Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 514.763.22+517.518.15+514.752.8

ЛОКАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РАВНОМЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ КВАЗИПРОСТРАНСТВ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ ИХ КАСАТЕЛЬНЫМИ КОНУСАМИ

А. В. Грешнов

Аннотация: На равномерно регулярных (эквирегулярных) пространствах Карно — Каратеодори доказана локальная аппроксимационная теорема для квазиметрик Карно — Каратеодори, при помощи которой исследована сходимость квазипространств Карно — Каратеодори к их касательным конусам. В частности, доказана теорема типа Митчелла о сходимости пунктированного эквирегулярного квазипространства Карно — Каратеодори к его касательному конусу.

Ключевые слова: Пространства Карно — Каратеодори, квазиметрика, нильпотентные группы, локальная аппроксимационная теорема, сходимость по Громову — Хаусдорфу.

Введение

В начале 1980-х гг. М. Громов [1, 2] ввел понятие *расстояния по Громову — Хаусдорфу* d_{GH} между абстрактными метрическими пространствами и, используя d_{GH}-сходимость, определил *касательный конус* метрического пространства (Z, d) в предписанной точке $g \in Z$ как предел по Громову — Хаусдорфу метрических пространств $(Z, \lambda d)$ при $\lambda \to \infty$. Касательный конус и относящиеся к нему понятия оказались полезными в вопросах, связанных с анализом на общих метрических пространствах (см. [3]), на группах Карно (см. [4, 5]), неголономных многообразиях с метриками Карно — Каратеодори (см. [6–10]) и др. Естественно представлять себе касательные конусы метрического пространства как «метрический» аналог касательного расслоения гладкого многообразия. Возникает вопрос о том, насколько близки в метрическом смысле касательный конус и исходное метрическое пространство и насколько близки в метрическом смысле различные касательные конусы «в пересечении их областей определения». Из примера А. Н. Варченко [11], следует, что метрики Карно — Каратеодори пространства Карно — Каратеодори и его касательного конуса в общем случае не эквивалентны. В работе [12] М. Громов сформулировал свою известную локальную аппроксимационную теорему и привел схему ее доказательства. Результат Митчелла [13] о касательном конусе равномерно регулярного пространства Карно — Каратеодори является следствием локальной аппроксимационной теоремы. Отметим также работу Беллеша [14], посвященную, в частности, доказательству локальной аппроксимационной теоремы Громова.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2006.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00735–а).

В работе доказан аналог локальной аппроксимационной теоремы для равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори с достаточно гладким горизонтальным подрасслоением, снабженных *квазиметрикой Карно — Каратеодори* (см. определения 1.3, 1.4 и следствия 3.3, 3.4). Следуя подходу Громова, мы рассматриваем нильпотентный касательный конус как группу Карно (см. предложение 2.3), но с соответствующей квазиметрикой (см. определение 2.1). Квазиметрика Карно — Каратеодори — это анизотропная риманова метрика с определенными показателями анизотропности, «позволяющими» этой квазиметрике быть эквивалентной метрике Карно — Каратеодори. Данная эквивалентность установлена в фундаментальной работе Нагеля, Стейна и Вэйнгера [15] (так называемая теорема Ball-Box [12]). Внутренняя метрика Карно — Каратеодори на сегодняшний день является хорошо известным геометрическим объектом, находящим свое применение в задачах анализа, геометрии, теории уравнений в частных производных, в вариационном исчислении и оптимальном управлении и др. (см., например, [5–17]). Однако существует множество вопросов, связанных с внутренней метрикой Карно — Каратеодори, не решенных даже в достаточно простых частных случаях пространств Карно — Каратеодори (см., например, [7, 17]). Кроме того, по причине весьма сложного поведения кратчайших в метрике Карно — Каратеодори в ряде задач анализа применение внутренней метрики Карно — Каратеодори становится практически невозможным. На практике эти трудности обходятся, в частности, использованием квазиметрик Карно — Каратеодори. Так, например, Н. Н. Романовским [18] получены интегральные представления типа Соболева для определенного класса функций, заданных на областях групп Гейзенберга, и определенные «симметрические» свойства квазиметрик Карно — Каратеодори сыграли здесь очень важную роль. Другие применения квазиметрик Карно — Каратеодори читатель может найти в [19–22] и др.

Техника настоящей работы основана на методах, связанных с применением формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, что накладывает определенные ограничения на гладкость горизонтального подрасслоения. Такой технический подход использовался и другими авторами (см., например, [13, 15, 23–25]).

С помощью полученного в данной работе аналога локальной аппроксимационной теоремы Громова установлены достаточно точные оценки расхождения между «ломаными» пространства Карно — Каратеодори и соответствующими им «ломаными» нильпотентного касательного конуса (теорема 4.1). Сходимости классов «ломаных» для равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори (аналогичные изучаемым в § 5) рассматривались в работе [8], где впервые была выдвинута концепция дифференцируемости отображений для пространств Карно — Каратеодори (*cc*-дифференцируемость). Подобные сходимости использовались также в работе [10] для доказательства *cc*-дифференцируемости липшицевых отображений.

В § 6 при помощи полученной в § 4 локальной аппроксимационной теоремы доказывается аналог теоремы Митчелла для равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори (теорема 6.2, следствие 6.2). Следует отметить, что для квазипространств (см. определение 1.2) невозможно непосредственное обобщение понятия расстояния по Громову — Хаусдорфу (см. замечание 6.2), поэтому и само понятие касательного конуса для квазипространств не получается таким же, как в случае «настоящих» метрических пространств. Современное состояние вопросов, связанных со сходимостью по Громову — Хаусдорфу, блестяще изложено в монографии [26].

Автор выражает глубокую благодарность профессору С. К. Водопьянову за внимание к результатам автора, М. Б. Кармановой, сообщившей о некоторых неточностях на предварительном этапе работы автора над доказательствами, рецензенту за полезные критические замечания.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — некоторая открытая ограниченная область, снабженная римановой метрикой ρ. Для фиксированного C^M-гладкого подрасслоения H_1 в TU выберем векторные поля $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$, образующие базис $H_1(g)$ в каждой точке $g \in U$ (здесь $M \in \mathbb{N}$ — достаточно большое число, фиксируемое ниже). Обозначим через $H_i(g)$ подпространство касательного пространства, порожденное значениями всевозможных коммутаторов векторных полей $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ до порядка $i-1$ включительно; при этом считаем, что коммутаторы нулевого порядка векторных полей суть сами эти векторные поля. Полагаем, что векторные поля $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ удовлетворяют на U *условию Хёрмандера* [24], т. е. существует натуральное число n_0 такое, что для каждой точки $g \in U$ найдется $n \leq n_0$, для которого $T_gU = H_n(g)$. Условие *эквирегулярности* или *равномерной регулярности* состоит в том, что $\dim H_i(g)$ не зависит от выбора точки $g \in U$ для любого $i \geq 1$. В дальнейшем мы фиксируем в U равномерно регулярное подрасслоение H_1. Тогда H_i — подрасслоение в TU и константа $C_U = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T_gU = H_n(g)\}$ не зависит от выбора точки $g \in U$. Пусть векторные поля $X_{\dim H_{i-1}}, \dots, X_{\dim H_i}$ образуют базис H_i/H_{i-1}, $i = 1, \dots, C_U$ (здесь мы полагаем, что $H_1/H_0 = H_1$). (*Формальной*) *степенью* поля X_i называется число $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \in H_j\}$. Из построения базиса TU имеем $X_k \in C^{M+1-\deg X_k}$. Кроме того, получаем следующую «таблицу коммутаторов»:

$$[X_i, X_j](g) = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} C_{(ijk)} X_k(g), \quad i, j, k = 1, \dots, N, \ g \in U, \tag{1.1}$$

где $C_{(ijk)}(g)$ — C^{M-C_U}-гладкие функции.

