонента G, частью границы которой является γ_2.

Введем в рассмотрение функцию

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x) - t, & (x,t) \in G_1, \\ 0, & (x,t) \in Q, \\ \varphi_2(x) - t, & (x,t) \in G_2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\theta, \theta_t \in L^\infty(Q_T)$ и $\theta(x,t) > 0$ при $(x,t) \in G$.

В области Q_T рассмотрим уравнение, содержащее «штрафное» слагаемое

$$B_0^\varepsilon u^\varepsilon \equiv u_t^\varepsilon - (a(u_x^\varepsilon))_x - u_{xxt}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\theta(x,t)u^\varepsilon = \tilde{f}(x,t). \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, функция $\theta(x,t)$ построена ранее и выполняет роль «штрафа на область»,

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G. \end{cases}$$

Построим также функцию

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in I_0, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus I_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{u}_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)$.

Присоединим к (7) начально-краевые условия

$$u^\varepsilon(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in (a,b), \tag{8}$$

$$u^\varepsilon|_{x=a} = u^\varepsilon|_{x=b} = 0. \tag{9}$$

Будем решать начально-краевую задачу (7)–(9) методом Галёркина, получая в процессе решения оценки, равномерные по параметру штрафа ε.

Рассмотрим $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — базис в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)$. Без ограничения общности можно считать, что функции $\omega_i(x)$ ортонормированы в $W_2^1(a,b)$. Ищем приближенные решения в виде

$$u^{m,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^m c_{km}^\varepsilon(t)\omega_k(x).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\left(B_0^\varepsilon u^{m,\varepsilon}, \omega_k\right)_0 = (\tilde{f}, \omega_k)_0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

$$c_{km}^\varepsilon(0) = \tilde{u}_{0k}, \tag{11}$$

где через $\tilde{u}_{0k}$ обозначены коэффициенты в разложении $\tilde{u}_0$ по базису $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$, а через $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L^2(a,b)$.

В силу отмеченного нами свойства базиса система (10) приводится к нормальному виду и задача Коши (10), (11) разрешима на интервале $[0, t_m)$. В дальнейшем будет ясно, что $t_m = T$ для всех m.

Умножим каждое уравнение (10) на $c_{km}(\tau)$, просуммируем по k от 1 до m и проинтегрируем результат от 0 до $t \le T$. В итоге получим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_a^b B_0^\varepsilon u^{m,\varepsilon} u^{m,\varepsilon}\, dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_a^b \tilde{f} u^{m,\varepsilon}\, dxd\tau.$$

Интегрируя где надо по частям, учитывая условия теоремы на $a(\xi)$, применяя к правой части неравенство Коши и используя лемму Гроноулла, приходим к равномерным по m, ε априорным оценкам

$$\|u^{m,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))} \le C_3, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_a^b \theta(x,t)(u^{m,\varepsilon})^2\, dxdt \le \varepsilon C_4. \tag{13}$$

Далее, умножим каждое уравнение (10) на $c'_{km}(\tau)$, просуммируем по k от 1 до m и проинтегрируем результат от 0 до $t \le T$. Тогда

$$\int\limits_0^t \int\limits_a^b B_0^\varepsilon u^{m,\varepsilon} u_\tau^{m,\varepsilon}\, dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_a^b \tilde{f} u_\tau^{m,\varepsilon}\, dxd\tau.$$

Интегрируя по частям и применяя к правой части неравенство Коши, получаем

$$\begin{gathered} \int\limits_0^t \int\limits_a^b (u_\tau^{m,\varepsilon})^2\, dxd\tau + \int\limits_a^b A(u_x^{m,\varepsilon})\, dx|_{\tau=t} + \int\limits_0^t \int\limits_a^b (u_{x\tau}^{m,\varepsilon})^2\, dxd\tau \\ + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_a^b \theta (u^{m,\varepsilon})^2\, dx|_{\tau=t} - \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \int\limits_a^b \theta_t (u^{m,\varepsilon})^2\, dxd\tau \\ \le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_a^b \tilde{f}^2\, dxd\tau + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_a^b (u_\tau^{m,\varepsilon})^2\, dxd\tau \\ + \int\limits_a^b A(\tilde{u}_{0x}^m)\, dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_a^b \theta(x,0)(\tilde{u}_0^m)^2\, dx, \end{gathered} \tag{14}$$

где через $\tilde{u}_0^m$ обозначены суммы $\sum\limits_{k=1}^m \tilde{u}_{0k}\omega_k(x)$.

Условия теоремы дают оценку снизу

$$\int\limits_a^b A(u_x^{m,\varepsilon})\, dx|_{\tau=t} \ge C_1 \int\limits_a^b |u_x^{m,\varepsilon}|^p\, dx|_{\tau=t} - C_5.$$

Учитывая неотрицательность $\theta(x,t)$ и то, что $\theta_t = 0$ при $(x,t) \in Q$ и $\theta_t = -1$ при $(x,t) \in G$, четвертое и пятое слагаемые в левой части (14) можно отбросить. В силу условий на $a(\xi)$ ее первообразная допускает оценку сверху

$$A(\xi) \le C_6(|\xi|^p + 1),$$

поэтому, благодаря условиям на начальные данные и способу построения $\tilde{u}_0$, получается, что третий интеграл в правой части (14) равномерно m ограничен сверху некоторой константой.