В дальнейшем символом $B_e^m(a, r)$ обозначается открытый евклидов шар с центром в точке $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса r. Из теорем о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров (см., например, [27]) вытекает, что отображение

$$\theta_g : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i\right)(g), \quad \theta_g(0) = \theta_g(0, \dots, 0) = g,$$

является C^{M+1-C_U}-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_e^N(0, \kappa_g)$ в U, где κ_g — достаточно малое положительное число. Пусть $O_g = \theta_g\big(B_e^N(0, \kappa_g)\big)$.

Определение 1.1. Набор чисел $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, N$, где $(x_1, \dots, x_N) = \theta_g^{-1} u \in B_e^N(0, \kappa_g)$, называется *координатами* 1*-го рода* точки $u \in O_g$.

Обозначение 1.1. Символом O обозначается далее некоторая область, $\overline{O} \subset U$, для которой выполняется следующее условие: $O \subset O'_g$ для каждой точки $g \in O$, где $O'_g = \theta_g\big(B_e^N(0, \kappa)\big)$, $\kappa = \inf\{\kappa_g \mid g \in O\}$.

Отметим, что $\left(\theta_g^{-1}\right)_* X_i(g) = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) = e_i$. Для каждого N-мерного вектора α введем обозначения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) = (\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(C_U)})$, где

$\alpha_{(i)}$ — вектор $(\alpha_{\dim H_{i-1}+1}, \ldots, \alpha_{\dim H_i})$ (полагаем $\dim H_0 = 0$). Запись $\alpha = 0$ означает, что все компоненты вектора α равны нулю.

Пусть $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \deg X_i$ и $\|y\|$ — максимум из величин $|y_j|$, где индекс j пробегает соответствующий рассматриваемой ситуации набор натуральных чисел. Далее мы всегда будем полагать, что $M \geq 2C_U + 1$.

Рассмотрим в O векторные поля $X = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i$, где $\|x\|, \|y\| < \kappa$. Поскольку отображение θ_g является диффеоморфизмом, существует единственный вектор $(p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ с постоянными коэффициентами такой, что

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N} p_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i X_i\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(g), \quad g \in O. \tag{1.2}$$

Из теоремы о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных [27] вытекает, что $p_i = p_i(x, y) \in C^{M-C_U+1}$, $i = 1, \ldots, N$. Используя методы доказательства классической формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, получаем (см., например, [28]), что для функций $p_i = p_i(x, y) \in C^{M-C_U+1}\big(B_e^{2N}(0, \kappa)\big)$, $i = 1, \ldots, N$, справедливы следующие разложения Тейлора:

$$p_i = x_i + y_i + \sum_{\substack{2 \leq |\alpha+\beta| \leq M - C_U, \\ \alpha > 0, \beta > 0}} F^i_{\alpha,\beta}(g) x^\alpha \cdot y^\beta + o(\|(x, y)\|^{M-C_U}), \tag{1.3}$$

где мультииндексы α и β удовлетворяют условию $\deg X_i \leq |\alpha + \beta|_h$.

Лемма 1.1 [28]. *Координаты векторного поля* $\widetilde{X}_i = \left(\theta_g^{-1}\right)_* X_i = \sum\limits_{j=1}^{N} z_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, N$, *в стандартном базисе* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ *в точке* $x = (x_1, \ldots, x_N) = \theta_g^{-1}(\exp X(g))$ *совпадают с* i*-м столбцом матрицы*

$$\widetilde{A}^g(x) = \frac{\partial(p_1, \ldots, p_N)}{\partial(y_1, \ldots, y_N)}\bigg|_{(y_1, \ldots, y_N) = (0, \ldots, 0)}. \tag{1.4}$$

Для коэффициентов $z_i^j \in C^{M-C_U}\big(B_e^N(0, \kappa)\big)$, $i = 1, \ldots, N$, *справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$z_i^j = \delta_{ji} + \sum_{\substack{2 \leq |\alpha+e_i| \leq M - C_U, \\ \deg X_j \leq |\alpha+e_i|_h}} F^j_{\alpha,e_i}(g) x^\alpha + o(\|x\|^{M-C_U-1}). \tag{1.5}$$

Определение 1.2. Пусть $\mathbb{X}$ — некоторое множество. *Квазиметрика* в $\mathbb{X}$ (см. [29]) есть отображение $d_{\mathbb{X}} : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}^+ \cup 0$, обладающее следующими свойствами:

1) $d_{\mathbb{X}}(u, v) \geq 0$, $d(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

2) $d_{\mathbb{X}}(u, v) \leq c_1 d_{\mathbb{X}}(v, u)$ для некоторой константы c_1, не зависящей от выбора $u, v \in \mathbb{X}$;

3) $d(u, v) \leq Q(d(u, w) + d(w, v))$ для некоторой константы Q, не зависящей от выбора $u, v, w \in \mathbb{X}$.

Метрическое пространство $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ будем называть *квазипространством.*

Из определения области O вытекает, что для любых точек $u, v \in O$ найдется единственное векторное поле $Y = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i X_i$ такое, что $u = \exp Y(v)$.

Определение 1.3. Определим *(квази)расстояние Карно — Каратеодори* $d_{cc}(u,v)$ между точками v, $u \in O$ как
$$d_{cc}(u,v) = \max\{|y_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1,\dots,N\};$$
положим $\mathrm{Box}_{cc}(g,r) = \{x \in O \mid d_{cc}(g,x) < r\}$.

Различные (квази)метрики, эквивалентные d_{cc}, изучались в [15].

Предложение 1.1 [28]. *Найдутся положительная функция $\tau = \tau(r) = 1 + o(r^{M-2C_U})$ и константы $C_{\mathscr{A}} > 0$, $r_0 > 0$, зависящие от κ, C_U, N, такие, что для любой точки $g \in O$ верно $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{Box}_{cc}(g,r)} \mathrm{Box}_{cc}(x,\varepsilon) \subseteq \mathrm{Box}_{cc}(g, \tau r + \varepsilon C_{\mathscr{A}})$, $0 < \varepsilon, r \le r_0$.*

Свойство 1.1. 1. *Для функции $d_{cc}(u,v)$, $u, v \in O$, справедливы пп.* 1–3 *определения* 1.2.

2. *Функция $d_{cc}(u,v)$ непрерывна по каждому аргументу.*

Доказательство. Свойство 1 определения 1.2 очевидно. Для доказательства свойства 2 введем обозначение $v = \exp V(u)$. Тогда $u = \exp(-V)(v)$, откуда получаем требуемое ($c_1 = 1$). Свойство 3 вытекает из предложения 1.1, при этом достаточно, чтобы $Q = 2C_{\mathscr{A}} + 1$. П. 2 свойства 1.1 является следствием теорем о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров (см., например, [27]).

Замечание 1.1. Определим риманово квазирасстояние $d_{\mathrm{riem}}(u,v)$ между точками u и $v = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i\right)(u)$ как $d_{\mathrm{riem}}(u,v) = \max\{|x_i| \mid i = 1,\dots,N\}$. Следствием известных фактов из дифференциальной геометрии является эквивалентность метрики d_{riem} и римановой метрики ρ на O. Тогда, очевидно, имеем $c^{-1}\rho(u,v) \le d_{\mathrm{riem}}(u,v) \le d_{cc}(u,v) \le d_{\mathrm{riem}}(u,v)^{\frac{1}{C_U}}$ для некоторой константы $c > 0$, не зависящей от выбора $u, v \in O$.

Определение 1.4. Квазипространство (O, d_{cc}) называется *локализованным равномерно регулярным (квази)пространством Карно — Каратеодори.*

Замечание 1.2. Вопросы, связанные с «инвариантностью» определения квазиметрики Карно — Каратеодори, обсуждаются в работе [28].

§ 2. Нильпотентный касательный конус

Рассмотрим в координатах θ_g^{-1} действие *группы растяжений*
$$\delta_\varepsilon : x = (x_1,\dots,x_N) \to (\varepsilon^{\deg X_1} x_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} x_N) = \delta_\varepsilon x, \quad \varepsilon > 0.$$
Введем обозначение $\Delta_\varepsilon^g = \theta_g \circ \delta_\varepsilon \circ \theta_g^{-1}$. Рассмотрим на множестве $\mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon r_0) \subset O$ векторные поля $\varepsilon^{\deg X_i} X_i = X_i^\varepsilon$, $i = 1,\dots,N$.

Предложение 2.1 [28]. *На множестве $\mathrm{Box}_{cc}(g, r_0)$ имеют место равномерные сходимости*
$$\left(\Delta^g_{\varepsilon^{-1}}\right)_* X_i^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \widehat{X}_i^g, \quad \left[\left(\Delta^g_{\varepsilon^{-1}}\right)_* X_i^\varepsilon; \left(\Delta^g_{\varepsilon^{-1}}\right)_* X_j^\varepsilon\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left[\widehat{X}_i^g; \widehat{X}_j^g\right], \tag{2.1}$$
и набор векторных полей $\left\{\widehat{X}_i^g\right\}$ удовлетворяет таблице коммутаторов:
$$\left[\widehat{X}_i^g; \widehat{X}_j^g\right] = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} \widehat{C}_{ijk}^g \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ijk}^g = C_{ijk}(g) = \mathrm{const}; \tag{2.2}$$

векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}$ *образуют базис градуированной стратифицированной алгебры Ли. Координаты векторного поля* $\widehat{X}_i' = \left(\theta_g^{-1}\right)_* \widehat{X}_i^g = \sum\limits_{j=1}^{N} \hat{z}_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, N$, *в стандартном базисе* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ *в точке* $(x_1, \ldots, x_N) = \theta_g^{-1}(\exp X(g))$ *имеют вид*

$$\hat{z}_i^j = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{при } j \leq \dim H_{\deg X_i}, \\ \sum\limits_{\substack{|\alpha+e_i|_h = \deg X_j, \\ \alpha>0}} \widehat{F}_{\alpha,e_i}^{g,j} \cdot x^\alpha & \text{при } j > \dim H_{\deg X_i}, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\widehat{F}_{\alpha,e_i}^{g,j} = F_{\alpha,e_i}^j(g) = \mathrm{const}$.

Свойство 2.1 [28]. *Для* $u \in \mathrm{Box}_{cc}(g, r_0)$ *выполняется* $\tau^{\deg X_i} \widehat{X}_i^g(\Delta_\tau^g u) = (\Delta_\tau^g)_* \widehat{X}_i^g(u)$, *где* $\tau > 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Используя (1.3) и теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров [27], на $\mathrm{Box}_{cc}(g, r_0)$ имеем (см. [28])

$$\exp\left(\left(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g\right)_* Z^\varepsilon\right)(g) = \exp\left(\left(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g\right)_* \sum_{i=1}^N y_i X_i^\varepsilon\right) \circ \exp\left(\left(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g\right)_* \sum_{i=1}^N x_i X_i^\varepsilon\right)(g)$$
$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i \widehat{X}_i^g\right)(g),$$

где

$$\begin{aligned} &z_i = x_i + y_i, \quad \deg X_i = 1, \\ &z_i = x_i + y_i + \sum_{|e_l+e_j|_h=2} \widehat{F}_{e_l,e_j}^{g,i}(x_l y_j - y_l x_j), \quad \deg X_i = 2, \\ &z_i = x_i + y_i + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h=k, \\ \alpha>0,\, \beta>0}} \widehat{F}_{\alpha,\beta}^{g,i} x^\alpha \cdot y^\beta = x_i + y_i \\ &\quad + \sum_{\substack{n,m=1, \\ n>m}}^N \sum_{\substack{\gamma,\delta,\gamma+\delta>0, \\ |\gamma+\delta+e_n+e_m|_h=k}} \widehat{G}_{\gamma,\delta,n,m}^{g,i} x^\gamma \cdot y^\delta (x_n y_m - x_m y_n), \quad \deg X_i = k, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\widehat{F}_{\alpha,\beta}^{g,i} = F_{\alpha,\beta}^i(g) = \mathrm{const}$, $\widehat{G}_{\gamma,\delta,n,m}^{g,i} = \mathrm{const}$. Используя определенные «симметрии» в координатной записи векторных полей $\widehat{X}_i'$ (см. (2.3)) и диффеоморфность θ_g, непосредственно можно установить

Предложение 2.2 [28]. *Пусть* $\max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_N|\} \leq \kappa$. *Тогда*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widetilde{X}_i\right)(0) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i'\right)(0),\ \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^g\right)(g).$$

Отметим (см. [28]), что каждое векторное поле $\widehat{X}_i'$ из (2.3) совпадает с i-м столбцом матрицы

$$\widehat{A}^g(x) = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_N)}{\partial(y_1, \ldots, y_N)}\bigg|_{(y_1,\ldots,y_N)=(0,\ldots,0)}, \tag{2.5}$$

где z_i из (2.4).

Отображение

$$\hat{\theta}_u : (x_1, \ldots, x_N) \to \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(u), \quad \hat{\theta}_u(0) = \hat{\theta}_u(0, \ldots, 0) = u,$$

является гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_e^N\big(0, \hat{\kappa}_u^g\big)$, где $\hat{\kappa}_u^g$ — достаточно малое положительное число, на некоторую окрестность $\widetilde{O}_u^g \subset U$ точки $u \in \operatorname{Box}_{cc}(g, r_0)$, где r_0 из предложения 2.1, и задает систему координат 1-го рода в $\widetilde{O}_u^g$. Пусть символ $\mathscr{O}_g$ обозначает область такую, что $\mathscr{O}_g \subset \hat{\theta}_u(B_e(0, \hat{\kappa}^g))$ для каждой точки $u \in \operatorname{Box}_{cc}(g, r_0)$, $\hat{\kappa}^g = \inf\{\hat{\kappa}_u^g \mid u \in \operatorname{Box}_{cc}(g, r_0)\}$. Мы можем полагать, не уменьшая общности, что $\hat{\kappa}^g = \kappa$, $\mathscr{O}_g = O$.

Из определения области $\mathscr{O}_g$ вытекает, что для любых точек $u, v \in \mathscr{O}_g$ найдется единственное векторное поле $\widehat{Y}^g = \sum\limits_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^g$ такое, что $u = \exp \widehat{Y}^g(v)$. Определим (*квази*)*расстояние Карно — Каратеодори* $d_c^g(u, v)$ между точками v, $u \in \mathscr{O}_g$ как

$$d_c^g(u, v) = \max\{|y_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1, \ldots, N\}.$$

Введем обозначение $\operatorname{Box}_c^g(u, r) = \big\{x \in \mathscr{O}_g \mid d_c^g(u, x) < r\big\}$.

Предложение 2.3. *$\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ является локальной группой Карно.*

Доказательство. Топологическое пространство $\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ является локальной группой. Действительно, каждый элемент $u \in (\mathscr{O}_g, d_c^g)$ однозначно представляется в виде $u = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$, обратный к нему элемент u^{-1} равен $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} -x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$, g — единица группы, групповая операция определяется формулой

$$x \cdot y = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{N} y_i \widehat{X}_i^g\right)(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} z_i \widehat{X}_i^g\right)(g),$$

где z_i из (2.4). Отображение $\hat{\theta}_g$ задает на $\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ гладкую систему координат. Поэтому (см. [30]) метрическое пространство $\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ является локальной группой Ли. Из предложения 2.1 вытекает, что ее алгебра стратифицирована и градуирована. Таким образом, предложение 2.3 доказано.