Применим к четвертому интегралу в правой части (14) неравенство Гёльдера в случае $p > 2$. Учитывая, что $\theta(x,0) \equiv 0$ при $x \in (\alpha, \beta)$, получим неравенство

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_a^b \theta(x,0)(\tilde{u}_0^m)^2\,dx \le \frac{1}{2\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{(a,b)\setminus I_0} \theta^{\frac{p}{p-2}}(x,0)\,dx\Bigg)^{\frac{p-2}{p}}\Bigg(\int\limits_{(a,b)\setminus I_0} |\tilde{u}_0^m|^p\,dx\Bigg)^{\frac{2}{p}} \le \frac{C_7}{\varepsilon}\|\tilde{u}_0^m\|^2_{L^p((a,b)\setminus I_0)}.$$

Поскольку $\tilde{u}_0 \equiv 0$ при $x \in (a,b)\setminus I_0$, а $\tilde{u}_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{u}_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)$, существует $m_0(\varepsilon) > 0$ такое, что $\|\tilde{u}_0^m\|_{L^p((a,b)\setminus I_0)} < \varepsilon$ при $m > m_0(\varepsilon)$. Это означает, что и весь рассматриваемый интеграл при $m > m_0(\varepsilon)$ оценится абсолютной константой, не зависящей от m, ε.

Если $p = 2$, то требуемая оценка получается совершенно аналогично.

В итоге приходим к равномерным по m, ε априорным оценкам

$$\|u^{m,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b))} \le C_8, \tag{15}$$

$$\|u_t^{m,\varepsilon}\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b))} \le C_9. \tag{16}$$

Используя оценки (12), (15), (16), метод компактности и метод монотонности, можно стандартным образом совершить предельный переход в равенстве (10) при $m \to \infty$ на некоторой подпоследовательности $\{m_l\}_{l=1}^\infty$ и для каждого $\varepsilon > 0$ получить функцию $u^\varepsilon \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)\big)$ такую, что $u_t^\varepsilon \in L^2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b)\big)$, удовлетворяющую для любой функции $\tilde{v} \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)\big)$ равенству

$$\int\limits_0^T\int\limits_a^b u_t^\varepsilon \tilde{v}\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_a^b a(u_x^\varepsilon)\tilde{v}_x\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_a^b u_{xt}^\varepsilon \tilde{v}_x\,dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_a^b \theta u^\varepsilon \tilde{v}\,dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_a^b \tilde{f}\tilde{v}\,dxdt. \tag{17}$$

Метод монотонности применяется стандартным образом (см. [17, гл. 2]) и не требует каких-либо модификаций.

Заметим, что оценки (12), (13), (15) и (16) остаются справедливыми и для семейства функций $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\le\varepsilon_0}$ с теми же константами, не зависящими от ε. Оценка (13) остается справедливой в силу априорных оценок, теоремы компактности и теоремы Лебега о предельном переходе в интеграле.

Обратим внимание на то, что если взять произвольную функцию v из пространства $L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\big)$ и продолжить ее нулем на множество G, то построенная таким образом функция $\tilde{v} \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)\big)$ попадает в класс пробных функций, фигурирующих в (17), и это равенство справедливо для нее при любом $\varepsilon > 0$.

На основании этих фактов, пользуясь теми же методами компактности и монотонности, можно совершить в равенстве (17) предельный переход при $\varepsilon \to 0$ на некоторой подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$. Но в качестве пробных функций $\tilde{v}(x,t)$ нужно брать лишь функции специального вида, а именно такие $\tilde{v}(x,t)$, что $v(x,t) = \tilde{v}(x,t)|_Q \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\bigr)$, а $\tilde{v}(x,t)|_G \equiv 0$.

Как мы уже видели, такая процедура корректна, а главное, что если $\tilde{v}(x,t)$ брать лишь из этого класса, то

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_a^b \theta u^\varepsilon \tilde{v}\,dxdt = 0$$

для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, поскольку $\theta \equiv 0$ в области Q и $\tilde{v} \equiv 0$ в области G.

Таким образом, в результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ получена функция $u(x,t) \in L^\infty\bigl(0,T;W^1_p(I_t)\bigr)$ такая, что $u_t \in L^2\bigl(0,T;W^1_2(I_t)\bigr)$, которая удовлетворяет интегральному равенству, фигурирующему в определении обобщенного решения задачи (4)–(6) для любой функции $v(x,t) \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\bigr)$.

Теперь покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (5), (6). По построению функции $u(x,t)$ очевидно, что $u(x,0) = \tilde{u}_0(x)$ для п. в. $x \in (a,b)$, а значит, $u(x,0) = u_0(x)$ для п. в. $x \in (\alpha,\beta)$. Далее, из оценки (13) для семейства $\{u^\varepsilon\}$, оценок (15), (16), теорем компактности и теоремы Лебега получаем, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_a^b \theta u^2\,dxdt = 0,$$

а это означает, что $u(x,t) \equiv 0$ п. в. в G. На каждом сечении $\tau = t_0$ имеем $u(x,t_0) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)$, и с учетом теоремы вложения $u(x,t_0) \in C[a,b]$. В силу непрерывности на всей границе γ_1 и на всей границе γ_2 будет $u(x,t) \equiv 0$, т. е. краевое условие (6) также выполняется.

Итак, показано, что $u(x,t) \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\bigr)$, $u_t \in L^2\bigl(0,T;W^1_2(I_t)\bigr)$, $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (5), (6) и фигурирующему в определении интегральному тождеству. Тем самым $u(x,t)$ является обобщенным решением начально-краевой задачи (4)–(6).