Определение 2.1. Квазипространство $(\mathscr{O}_g, d_c^g)$ называется *нильпотентным касательным конусом* квазипространства Карно — Каратеодори (O, d_{cc}) в отмеченной точке $g \in O$.

Следующее свойство нильпотентного касательного конуса хорошо известно, см., например, [28].

Свойство 2.2. *$d_c^g\big(\Delta_\varepsilon^g a, \Delta_\varepsilon^g b\big) = \varepsilon d_c^g(a, b)$ для любых $a, b \in \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ и подходящих $\varepsilon > 0$.*

§ 3. Сравнение метрик d_{cc} и d_c^g

В дальнейшем мы фиксируем некоторое достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon_0) \subset O$. Также всегда полагаем, что $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Через $A = (a_{n,m})$ обозначим некоторую матрицу размера $N \times N$, где индекс n отвечает за номер строки, индекс m — за номер столбца. Соответственно запись $a_{n,m} \in A$ означает, что $a_{n,m}$ — элемент матрицы A, стоящий на пересечении n-й строки и m-го столбца. Обозначим через $A_{i,j}$, $1 \le i, j \le C_U$, часть матрицы A, представляющую собой прямоугольную матрицу, образованную элементами $a_{n,m}$ такими, что $\dim H_{i-1} < n \le \dim H_i$, $\dim H_{j-1} < m \le \dim H_j$, $\dim H_0 = 0$.

Лемма 3.1. *Пусть элементы матрицы A удовлетворяют условиям*

$$a_{n,m} = \begin{cases} \delta_{nm} + O(\varepsilon), & n \le m, \\ O(\varepsilon), & a_{i,j} \in A_{i,i},\ a_{n,m} \notin \operatorname{diag} A_{i,i}, \\ O(\varepsilon^{i-j}), & a_{n,m} \in A_{i,j},\ i > j. \end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда элементы матрицы A^{-1} также удовлетворяют условиям (3.1).

Доказательство. Пусть $B = (b_{n,m}) = A^{-1}$. Заметим, что $\det A = 1 + O(\varepsilon)$. Пусть $M_{m,n}$ — матрица, которая получается из матрицы A удалением m-й строки и n-го столбца. По правилу нахождения элементов обратной матрицы имеем

$$b_{n,m} = (-1)^{(n+m)} \det M_{m,n} \cdot (\det A)^{-1}.$$

Поскольку ε достаточно мало, мы, очевидно, имеем $b_{i,i} = 1 + g_{i,i}$, где $|g_{i,i}| \le \operatorname{const} \varepsilon$. Если $b_{n_0,m_0} \in B_{i_0,j_0}$ и выполняются условия $n_0 \ne m_0$, $i_0 \le j_0$, то также очевидно, что $|b_{n_0,m_0}| = |\det M_{m_0,n_0} (\det A)^{-1}| \le \operatorname{const} \varepsilon$.

Пусть для $b_{n_0,m_0} \in B_{i_0,j_0}$ выполняются условия $n_0 \ne m_0$, $j_0 < i_0$. Покажем, что в этом случае $|b_{n_0,m_0}| \le \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$. Действительно,

$$\det M_{m_0,n_0} = \sum_{(t,s)} \beta_{(t,s)}, \quad |\beta_{(t,s)}| = \left| \prod_{k=1}^{N-1} a_{t_k,s_k} \right|, \tag{3.2}$$

где мультииндексы $t = (t_1, \ldots, t_{N-1})$, $s = (s_1, \ldots, s_{N-1})$ представляют собой некоторые перестановки наборов $(1, \ldots, n_0 - 1, n_0 + 1, \ldots, N)$, $(1, \ldots, m_0 - 1, m_0 + 1, \ldots, N)$. Нетрудно заметить, что одно из слагаемых в сумме из (3.2) совпадает с величиной

$$\left| \prod_{k=1}^{N} a_{k,k} \cdot (a_{n_0,n_0} a_{m_0,m_0})^{-1} \cdot a_{n_0,m_0} \right| = O(\varepsilon^{i_0 - j_0}).$$

Пусть $\bar{\beta}_{(s,t)} = \{a_{s_1,t_1}, \ldots, a_{s_{N-1},t_{N-1}}\}$ для каждого $\beta_{(s,t)}$ из (3.2). Из (3.1) вытекает, что всегда $|a_{s_k,t_k}| < \operatorname{const} |a_{i,i}|$ для всех $s_k \ne t_k$, $i = 1, \ldots, N$. Тем самым если найдется $a_{s_l,t_l} \in \bar{\beta}_{(s,t)}$ такое, что $|a_{s_l,t_l}| = O(\varepsilon^{i_0 - j_0})$, то $|\beta_{(s,t)}| \le \operatorname{const} |\varepsilon^{i_0 - j_0}|$. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только такие $\beta_{(s,t)}$, для которых выполняется следующее условие:

$$\text{если } a_{s_k,t_k} \in \overline{\beta_{(s,t)}},\ a_{s_k,t_k} \in A_{i,j}, \text{ то } 0 \le i - j < i_0 - j_0. \tag{3.3}$$

Докажем, что в (3.2) не существует $\beta_{(s,t)}$ таких, что $|\beta_{(s,t)}| \varepsilon^{j_0 - i_0} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \infty$.

Доказательство будем проводить по индукции. Предположим, что такое $\beta_{(s,t)}$ существует и $\overline{\beta_{(s,t)}}$ отличается от множества

$$A' = \{\operatorname{diag} A, a_{n_0,m_0}\} \setminus \{a_{m_0,m_0}, a_{n_0,n_0}\}$$

только двумя элементами. Тогда в силу (3.3) один из этих двух сомножителей обязательно должен находиться в той же строке, что и a_{n_0,m_0}, и правее a_{n_0,m_0}. Обозначим сомножитель, о котором шла речь выше, через a_{n_0,m_0+n}, $n \in \mathbb{N}$. Тогда возможны два случая:

1) a_{n_0,m_0+n} лежит ниже $\operatorname{diag} A$;

2) a_{n_0,m_0+n} лежит выше $\operatorname{diag} A$.

Рассмотрим первый случай. Так как a_{n_0,m_0+n} лежит ниже $\operatorname{diag} A$, то второй сомножитель $\beta_{(s,t)}$, отличный от элементов из $\operatorname{diag} A$, есть a_{m_0+n,m_0}. Тогда $a_{n_0,m_0+n} \in A_{i_0,j_1}$, $a_{m_0+n,m_0} \in A_{j_1,j_0}$ и мы имеем

$$a_{n_0,m_0+n} \cdot a_{m_0+n,m_0} = O(\varepsilon^{i_0-j_1})O(\varepsilon^{j_1-j_0}) = O(\varepsilon^{i_0-j_0})$$

в случае, если $a_{n_0,m_0+n} \notin A_{i_0,i_0}$. Если же $a_{n_0,m_0+n} \in A_{i_0,i_0}$, то $a_{m_0+n,m_0} \in A_{i_0,j_0}$, тогда

$$a_{n_0,m_0+n} \cdot a_{m_0+n,m_0} = O(\varepsilon)O(\varepsilon^{i_0-j_0}) = O(\varepsilon^{i_0-j_0+1}),$$

и первый случай разобран.

Рассмотрим второй случай. Так как a_{n_0,m_0+n} лежит выше $\operatorname{diag} A$, то второй сомножитель выражения $\beta_{(s,t)}$, отличный от $\operatorname{diag} A$, опять же есть a_{m_0+n,m_0}, но при этом $n_0 < m_0 + n$, $a_{m_0+n,m_0} \in A_{i_1,j_0}$, где $i_0 \le i_1$. Используя (3.1), получаем

$$a_{n_0,m_0+n} \cdot a_{m_0+n,m_0} = O(\varepsilon)O(\varepsilon^{i_1-j_0}) = O(\varepsilon^{i_1-j_0+1}),$$

откуда вытекает второй случай. Таким образом, случай двух сомножителей полностью разобран.

Пусть для некоторого $k-1$ установлено отсутствие $\beta_{(s,t)}$ таких, что имеет место сходимость $|\beta_{(s,t)}|\varepsilon^{j_0-i_0} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty$ и $\bar{\beta}_{(s,t)}$ отличается от множества A' произвольными j элементами, где $j \le k-1$. Докажем аналогичное свойство для числа k. Пусть для некоторого $\beta_{(s,t)}$ найдутся элементы $a_{q_1}, \dots, a_{q_k} \in \bar{\beta}_{(s,t)}$ такие, что $a_{q_1}, \dots, a_{q_k} \notin A'$, при этом $|\beta_{(s,t)}|\varepsilon^{j_0-i_0} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty$. Отметим, что для каждого столбца матрицы A (за исключением вычеркнутого n_0-го столбца) существует единственный элемент из множества $\bar{\beta}_{(s,t)}$, принадлежащий этому столбцу. Поэтому найдется натуральное число $m \le k$ такое, что элемент a_{q_m} находится в m_0-м столбце матрицы A. Для удобства рассуждений будем предполагать, что элемент a_{q_k} находится в m_0-м столбце матрицы A. Не уменьшая общности, также можем считать, что

$$a_{q_1} = a_{n_0,m_0+n_1},\ a_{q_2} = a_{m_0+n_1,n_2},\ a_{q_3} = a_{n_2,n_3}, \dots, a_{q_{k-2}} = a_{n_{k-3},n_{k-2}}.$$

Из индукционного предположения следует, что

$$|a_{q_1} \cdot \ldots \cdot a_{q_{k-2}} \cdot a_{n_{k-2},m_0}| \le \operatorname{const} \varepsilon^{i_0-j_0}. \tag{3.4}$$

Сравним порядок величин $|a_{n_{k-2},m_0}|$ и $|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}|$ относительно степени ε. Пусть $a_{n_{k-2},m_0} \in A_{i',j_0}$.

1. Предположим, что $a_{q_{k-2}}$ лежит выше $\operatorname{diag} A$. Тогда элемент a_{n_{k-2},m_0} расположен ниже $\operatorname{diag} A$, а элемент $a_{q_{k-1}}$ находится на n_{k-2}-й строке матрицы A. Пусть $a_{q_{k-1}}$ лежит правее элемента $a_{n_{k-2},n_{k-2}}$ в n_{k-2}-й строке матрицы A. Поскольку элемент a_{q_k} принадлежит m_0-му столбцу матрицы A, то a_{q_k} будет расположен ниже a_{n_{k-2},m_0} и поэтому $|a_{q_k}| \le \operatorname{const} \varepsilon^{i'-j_0}$, откуда, используя (3.4), получаем $|\beta_{(s,t)}| \le \operatorname{const} \varepsilon^{i_0-j_0}$.

Пусть теперь $a_{q_{k-1}}$ лежит левее элемента $a_{n_{k-2},n_{k-2}}$ в n_{k-2}-й строке матрицы A и $a_{q_{k-1}} = a_{n_{k-2},n_{k-1}} \in A_{i',j'}$. Если $j' \le j_0$, то

$$|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}| = O(\varepsilon^{i'-j'})O(\varepsilon) \le O(\varepsilon^{i'-j_0+1}),$$

т. е. порядок величины $|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}|$ меньше порядка величины $|a_{n_{k-2},m_0}|$. Используя (3.4), получаем $|\beta_{(s,t)}| < \operatorname{const} \varepsilon^{i_0-j_0}$. Пусть $j' > j_0$. Имеем $a_{q_k} = a_{n_{k-1},m_0} \in A_{j',j_0}$. Следовательно,

$$|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}| = |a_{n_{k-2},n_{k-1}} \cdot a_{n_{k-1},m_0}| = O(\varepsilon^{i'-j'})O(\varepsilon^{j'-j_0}) = O(\varepsilon^{i'-j_0}),$$

т. е. порядок величин $|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}|$, $|a_{n_{k-2},m_0}|$ одинаков. Используя (3.4), выводим $|\beta_{(s,t)}| = O(\varepsilon^{i_0-j_0})$.

2. Предположим, что элемент $a_{q_{k-2}}$ лежит ниже $\operatorname{diag} A$ и индекс его столбца меньше m_0. В этом случае элемент a_{n_{k-2},m_0} лежит выше $\operatorname{diag} A$. Поэтому $a_{n_{k-2},m_0} = O(\varepsilon)$. Также один из элементов $a_{q_{k-1}}$, a_{q_k} лежит выше $\operatorname{diag} A$ и равен $O(\varepsilon)$. По этой причине порядок величины $|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}|$ меньше порядка $|a_{n_{k-2},m_0}|$, откуда, используя (3.4), получаем $|\beta_{(s,t)}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$.

Теперь пусть индекс столбца элемента $a_{q_{k-2}}$ больше m_0. Если элемент $a_{q_{k-1}}$ лежит правее элемента $a_{n_{k-2},n_{k-2}}$ в n_{k-2}-й строке матрицы A, то очевидно, что $a_{q_k} \in A_{i'',m_0}$, где $i'' \geq i'$, поэтому $|a_{q_k}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i'-m_0}$, откуда, используя (3.4), получаем $|\beta_{(s,t)}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$.

Рассмотрим случай, когда элемент $a_{q_{k-1}}$ лежит левее элемента $a_{n_{k-2},n_{k-2}}$ в n_{k-2}-й строке матрицы A. Имеем $a_{q_{k-1}} = a_{n_{k-2},n_{k-1}}$. Пусть $a_{q_{k-1}} \in A_{i',j'}$. Тогда $a_{q_k} \in A_{j',j_0}$. Если $n_{k-1} < m_0$, то, очевидно, $|a_{q_{k-1}}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i'-j_0}$, откуда, используя (3.4), получаем $|\beta_{(s,t)}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$. Пусть $n_{k-1} > j_0$. Тогда $a_{q_k} = a_{n_{k-1},m_0} \in A_{j',j_0}$. В случае $j' \neq j_0$

$$|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}| = O(\varepsilon^{i'-j'}) O(\varepsilon^{j'-j_0}) = O(\varepsilon^{i'-j_0}),$$

откуда, используя (3.4), выводим $|\beta_{(s,t)}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$. Если же $j' = j_0$, то $a_{q_{k-1}} = a_{n_{k-2},n_{k-1}} \in A_{i',j_0}$. Тогда порядок величины $|a_{q_{k-1}} \cdot a_{q_k}|$ меньше порядка $|a_{n_{k-2},m_0}|$, откуда согласно (3.4) выводим $|\beta_{(s,t)}| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{i_0 - j_0}$. Лемма 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Для каждой точки $g \in O$ на множестве $\theta_g^{-1} \operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$, элементы матриц $\widetilde{A}^g$, $\widehat{A}^g$ из (1.4), (2.5) удовлетворяют лемме 3.1.