Докажем единственность обобщенного решения. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\bigr)$ — два обобщенных решения задачи (4)–(6). Пусть

$$\tilde{u}_i(x,t) = \begin{cases} u_i(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t), \in G, \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

Очевидно, что $\tilde{u}_i$ удовлетворяют интегральному равенству (17) для $\tilde{v}(x,t) \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(a,b)\bigr)$, обладающих свойством $\tilde{v}|_Q \in L^\infty\bigl(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\bigr)$, $\tilde{v}|_G \equiv 0$. При этом слагаемое, содержащее $\theta(x,t)$, отсутствует в силу уже отмеченных фактов. Запишем равенство (17) с произвольной функцией $\tilde{v}(x,t)$ из описанного класса для $\tilde{u}_1$ и это же равенство для $\tilde{u}_2$ и вычтем одно из другого. Положим $\tilde{v}(x,t) = (\tilde{u}_1(x,t) - \tilde{u}_2(x,t))\exp(-\lambda^2 t)$. Из построения $\tilde{u}_i(x,t)$ очевидно, что это — корректная процедура.

Интегрируя по частям и вспоминая, что $a(\xi)$ не убывает на $\mathbb{R}$, в итоге получаем, что $\tilde{u}_1 \equiv \tilde{u}_2$ п. в. в Q_T, а значит, $u_1 \equiv u_2$ п. в. в Q.

Теорема доказана полностью.

Теперь рассмотрим многомерное уравнение

$$B_1 u \equiv u_t - \mathrm{div}(\mathbf{a}(\nabla_x u)) - \Delta_x u_t = f(x,t), \tag{18}$$

где $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле. Требуется, чтобы оно было потенциальным, т. е. чтобы существовала гладкая скалярная функция $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\nabla_\xi A = (a_1(\xi), \ldots, a_n(\xi))$. Эта функция должна удовлетворять двусторонней оценке

$$C_9|\xi|^p - C_{10} \le A(\xi) \le C_{11}(1 + |\xi|^p)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $p > n$, $C_9 > 0$, $C_{11} > 0$, C_{10} — некоторые константы. Для самих функций $a_i(\xi)$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(\xi)| \le C_{12}(1 + |\xi|^{p-1})$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $C_{12} > 0$. Кроме того, пусть $\mathbf{a}(0) = 0$.

Опишем область Q, в которой будем искать решение соответствующей начально-краевой задачи. Эта область ограничена участками гиперплоскостей $t = 0$ и $t = T$ и некоторой гладкой поверхностью Γ, задаваемой уравнением $\varphi(x) - Mt = 0$, где $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а параметр M может принимать два значения: либо $M = 1$, либо $M = 0$. Последний случай соответствует цилиндрической области Q. Кроме того, поверхность Γ такова, что для любого $t \in (0, T]$ множество D_t — пересечение Q и гиперплоскости $\tau = t$ — является ограниченной односвязной областью с гладкой границей, а D_0 либо ограниченная односвязная область с гладкой границей, либо одноточечное множество $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Кроме того, требуется, чтобы область Q «расширялась» с ростом t, т. е. для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ если $t_1 < t_2$, то $D_{t_1} \subseteq D_{t_2}$.

Также необходимо, чтобы оператор $\Lambda : \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_T) \to W^{-1}_{p'}(D_T)$, действующий по правилу

$$\langle \Lambda u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{D_T} a_i(\nabla_x u) v_{x_i}\, dx,$$

был монотонным (здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено отношение двойственности в соответствующих функциональных пространствах).

Присоединим к (18) начально-краевые условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D_0, \tag{19}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{20}$$

Если D_0 — одноточечное множество, то условие (19) отсутствует.

Начально-краевая задача. *Найти в области Q решение уравнения* (18), *удовлетворяющее начально-краевым условиям* (19), (20).

Почти так же, как и при рассмотрении начально-краевой задачи в двумерном случае, определяется обобщенное решение с тем лишь изменением, что вместо функционального пространства $L^\infty\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(I_t)\big)$ появляется пространство $L^\infty\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_t)\big)$, а вместо $L^2\big(0, T; W^1_2(I_t)\big)$ — пространство $L^2\big(0, T; W^1_2(D_t)\big)$. Вместо интегралов по I_t будут фигурировать интегралы по D_t, а вместо производных u_x и v_x — градиенты $\nabla_x u$ и $\nabla_x v$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на коэффициенты уравнения* (18) *и на область* Q. *Тогда для любой функции* $f(x,t) \in L^2(Q)$ *и для любой функции* $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D_0)$ *существует единственное обобщенное решение начально-краевой задачи* (18)–(20).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. Отметим здесь лишь наиболее важные моменты, в которых заключается небольшое отличие от доказательства упомянутой теоремы. Так же рассматривается наиболее интересный случай $M = 1$.

Построим цилиндрическую область $Q_T = D_T \times (0,T)$ (очевидно, что $Q \subseteq Q_T$) и в Q_T рассмотрим уравнение со штрафом

$$B_1^\varepsilon u^\varepsilon \equiv B_1 u^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\theta_1(x,t)u^\varepsilon = \tilde{f}(x,t). \tag{21}$$

Здесь

$$\theta_1(x,t) = \begin{cases} 0, & (x,t) \in Q, \\ \varphi(x) - t, & (x,t) \in G, \end{cases}$$

$\theta_1 \in L^\infty(Q_T) \cap W_2^1(Q_T)$, $\theta_1(x,t) > 0$ в G, где $G = Q_T \setminus \overline{Q}$.

Функции $\tilde{f}(x,t)$ и $\tilde{u}_0(x)$ строятся по аналогии с доказательством теоремы 1. Так же решается первая начально-краевая задача для уравнения (21) в области Q_T.

Вывод и использование априорных оценок совершенно аналогичны двумерному случаю.