Теорема 3.1. *Рассмотрим в* $\operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, $g \in O$, *векторные поля*

$$V_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \omega_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i, \quad \widehat{V}_\varepsilon^g = \sum_{i=1}^N \omega_i \varepsilon^{\deg X_i} \widehat{X}_i^g,$$

где $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $|\omega_i| \leq h$ *для некоторой константы* h. *Тогда найдется постоянная* $C = C(h, \varepsilon_0, N, C_U)$, *не зависящая от выбора точки* $\hat{g} \in \operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, *такая, что*

$$\max\bigl\{d_{cc}\bigl(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g})\bigr), d_c^g\bigl(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g})\bigr)\bigr\} \leq C \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}.$$

Доказательство. Запишем точки $\exp\bigl(\widehat{V}_\varepsilon^g\bigr)(\hat{g})$, $\exp(V_\varepsilon)(\hat{g})$ в координатах $\theta_{\hat{g}}$, $\hat{\theta}_{\hat{g}}$ соответственно, т. е. определим коэффициенты a_j, $\hat{a}_j$, $j = 1, \dots, N$, такие, что

$$\exp\bigl(\widehat{V}_\varepsilon^g\bigr)(\hat{g}) = \exp\left(\sum_{j=1}^N a_j X_j\right)(\hat{g}), \quad \exp(V_\varepsilon)(\hat{g}) = \exp\left(\sum_{j=1}^N \hat{a}_j \widehat{X}_j^g\right)(\hat{g}).$$

Пусть $\eta^i = (\widetilde{A}^g)^{-1} \widehat{X}_i'$, $\hat{\eta}^i = (\widehat{A}^g)^{-1} \widetilde{X}_i$, $\eta^i = \bigl(\eta_j^i\bigr)$, $\hat{\eta}^i = \bigl(\hat{\eta}_j^i\bigr)$, $i, j = 1, \dots, N$. Из (1.5) и (2.3) вытекает существование константы $c = c(C_U, N, \varepsilon_0)$ такой, что для каждого $i = 1, \dots, N$, $\deg X_i = k$, будет

$$\widehat{X}_i' = (0, \dots, 0, \alpha_{(k)}, \alpha_{(k+1)}, \dots, \alpha_{(C_U)}),$$

$$\widetilde{X}_i = (\beta_{(1)}, \dots, \beta_{(k-1)}, \alpha_{(k)} + \beta_{(k)}, \alpha_{(k+1)} + \beta_{(k+1)}, \dots, \alpha_{(C_U)} + \beta_{(C_U)}),$$

где

$$\begin{gathered} \|\alpha_{(k+j)}\| \leq c\varepsilon^j, \ \|\beta_{(k+j)}\| \leq c\varepsilon^{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, C_U - k, \\ \|\beta_{(i)}\| \leq c\varepsilon, \quad i = 1, \dots, k, \end{gathered} \tag{3.5}$$

равномерно на $\theta_g^{-1} \operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon_0)$. Обозначим $Y_i = \widehat{X}_i' - \widetilde{X}_i = (-\beta_{(1)}, \dots, -\beta_{(C_U)})$. Используя (3.5), лемму 3.1 и замечание 3.1, получаем

$$(\widetilde{A}^g)^{-1}(\widetilde{X}_i + Y_i) = (\widetilde{A}^g)^{-1} \widetilde{X}_i + (\widetilde{A}^g)^{-1} Y_i = e_i + (\beta_1', \dots, \beta_N') = \bigl(\eta_1^i, \dots, \eta_N^i\bigr), \tag{3.6}$$

$$\|\beta'_{(j)}\| \le c'\varepsilon,\ i = 1,\dots,k, \quad \|\beta'_{(k+j)}\| \le c'\varepsilon^{j+1},\ j = 1,\dots,C_U - k, \tag{3.7}$$

для некоторой константы c', зависящей от C_U, N, c, ε_0 и не зависящей от выбора i. Тогда в каждой точке $\hat{g} \in \mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$

$$\left(\left(\theta_g^{-1}\right)_* \widehat{V}_\varepsilon^g\right)\left(\theta_g^{-1}(\hat{g})\right) = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \varepsilon^{\deg X_i}\left(\sum_{j=1}^N \eta_j^i \widetilde{X}_j\right)\right)\left(\theta_g^{-1}(\hat{g})\right),$$

откуда следует, что $\widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g}) = \left(\sum\limits_{i=1}^N \omega_i \varepsilon^{\deg X_i}\left(\sum\limits_{j=1}^N \eta_j^i X_j\right)\right)(\hat{g})$. Поэтому для каждой точки $g' \in \mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$ имеем

$$\left(\left(\theta_{\hat{g}}^{-1}\right)_* \widehat{V}_\varepsilon^g\right)\left(\theta_{\hat{g}}^{-1}(g')\right) = \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \varepsilon^{\deg X_i}\left(\sum_{j=1}^N \eta_j^i \left(\theta_{\hat{g}}^{-1}\right)_* X_j\right)\right)\left(\theta_{\hat{g}}^{-1}(g')\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\eta}_i \left(\theta_{\hat{g}}^{-1}\right)_* X_i\right)\left(\theta_{\hat{g}}^{-1}(g')\right).$$

Из (1.5), (3.6), (3.7) вытекает, что

$$\tilde{\eta}_i = \omega_i \varepsilon^{\deg X_i} + q_i, \quad |q_i(g')| \le c_i \varepsilon^{\deg X_i + 1}, \tag{3.8}$$

где c_i — некоторые константы, зависящие от h, c', N, C_U, ε_0 и не зависящие от выбора точки $\hat{g} \in \mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$. В системе координат $\theta_{\hat{g}}^{-1}$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}_i(s) = \tilde{\eta}_i(x_1,\dots,x_N), \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1,\dots,N,\ s \in [0,1], \tag{3.9}$$

где $\tilde{\eta}$ — функции из (3.8). Пусть $x(s) = (x_1(s),\dots,x_N(s))$ — решение задачи Коши (3.9). Заметим, что $a_j = x_j(1)$. Используя (3.8), получаем

$$\exp\left(\widehat{V}_\varepsilon^g\right)(\hat{g}) = \exp\left(\sum_{i=1}^N a_i X_i\right)(\hat{g}), \quad a_i = \omega_i \varepsilon^{\deg X_i} + \tilde{q}_i, \quad |\tilde{q}_i| \le c_i \varepsilon^{\deg X_i + 1}.$$

Отсюда, полагая $\tilde{g} = \exp V_\varepsilon(\hat{g})$, имеем

$$\exp \widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g}) = \exp \widehat{V}_\varepsilon^g \circ \exp(-V_\varepsilon) \circ \exp V_\varepsilon(\hat{g}) = \exp \widehat{V}_\varepsilon^g \circ \exp(-V_\varepsilon)(\tilde{g})$$
$$= \exp\left(V_\varepsilon + \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i X_i\right) \circ \exp(-V_\varepsilon)(\tilde{g}) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i + 1} t_i X_i\right)(\tilde{g}),$$

где величины t_i равномерно ограничены в $\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$ некоторой константой, зависящей от N, C_U, ε_0, h, c' и не зависящей от $\tilde{g}$, $\hat{g}$. Поэтому

$$d_{cc}\left(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g})\right) = d_{cc}\left(\tilde{g}, \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i + 1} t_i X_i\right)(\tilde{g})\right)$$
$$= \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \left\{\left|\varepsilon^{\deg X_i + 1} t_i\right|^{1/\deg X_i}\right\} \le C\varepsilon^{1 + \frac{1}{C_U}}$$

для некоторой константы C. Рассуждая аналогично, получаем

$$d_c^g\left(\exp V_\varepsilon(\hat{g}), \exp \widehat{V}_\varepsilon^g(\hat{g})\right) \le C \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \left\{\left|\varepsilon^{\deg X_i + 1}\right|^{1/\deg X_i}\right\} = C\varepsilon^{1 + \frac{1}{C_U}}.$$

Следствие 3.1. *Для каждого* $0 \le \lambda \le 1$ *выполняется*

$$\max\left\{d_{cc}\left(\exp V_{\lambda\varepsilon}(\hat{g}), \exp \widehat{V}_{\lambda\varepsilon}^g(\hat{g})\right), d_c^g\left(\exp V_{\lambda\varepsilon}(\hat{g}), \exp \widehat{V}_{\lambda\varepsilon}^g(\hat{g})\right)\right\} \le C_1 \varepsilon^{1 + \frac{1}{C_U}},$$

где $C_1 = \mathrm{const} > 0$ *не зависит от выбора* $\hat{g} \in \mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$.

Следствие 3.2. *Пусть $g \in O$, $\hat{g} \in \operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$, $0 \le \lambda \le 1$. Тогда*

$$\operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon) \subset \operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon + C_2\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}) \quad и \quad \operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon) \subset \operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon + C_2\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}})$$

для некоторой константы C_2, зависящей от $C_{\mathscr{A}}$ из предложения 1.1 и C_1 из следствия 3.1 и не зависящей от выбора точки $\hat{g}$ и числа λ.

Доказательство. Из определения квазирасстояния Карно — Каратеодори вытекает, что

$$\begin{gathered}\operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon) = \bigcup_{\|\alpha\|<1} \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i (\lambda\varepsilon)^{\deg X_i}\right)(\hat{g}),\\ \operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon) = \bigcup_{\|\alpha\|<1} \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^g (\lambda\varepsilon)^{\deg X_i}\right)(\hat{g}).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Используя (3.10) и следствие 3.1, получаем, что для каждой точки $u \in \operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon)$ справедливы оценки

$$\max\bigl\{d_{cc}(u,\operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon)), d_c^g(u,\operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon))\bigr\} \le C_1\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}, \tag{3.11}$$

а для каждой точки $v \in \operatorname{Box}_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon)$ верно

$$\max\bigl\{d_{cc}\bigl(v,\operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon)\bigr), d_c^g\bigl(v,\operatorname{Box}_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon)\bigr)\bigr\} \le C_1\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}, \tag{3.12}$$

где C_1 — константа из следствия 3.1. Следствие 3.2 получается из (3.11), (3.12) и предложения 1.1.

Следствие 3.3. $\bigl|d_{cc}(u_\varepsilon,v_\varepsilon) - d_c^g(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\bigr| \le o(\varepsilon)$, *где u_ε, $v_\varepsilon \in \operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$.*

Доказательство. Следствие 3.3 вытекает из следствия 3.2.

§ 4. Оценки расхождения «ломаных» Карно — Каратеодори

Обозначим $a = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$, $b = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \beta_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_N)$.

Лемма 4.1. *Пусть $\varsigma = \varsigma(\varepsilon) : [0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ — некоторая ограниченная функция, удовлетворяющая условию $|\varsigma(\varepsilon)| \le \operatorname{const}\varepsilon$. Если точки $a, b \in \operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$ удовлетворяют условию*

$$d_c^g(a,b) \le \operatorname{const}\varsigma, \tag{4.1}$$

то выполняются тождества

$$\alpha_i = \beta_i + \upsilon_i\varsigma\varepsilon^{\deg X_i - 1}, \quad i = 1,\dots,N, \tag{4.2}$$

где $\upsilon_i = \upsilon_i(\alpha,\beta,\varsigma)$ — некоторые ограниченные на $\theta_g^{-1}\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ величины.

Доказательство. Имеем

$$d_c^g(a,b) = d_c^g(b\cdot b^{-1}\cdot a, b) = d_c^g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N \eta_i \widehat{X}_i^g\right)(b), b\right) \le \operatorname{const}\varsigma,$$

откуда

$$|\eta_i| \le \operatorname{const}\varsigma^{\deg X_i}, \quad i = 1,\dots,N. \tag{4.3}$$

Так как $a, b \in \operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$, то

$$\max\{|\alpha_i|, |\beta_i|\} \le \varepsilon^{\deg X_i}, \quad i = 1,\dots,N. \tag{4.4}$$

Используя формулы (2.4), можем записать следующие тождества:

$$\eta_i = z_i(\alpha,-\beta) = \alpha_i - \beta_i, \quad \deg X_i = 1, \tag{4.5}$$

$$\eta_i = z_i(\alpha, -\beta) = \alpha_i - \beta_i + \sum_{\deg X_l + \deg X_j = 2} \widehat{C}^g_{lji}(\alpha_l\beta_j - \alpha_j\beta_l), \quad \deg X_i = 2, \tag{4.6}$$

$$\eta_i = z_i(\alpha, -\beta) = \alpha_i - \beta_i$$
$$+ \sum_{\substack{k,m=1,\\ k>m}}^{N} \sum_{\substack{\gamma,\delta,\gamma+\delta>0,\\ |\gamma+\delta+e_k+e_m|_h = \deg X_i}} \widehat{G}^{g,i}_{\gamma,\delta,k,m}\alpha^\gamma(-\beta)^\delta(\alpha_m\beta_k - \alpha_k\beta_m), \quad \deg X_i > 2. \tag{4.7}$$

В силу (4.3), (4.5)

$$\alpha_i = \beta_i + \upsilon_i\varsigma, \quad \deg X_i = 1, \tag{4.8}$$

где $\upsilon_i = \upsilon_i(\alpha,\beta,\varepsilon)$ — некоторые равномерно ограниченные в $\theta_g^{-1}\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ величины. Подставляя (4.8) в (4.6) и используя (4.3), (4.4), для $\dim H_1 < i \leq \dim H_2$ получаем

$$\alpha_i = \beta_i - \sum_{\deg X_l + \deg X_j = 2} \widehat{C}^g_{lji}\varsigma(\upsilon_l\beta_j - \upsilon_j\beta_l) + \mathrm{const}\,\varsigma^2 = \beta_i + \upsilon_i\varepsilon\varsigma,$$

где величины $\upsilon_i = \upsilon_i(\alpha,\beta,\varepsilon)$ равномерно ограничены на $\theta_g^{-1}(\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0))$.

Предположим, что соотношения (4.2) доказаны для всех $i \leq \dim H_{j-1}$. Подставляя их в (4.7) для случая $\dim H_{j-1} < i \leq \dim H_j$ и используя (4.3), (4.4), получаем

$$\alpha_i = \sum_{\substack{k,m=1,\\ k>m}}^{N} \sum_{\substack{\gamma,\delta,\gamma+\delta>0,\\ |\gamma+\delta+e_k+e_m|_h = \mathbf{i}}} \widehat{G}^{g,i}_{\gamma,\delta,k,m}\alpha^\gamma(-\beta)^\delta(\upsilon_k\varepsilon^{\deg X_k - 1}\beta_m - \upsilon_m\varepsilon^{\deg X_m - 1}\beta_k)\varsigma$$
$$+ \beta_i = \beta_i + \upsilon_i\varepsilon^{\deg X_i - 1}\varsigma,$$

где $\upsilon_i = \upsilon_i(\alpha,\beta,\varepsilon)$ — некоторые равномерно ограниченные в $\theta_g^{-1}\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ величины. Соотношения (4.2) доказаны.

Следствие 4.1. *Пусть $\varsigma(\varepsilon) = o(\varepsilon)$. Тогда оценка (4.1) эквивалентна выполнению соотношений*

$$\alpha_i = \beta_i + \upsilon_i, \quad i = 1,\dots,N, \tag{4.9}$$

где $\upsilon_i = \upsilon_i(\varepsilon,\alpha,\beta) = o(\varepsilon^{\deg X_i})$.

Доказательство. В одну сторону следствие 4.1 доказано в лемме 4.1. Теперь пусть выполняются соотношения (4.9). Подставляя (4.9) в (4.7) и учитывая (4.3) и (4.4), получаем $\eta_i = o(\varepsilon^{\deg X_i})$, $i = 1,\dots,N$, откуда следует, что $d_c^g(a,b) \leq \varsigma(\varepsilon) = o(\varepsilon)$.

Лемма 4.2. *Пусть точки $a, b \in \operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$ удовлетворяют условию $d_{cc}(a,b) \leq \varsigma$, где $\varsigma = o(\varepsilon)$. Тогда*

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i}\delta_i\widehat{X}_i^g\right)(b), \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i}\delta_i X_i\right)(a)\right)$$
$$\leq C_2\max\{\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U}}\varsigma^{\frac{1}{C_U}}, \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U^2}}\}$$

для некоторой константы $C_2 = C_2(\varepsilon_0, C, h)$, где $\delta_i = \mathrm{const}$, $|\delta_i| \leq h = \mathrm{const}$, C — константа из теоремы 3.1.