При рассмотрении равенства

$$\int_0^t \int_{D_T} B_1^\varepsilon u^{m,\varepsilon} u_\tau^{m,\varepsilon}\, dx\tau = \int_0^t \int_{D_T} \tilde{f} u_\tau^{m,\varepsilon}\, dx d\tau$$

используются потенциальность поля $\mathbf{a}(\xi)$ и оценка снизу на потенциал $A(\xi)$.

При осуществлении предельных переходов применяется монотонность оператора Λ.

Условие $p > n$ учитывается при доказательстве того, что полученная функция удовлетворяет краевому условию (20), когда рассматриваются сечения D_{t_0}, где решение должно быть непрерывной функцией.

Отличий в доказательстве единственности полученного решения тоже нет, также используется монотонность оператора Λ.

Поскольку основные технические приемы, примененные при доказательстве теорем 1 и 2, в основном годятся и в случае рассмотрения начально-краевой задачи для нелинейных параболических уравнений, то может создаться впечатление, что слагаемые $-u_{xxt}$ либо $-\Delta_x u_t$ не играют особой роли и их наличие не создает технических трудностей и не вносит какой-либо новизны. Однако это не так, поэтому разъясним различия между нелинейными параболическими уравнениями и псевдопараболическими уравнениями (4), (18). Мы поясним эти различия на примере одномерного по x случая.

Во-первых, при применении метода Галёркина здесь в отличие от параболического уравнения приходится доказывать приводимость системы уравнений (10) к нормальному виду (этим объясняется требование $p \geq 2$). Однако если $1 < p < 2$, то доказать этот факт весьма непросто. Во-вторых, доказательство теоремы единственности обобщенного решения в случае параболического уравнения совершенно стандартно и просто. В случае псевдопараболического уравнения стандартная процедура не приводит к нужному результату, поэтому приходится проводить дополнительное построение.

Но главное различие состоит в другом (правда, это относится лишь к случаю, когда область Q цилиндрическая, а на функцию $a(\xi)$ наложены значительно более жесткие условия, чем в теореме 1). Уравнение (4) в цилиндрической области Q допускает скалярное умножение в $L^2(Q)$ на $-u_{xx}$. При этом можно получить равномерную оценку приближений u^m_{xx} в $L^2(Q)$, а это вместе с оценкой (16) обосновывает то, что $u^m_x \to u_x(x,t)$ сильно в $L^2(Q)$ при $m \to \infty$. Повторюсь, при ужесточении условий на $a(\xi)$ это позволяет перейти к пределу при $m \to \infty$ в нелинейном слагаемом, используя лишь метод компактности, и получить гладкое решение начально-краевой задачи. Наиболее общий результат в этом направлении (и даже в многомерном случае) получен в [4, гл. 2, п. 1.1]. В случае нелинейного параболического уравнения при, например, $a'(0) = 0$, вывод оценки на u^m_{xx} вызывает непреодолимые трудности, а это приводит к тому, что $u_{xx} \notin L^p(Q)$ при любом $p \in [1, \infty]$.

Отметим, что начально-краевые задачи для нелинейных параболических уравнений в нецилиндрических областях исследованы, например, в [18, 19].

Теперь перейдем к вопросу о разрешимости вариационного неравенства, связанного с уравнениями (4) и (18). В монографии [17] развита общая теория вариационных неравенств для параболических уравнений, когда множество ограничений имеет самый общий вид, как и оператор штрафа. В качестве примеров конкретных множеств ограничений и примеров построения операторов штрафа в явном виде приведены задача с препятствием и задача с ограничением на градиент решения.

В настоящей статье рассматривается вариационное неравенство, связанное с уравнениями (4) и (18) с ограничением на градиент решения. Эту задачу можно рассматривать как модельную. Вместе с тем в процессе ее решения необходимо модифицировать (иногда существенно) известные методы решения вариационных неравенств, а множество ограничений выбрать так, что, построив разумным образом оператор штрафа, можно существенно ослабить условия на нелинейное слагаемое по сравнению, например, с условиями теорем 1 и 2.

Рассмотрим сначала двумерный случай. Уравнение (4) рассматривается в той же области Q на плоскости (x,t), что и в теореме 1. К нему присоединяются начально-краевые условия (5), (6).

Пусть функция $a(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $a \in C(\mathbb{R})$, $|a(\xi)| \le C_{13}(1 + |\xi|^{p-1})$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $C_{13} > 0$, $p > 1$, $a(\xi)$ не убывает на $\mathbb{R}$ и $a(0) = 0$.

Введем целое неотрицательное число s так, чтобы $4s + 4 > p$, и обозначим $q = 4s + 4$.

Введем множество ограничений $\mathscr{K}_t = \bigl\{z(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(I_t) : |z_x| \le 1 \text{ п. в. на } I_t\bigr\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на область Q и на коэффициент $a(\xi)$ в уравнении (4). Тогда для любой функции $f(x,t) \in L^2(Q)$ и для любой функции $u_0(x) \in \mathscr{K}_0$ существует единственная функция $u(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{K}_t)$, у которой $u_t \in L^2\bigl(0,T;W^1_2(I_t)\bigr)$, удовлетворяющая начально-краевым условиям (5), (6), такая, что для любого $t \in [0,T]$ и для любой функции*

$v(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{K}_t)$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^t \int_{I_\tau} u_\tau (v-u)\,dxd\tau + \int_0^t \int_{I_\tau} a(u_x)(v_x-u_x)\,dxd\tau + \int_0^t \int_{I_\tau} u_{x\tau}(v_x-u_x)\,dxd\tau \geq \int_0^t \int_{I_\tau} f(v-u)\,dxd\tau.$$

Доказательство. Построим цилиндрическую область Q_T так же, как и в доказательстве теоремы 1. В этом случае доказательство проводится лишь для случая, когда $A_1 = A_2 = 1$. Введем те же обозначения $G = Q_T \setminus \overline{Q}$, G_1 и G_2.

В области Q_T рассмотрим уравнение, содержащее два «штрафных» слагаемых:

$$\widetilde{B}_0^\varepsilon u^\varepsilon \equiv u_t^\varepsilon - (a(u_x^\varepsilon))_x - u_{xxt}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}([(1-(u_x^\varepsilon)^2)^-]^{2s+1}u_x^\varepsilon)_x + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\theta(x,t)u^\varepsilon = \tilde{f}(x,t). \quad (22)$$

Здесь число s уже выбрано ранее. Напомним, что построенная в доказательстве теоремы 1 функция $\theta(x,t)$ выполняет роль «штрафа на область» и обладает тем свойством, что $\theta, \theta_t \in L^\infty(Q_T)$ и $\theta(x,t) > 0$ при $(x,t) \in G$,

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G. \end{cases}$$

Построим также функцию

$$\tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in I_0, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus I_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tilde{u}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b)$.

Присоединим к (22) начально-краевые условия

$$u^\varepsilon(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in (a,b), \quad (23)$$

$$u^\varepsilon|_{x=a} = u^\varepsilon|_{x=b} = 0. \quad (24)$$

Будем решать начально-краевую задачу (22)–(24) методом Галёркина, получая в процессе решения оценки, равномерные по параметру штрафа ε.

Рассмотрим $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — базис в $\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b)$. Как отмечалось, без ограничения общности можно считать, что функции $\psi_i(x)$ ортонормированы в $W_2^1(a,b)$. Ищем приближенные решения в виде

$$u^{m,\varepsilon}(x,t) = \sum_{k=1}^m \tilde{c}_{km}^\varepsilon(t)\psi_k(x).$$

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют доказательство теоремы 1. Мы не будем приводить их подробно, а лишь рассмотрим получающиеся в результате соответствующих процедур равенства. Как мы уже видели, сначала выводится равенство

$$\int_0^t \int_a^b \widetilde{B}_0^\varepsilon u^{m,\varepsilon} u^{m,\varepsilon}\,dxd\tau = \int_0^t \int_a^b \tilde{f} u^{m,\varepsilon}\,dxd\tau.$$

В результате интегрирования по частям, применения неравенства Коши и леммы Гронуолла получаем априорные оценки, равномерные по m и ε:

$$\|u^{m,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b))} \leq C_{14}, \tag{25}$$

$$\int_0^T\int_a^b ([1-(u_x^{m,\varepsilon})^2]^-)^{2s+1}(u_x^{m,\varepsilon})^2\,dxdt \leq \varepsilon C_{15}, \tag{26}$$

$$\int_0^T\int_a^b \theta(u^{m,\varepsilon})^2\,dxdt \leq \sqrt{\varepsilon}C_{16}. \tag{27}$$

Далее рассматривается равенство

$$\int_0^t\int_a^b \widetilde{B}_0^\varepsilon u^{m,\varepsilon}u_\tau^{m,\varepsilon}\,dxd\tau = \int_0^t\int_a^b \tilde{f}u_\tau^{m,\varepsilon}\,dxd\tau.$$

В результате интегрирования по частям и применения неравенства Коши получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_a^b (u_\tau^{m,\varepsilon})^2\,dxd\tau + \int_a^b A(u_x^{m,\varepsilon})\,dx|_{\tau=t} + \int_0^t\int_a^b (u_{x\tau}^{m,\varepsilon})^2\,dxd\tau \\ + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_a^b \theta(u^{m,\varepsilon})^2\,dx|_{\tau=t} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_a^b \theta_t(u^{m,\varepsilon})^2\,dxd\tau + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \Phi(u_x^{m,\varepsilon})^2\,dx|_{\tau=t} \\ \leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_a^b \tilde{f}^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int_0^t\int_a^b (u_\tau^{m,\varepsilon})^2\,dxd\tau + \int_a^b A(\tilde{u}_{0x}^m)\,dx \\ + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\int_a^b \theta(x,0)(\tilde{u}_0^m)^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b \Phi(\tilde{u}_{0x}^m)\,dx,\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\tilde{u}_0^m(x) = \sum_{k=1}^m \tilde{u}_{0k}\psi_k(x).$$

Здесь введены обозначения:

$$A(\xi) = \int_0^\xi a(\tau)\,d\tau, \quad \Phi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq 1 \\ \frac{(\xi^2-1)^{2s+2}}{4(s+1)}, & |\xi| \geq 1. \end{cases}$$

Функция $\Phi(\xi)$ есть не что иное, как первообразная функции $[(1-|\xi|^2)^-]^{2s+1}\xi$.

Четвертое и пятое слагаемые из левой части (28), как мы видели, могут быть отброшены. В силу условий на $a(\xi)$ ее первообразная допускает оценку снизу $A(\xi) \geq -C_{13}|\xi|^p - C_{14}$. Из выбора числа s ясно, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\frac{1}{\varepsilon}\Phi(\xi) - C_{13}|\xi|^p - C_{14} \geq C_{15}|\xi|^q - C_{16},$$

где $C_{15} > 0$ и C_{16} не зависят от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Комбинируя второе и шестое слагаемые в левой части (28), получаем равномерную по m, ε оценку в $L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)\big)$ для приближений $u^{m,\varepsilon}$.

Третье и четвертое слагаемые в правой части (28) оцениваются так же, как и в доказательстве теоремы 1.

Пользуясь тем, что $\Phi(\tilde u_{0x}) \equiv 0$ по построению $\tilde u_0$, оценим последний интеграл в правой части (28) по модулю:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_a^b |\Phi(\tilde u^m_{0x}) - \Phi(\tilde u_{0x})|\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b |\Phi'(\kappa_m \tilde u^m_{0x} + (1-\kappa_m)\tilde u_{0x})||\tilde u^m_{0x} - \tilde u_{0x}|\,dx$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_a^b |\Phi'(\kappa_m \tilde u^m_{0x} + (1-\kappa_m)\tilde u_{0x})|^{q'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_a^b |\tilde u^m_{0x} - \tilde u_{0x}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{C_{17}}{\varepsilon}\|\tilde u^m_0 - \tilde u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)},$$

где $\kappa_m \in (0,1)$ — некоторое число.

Это неравенство справедливо в силу построения числа q и свойств начальной функции $\tilde u_0(x)$.

Соответствующие вычисления элементарны: $q' = \frac{4(s+1)}{4s+3}$, и при $|\xi| > 1$ справедливы неравенства

$$|\Phi'(\xi)|^{q'} \le (|\xi|^{4s+3} + |\xi|)^{q'} \le C(q')(|\xi|^q + |\xi|^{q'}) \le \widetilde{C}|\xi|^q,$$

поскольку $1 < q' < q$.

Очевидно, что

$$\int_a^b |\Phi'(\cdot)|^{q'}\,dx \le C_{18}\int_a^b (|\tilde u^m_{0x}|^q + |\tilde u_{0x}|^q)\,dx \le C_{19}.$$

В силу того, что $\tilde u^m_0 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \tilde u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)$, при $m > m_0(\varepsilon)$ имеем

$$\|\tilde u^m_0 - \tilde u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)} < \varepsilon.$$

Это означает, что весь рассматриваемый интеграл оценивается сверху при $m > m_0(\varepsilon)$ абсолютной константой.

В итоге при $m > m_0(\varepsilon)$ получаем следующие априорные оценки, равномерные по m, ε:

$$\|u^{m,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b))} \le C_{20}, \tag{29}$$

$$\|u^{m,\varepsilon}_t\|_{L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b))} \le C_{21}. \tag{30}$$

Далее, с использованием оценок (29), (30), методов компактности и монотонности осуществляем в равенстве, аналогичном равенству (10), предельный переход при $m \to \infty$ (на некоторой подпоследовательности $\{m_l\}_{l=1}^\infty$).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ получено обобщенное решение задачи (22)–(24), а именно функция $u^\varepsilon \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)\big)$ такая, что u^ε_t принадлежит $L^2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b)\big)$. Начально-краевые условия (23), (24) удовлетворяются очевидным образом. Оценка (26) остается справедливой для семейства $\{u^\varepsilon\}$ с той же константой C_{15} в силу свойств выпуклых функционалов, а оценка (27) — в силу априорных оценок и теоремы Лебега. Для вышеуказанного семейства также остаются справедливыми оценки (29) и (30).

В результате предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ (на некоторой подпоследовательности) получаем функцию $u(x,t) \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)\big)$ такую, что $u_t \in L^2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(a,b)\big)$.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 1 покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (5), (6). Решающую роль здесь играет оценка (27) для семейства $\{u^\varepsilon\}$, а также оценки (29), (30), теорема компактности и теорема Лебега о предельном переходе в интеграле.

Теперь нужно показать, что $u(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{K}_t)$. Это делается стандартным способом с использованием уравнения (22) (которому удовлетворяет в обобщенном смысле $u^\varepsilon(x,t)$), а также оценки (26), монотонности и семинепрерывности оператора штрафа. Подробно эта процедура описана в доказательстве теоремы 7.1 из [17, гл. 3, п. 7.1].

Зафиксируем $t \in [0,T]$ и рассмотрим произвольную функцию $v(x,\tau) \in L^\infty(0,T;\mathscr{K}_\tau)$. Очевидно, что

$$\tilde v(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G, \end{cases}$$

такова, что $\tilde v \in L^\infty\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)\big)$. Подставим в уравнение (22) в качестве пробной функцию

$$\varphi(x,\tau) = \begin{cases} \tilde v(x,\tau) - u^\varepsilon(x,\tau), & 0 \le \tau \le t, \\ 0, & t < \tau \le T. \end{cases}$$

Используя свойства операторов штрафа и то, что $\theta\tilde v \equiv 0$ п. в. в Q_T, получаем неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_a^b u^\varepsilon_\tau(\tilde v - u^\varepsilon)\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_a^b a(u^\varepsilon_x)(\tilde v_x - u^\varepsilon_x)\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_a^b u^\varepsilon_{x\tau}(\tilde v_x - u^\varepsilon_x)\,dxd\tau \ge \int\limits_0^t\int\limits_a^b \tilde f(\tilde v - u^\varepsilon)\,dxd\tau.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_a^b u^\varepsilon_\tau\tilde v\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_a^b a(u^\varepsilon_x)(\tilde v_x - u^\varepsilon_x)\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_a^b u^\varepsilon_{x\tau}\tilde v_x\,dxd\tau \ge \frac12\int\limits_a^b |u^\varepsilon|^2\,dx|_{\tau=t} + \frac12\int\limits_a^b |u^\varepsilon_x|^2\,dx|_{\tau=t} + \int\limits_0^t\int\limits_a^b \tilde f(\tilde v - u^\varepsilon)\,dxd\tau + \frac12\int\limits_a^b(\tilde u_0^2 + \tilde u_{0x}^2)\,dx. \quad (31)$$

Из полученных априорных оценок и свойства выпуклости нормы получаем (на подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_a^b u^{\varepsilon}_{\tau}\tilde{v}\,dxd\tau=\int_0^t\int_a^b u_{\tau}\tilde{v}\,dxd\tau,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_a^b u^{\varepsilon}_{x\tau}\tilde{v}_x\,dxd\tau=\int_0^t\int_a^b u_{x\tau}\tilde{v}_x\,dxd\tau,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\int_a^b \tilde{f}(\tilde{v}-u^{\varepsilon})\,dxd\tau=\int_0^t\int_a^b \tilde{f}(\tilde{v}-u)\,dxd\tau,$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\|u^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(a,b)}\geq\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\|u^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(a,b)}\geq\|u(t)\|^2_{L^2(a,b)},$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\|u^{\varepsilon}_x(t)\|^2_{L^2(a,b)}\geq\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\|u^{\varepsilon}_x(t)\|^2_{L^2(a,b)}\geq\|u_x(t)\|^2_{L^2(a,b)}.$$

Вспомнив, что u^{ε} — обобщенное решение (22)–(24), положив в (22) в качестве пробной функцию

$$\varphi=\begin{cases}u^{\varepsilon}-u, & \tau\in[0,t)\\ 0, & \tau\in[t,T],\end{cases}$$

и использовав то, что $u\in L^{\infty}(0,T;K_t)$, и монотонность обоих операторов штрафа, получим неравенство

$$\int_0^t\int_a^b a(u^{\varepsilon}_x)(u^{\varepsilon}_x-u_x)\,dxd\tau\leq\int_0^t\int_a^b\big(\tilde{f}(u^{\varepsilon}-u)-u^{\varepsilon}_{x\tau}(u^{\varepsilon}_x-u_x)-u^{\varepsilon}_{\tau}(u^{\varepsilon}-u)\big)\,dxd\tau.$$

Возьмем верхний предел левой и правой частей этого неравенства при $\varepsilon\to 0$. Учитывая полученные выше равенства и неравенства (в первых трех из них в качестве функции $\tilde{v}(x,t)$ возьмем функцию $u(x,t)$), в итоге получаем, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_0^t\int_a^b a(u^{\varepsilon}_x)(u^{\varepsilon}_x-u_x)\,dxd\tau\leq 0.$$

Заметим, что оператор $\Pi: L^{\infty}\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)\big)\to L^{\infty}\big(0,T;W^{-1}_{q'}(a,b)\big)$, действующий по правилу

$$\int_0^t\langle\Pi\psi_1,\psi_2\rangle\,d\tau=\int_0^t\int_a^b a(\psi_{1x})\psi_{2x}\,dxd\tau,$$

является псевдомонотонным, поскольку он монотонный, семинепрерывный и ограниченный (см. определение 2.1 и предложение 2.5 из [17, гл. 2]).

По определению псевдомонотонного оператора имеем

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_0^t\int_a^b a(u^{\varepsilon}_x)(\tilde{v}_x-u^{\varepsilon}_x)\leq\int_0^t\int_a^b a(u_x)(\tilde{v}-u_x)\,dxd\tau.$$

Возьмем нижний предел при $\varepsilon \to 0$ левой и правой частей неравенства (31). В результате предельного перехода получаем неравенство

$$\int_0^t \int_a^b u_\tau(\tilde{v} - u)\,dxd\tau + \int_0^t \int_a^b a(u_x)(\tilde{v}_x - u_x)\,dxd\tau \\ + \int_0^t \int_a^b u_{x\tau}(\tilde{v}_x - u_x)\,dxd\tau \geq \int_0^t \int_a^b \tilde{f}(\tilde{v} - u)\,dxd\tau. \quad (32)$$

Поскольку $\tilde{v} = u \equiv 0$ п. в. в G, это неравенство является как раз тем, которое фигурирует в формулировке теоремы.

Докажем единственность полученного решения. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathscr{K}_t)$ — два решения неравенства, удовлетворяющие условиям (5), (6). Пусть

$$\tilde{u}_i(x,t) = \begin{cases} u_i(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Очевидно, что $\tilde{u}_i(x,t)$ удовлетворяют неравенству (32) для тех функций $\tilde{v}(x,t)$, которые построены выше. Это обстоятельство, способ построения $\tilde{u}_i$ и стандартные в таком случае рассуждения (см. доказательство теоремы 7.1 из [17, гл. 3, п. 7.1]) позволяют вывести, что $\tilde{u}_1 \equiv \tilde{u}_2$ п. в. в Q_T, а значит, $u_1 \equiv u_2$ п. в. в Q.

Теорема доказана полностью.

Рассмотрим вариационное неравенство, связанное с многомерным уравнением (18) в той же области $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, которая описана при изучении начально-краевой задачи (18)–(20). К уравнению (18) присоединяются начально-краевые условия (19), (20).

Все условия на векторное поле остаются теми же, что и при рассмотрении задачи (18)–(20), только вместо соответствующей двусторонней оценки потенциал $A(\xi)$ должен удовлетворять неравенству $|A(\xi)| \leq C_{20}(1 + |\xi|^p)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $C_{20} > 0$, $p > 1$.

Возьмем целое неотрицательное число s так, чтобы $4s+4 > \max(p,n)$, и обозначим $q_0 = 4s + 4$. Здесь также необходимо, чтобы оператор $\Lambda_1 : \overset{\circ}{W}{}^1_{q_0}(D_T) \to W^{-1}_{q_0'}(D_T)$, действующий по правилу

$$\langle \Lambda_1 u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{D_T} a_i(\nabla_x u) v_{x_i}\,dx,$$

являлся монотонным (как и раннее, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено отношение двойственности в соответствующих функциональных пространствах).

Введем множество ограничений

$$\mathscr{M}_t = \left\{ z(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q_0}(D_t) : |\nabla_x z| \leq 1 \text{ п. в. в } D_t \right\}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на область Q и на коэффициенты уравнения (18). Тогда для любой функции $f(x,t) \in L^2(Q)$ и для любой функции $u_0(x) \in \mathscr{M}_0$ существует единственная функция $u(x,t) \in$*

$L^\infty(0,T;\mathscr{M}_t)$, у которой $u_t \in L^2\big(0,T;W_2^1(D_t)\big)$, удовлетворяющая начально-краевым условиям (19), (20) и такая, что для любого $t\in[0,T]$ и для любой функции $v(x,t)\in L^\infty(0,T;\mathscr{M}_t)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{D_\tau} u_\tau(v-u)\,dxd\tau + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t\int\limits_{D_\tau} a_i(\nabla_x u)(v_{x_i}-u_{x_i})\,dxd\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{D_\tau} \nabla_x u_\tau(\nabla_x v-\nabla_x u)\,dxd\tau \ge \int\limits_0^t\int\limits_{D_\tau} f(v-u)\,dxd\tau.$$

Доказательство этой теоремы является несложной комбинацией доказательств теорем 2 и 3. Точно так же, как и в доказательстве теоремы 2, строится область Q_T и в ней рассматривается уравнение с двумя штрафными слагаемыми. Роль «штрафа на область» играет та же функция $\theta_1(x,t)$, а роль «штрафа на решение» здесь играет выражение

$$-\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^n([(1-|\nabla_x u^\varepsilon|^2)^-]^{2s+1}u^\varepsilon_{x_i})_{x_i}.$$

При получении второй априорной оценки достаточно заметить, что функции $[(1-|\xi|^2)^-]^{2s+1}\xi_i$, $i=1,\dots,n$, порождают потенциальное поле с потенциалом

$$\Phi_1(\xi)=\begin{cases}0, & |\xi|\le 1,\\ \frac{(|\xi|^2-1)^{2s+2}}{4(s+1)}, & |\xi|\ge 1,\end{cases}$$

и в силу выбора числа s потенциал $\Phi_1(\xi)$ доминирует над потенциалом $A(\xi)$ при достаточно больших по модулю $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Отметим также, что при рассмотрении аналога (28) если иметь в виду, что $\Phi_1(\xi)$ зависит лишь от $|\xi|$ как от одной переменной и непрерывно дифференцируема по $|\xi|$ как функция этой переменной, то последний интеграл в аналоге (28) оценивается так же, как и в доказательстве теоремы 3.

Остальные рассуждения почти дословно повторяют доказательство теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greenberg J. M., MacCamy R. C., Mizel V. J.* On existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma(u_x)u_{xx}+\lambda u_{xxt}=\rho_0 u_{tt}$ // J. Math. Mech. 1968. V. 17, N 77. P. 707–728.
2. *MacCamy R. C.* Existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $u_{tt} = (\sigma(u_x)+\lambda(u_x)u_{xt})_x$ // Indiana Univ. Math. J. 1970. V. 20, N 3. P. 231–238.
3. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.
5. *Глазатов С. Н.* Нелинейные уравнения третьего порядка и вариационные неравенства // Неклассические уравнения математической физики: Тр. семинара «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. С. 80–92.
6. *Yarušek J., Málek J., Nečas J., Šverák V.* Variational inequality for a viscous drum vibrating in the presence of an obstacle // Rend. Mat. 1992. V. 12, N 4. P. 943–958.
7. *Глазатов С. Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. Новосибирск, 1992. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 7).

8. *Cannarsa P., Da Prato G., Zolezio S.-P.* The damped wave equations in a moving domain // J. Differential Equations. 1990. V. 85, N 1. P. 1–16.

9. *Da Prato G., Grisvard P.* The damped wave equation in a noncylindrical domain // Differential Integral Equations. 1994. V. 7, N 3–4. P. 735–746.

10. *Кожанов А. И.* Об одном многомерном сильно нелинейном уравнении третьего порядка в нецилиндрических областях // Неклассические уравнения математической физики: Тр. Четвертого Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ–2000). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2000. С. 107–115.

11. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А.* О разрешимости краевых задач для сильно нелинейных уравнений вязкоупругости в нецилиндрических областях // Мат. заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, № 1. С. 36–45.

12. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* Качественные свойства линейных и нелинейных уравнений соболевского типа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.

13. *Tsutsumi M., Matahashi T.* A certain class of singular nonlinear pseudo-parabolic equations // Funkc. Ekvacioj. 1979. V. 22, N 3. P. 313–325.

14. *Белов Ю. Я., Яненко Н. Н.* Об одной регуляризации уравнения Бюргерса // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 3. С. 521–524.

15. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 81–87.

16. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.

17. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

18. *Лаврентьев-мл. М. М.* Априорные оценки решений параболических уравнений в областях с нецилиндрическими границами // Динамика сплошной среды. 1982. № 58. С. 94–107.

19. *Истомина Н. Е., Подгаев А. Г.* О разрешимости задачи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения в области с нецилиндрической границей // Дальневосточн. мат. сб. 2000. Т. 1, № 1. С. 63–73.

Статья поступила 1 декабря 2005 г., окончательный вариант — 9 ноября 2006 г.

Глазатов Сергей Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
glaz@math.nsc.ru