Доказательство. Обозначим $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_N)$. Из теоремы 3.1 получаем, что

$$d_c^g(a,b) \leq \varsigma(\varepsilon) + C\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}} \leq 2\max\{\varsigma(\varepsilon), C\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}\} = \varsigma_1 = o(\varepsilon).$$

Обозначим $a = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \alpha_i X_i\right)(g)$, $b = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \beta_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$. Так как $a, b \in \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, то $\max\{|\alpha_i|, |\beta_i|\} \le \varepsilon^{\deg X_i}$, $i = 1, \dots, N$. По предложению 2.2 имеем $b = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \beta_i \widehat{X}_i^g\right)(g) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \beta_i X_i\right)(g)$. Ввиду леммы 4.1

$$\alpha_i = \beta_i + \upsilon_i \varsigma_1 \varepsilon^{\deg X_i - 1}, \tag{4.10}$$

где $\upsilon = \upsilon(\alpha, \beta, \varsigma) = (\upsilon_1, \dots, \upsilon_N)$ — некоторая ограниченная на $\theta_g^{-1} \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon_0)$ вектор-функция. Используя (4.10), запишем

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i \widehat{X}_i^g\right)(b)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \upsilon_i \varsigma_1 \varepsilon^{\deg X_i - 1}) \widehat{X}_i^g\right)(g).$$

Пусть $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i X_i\right) \circ \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N \alpha_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N p_i X_i\right)(g)$. Применяя (1.3) и (2.4), получаем

$$p_i = \sum_{\substack{\omega, \gamma \ge 0, \\ |\omega + \gamma|_h = \deg X_i}} \widehat{F}^{g,i}_{\omega,\gamma} \alpha^\omega \delta^\gamma \varepsilon^{|\gamma|_h} + c_i \varepsilon^{\deg X_i + 1},$$

где $c_i = c_i(\alpha, h, \varepsilon_0)$, $i = 1, \dots, N$, равномерно ограничены на $\theta_g^{-1} \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon_0)$. Пусть $c = (c_1, \dots, c_N)$. Применяя (2.4), получаем

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \upsilon_i \varsigma_1 \varepsilon^{\deg X_i - 1}) \widehat{X}_i^g\right)(g)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^N (p_i + \hat{c}_i) \widehat{X}_i^g\right)(g),$$

где

$$\hat{c}_i = \hat{c}_i(\alpha, \delta, c, \upsilon, \varepsilon) = O(\varepsilon^{\deg X_i - 1}) \varsigma_1 = o(\varepsilon^{\deg X_i}), \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.11}$$

Используя предложение 2.2 и соотношения (2.4), (4.11), имеем

$$d_c^g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i X_i\right)(a), \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i \widehat{X}_i^g\right)(b)\right)$$
$$= d_c^g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N p_i \widehat{X}_i^g\right)(g), \exp\left(\sum_{i=1}^N (p_i + \hat{c}_i) \widehat{X}_i^g\right)(g)\right) \le C_0 \varepsilon^{1 - \frac{1}{C_U}} \varsigma_1^{\frac{1}{C_U}}, \ C_0 = \mathrm{const}.$$

Тогда по теореме 3.1

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i \widehat{X}_i^g\right)(b), \exp\left(\sum_{i=1}^N \varepsilon^{\deg X_i} \delta_i X_i\right)(a)\right) \le C_0 \varepsilon^{1 - \frac{1}{C_U}} \varsigma_1^{\frac{1}{C_U}} + C \varepsilon^{1 + \frac{1}{C_U}}$$
$$\le C_0' \varepsilon^{1 - \frac{1}{C_U}} \varsigma^{\frac{1}{C_U}} + C' \varepsilon^{1 - \frac{1}{C_U} + \frac{1}{C_U}\left(1 + \frac{1}{C_U}\right)} \le C_2 \max\{\varepsilon^{1 - \frac{1}{C_U}} \varsigma^{\frac{1}{C_U}}, \varepsilon^{1 + \frac{1}{C_U^2}}\}.$$

Лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. *Рассмотрим точки $a, b \in \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, удовлетворяющие условию $d_{cc}(a, b) \le \varsigma$, где $\varsigma = o(\varepsilon)$, и числа $\delta_{i,j}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, k$, такие, что*

$|\delta_{i,j}| \le h = \mathrm{const}$, *где* $k \in \mathbb{N}$ *фиксировано. Тогда*

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,k}\widehat{X}_i^g\right)\circ\dots\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,1}\widehat{X}_i^g\right)(a),\right.$$
$$\left.\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,k}X_i\right)\circ\dots\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,1}X_i\right)(b)\right)$$
$$\le C_{k+1}\max\{\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U^k}}\varsigma^{\frac{1}{C_U^k}}, \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U^{k+1}}}\} \tag{4.12}$$

для некоторой константы $C_{k+1} = C_{k+1}(k, C, C_2, h)$, *где* C, C_2 *— константы из теоремы* 3.1 *и леммы* 4.2 *соответственно.*

Доказательство. Для доказательства оценки (4.12) используем метод математической индукции. Случай $k = 1$ доказан в лемме 4.2. Пусть для некоторого числа $1 < l < k$ верно

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,l}\widehat{X}_i^g\right)\circ\dots\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,1}\widehat{X}_i^g\right)(a),\right.$$
$$\left.\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,l}X_i\right)\circ\dots\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,1}X_i\right)(b)\right)$$
$$= d_{cc}(u,v) \le C_{l+1}\max\{\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U^l}}\varsigma^{\frac{1}{C_U^l}}, \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U^{l+1}}}\} = \tilde\varsigma(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Согласно методу математической индукции требуется доказать, что

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,l+1}\widehat{X}_i^g\right)(u), \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_{i,l+1}X_i\right)(v)\right) = d_{cc}(\tilde u, \tilde v)$$
$$\le C_{l+2}\max\{\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U^{l+1}}}\varsigma^{\frac{1}{C_U^{l+1}}}, \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U^{l+2}}}\}.$$

По теореме 3.1

$$d_c^g(\tilde u, \tilde v) \le \tilde\varsigma(\varepsilon) + C\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}} \le 2\max\bigl\{\tilde\varsigma(\varepsilon), C\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}}\bigr\} = \tilde\varsigma_1(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Используя доказательство леммы 4.2, получаем

$$d_{cc}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_i\widehat{X}_i^g\right)(b), \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon^{\deg X_i}\delta_i X_i\right)(a)\right)$$
$$\le \widehat{C}_0\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U}}\tilde\varsigma_1^{\frac{1}{C_U}} + C_1\varepsilon^{1+\frac{1}{C_U}} \le \widehat{C}_0'\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U}}\varepsilon^{\frac{1}{C_U}+\frac{1}{C_U^{l+2}}} + \widehat{C}_0'\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U}}\varepsilon^{\frac{1}{C_U}-\frac{1}{C_U^{l+2}}}\varsigma^{\frac{1}{C_U^{l+2}}}$$
$$\le C_{l+2}\max\{\varepsilon^{1-\frac{1}{C_U^{l+1}}}\varsigma^{\frac{1}{C_U^{l+1}}}, \varepsilon^{1+\frac{1}{C_U^{l+2}}}\},$$

где $\widehat{C}_0$, $\widehat{C}_0'$ $C_{l+2} = \mathrm{const}$. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

§ 5. Сходимость по кривым к касательному конусу

Определение 5.1. Зафиксируем последовательность $\varepsilon_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и рассмотрим некоторую последовательность точек $x_i \in \mathrm{Box}_{cc}(g, O(\varepsilon_i))$. Будем говорить, что последовательность $\{x_i\}$ *сходится* к точке $x \in \mathrm{Box}_c^g(g, r)$, $r < \varepsilon_0$, если

$$d_c^g\bigl(\Delta_{1/\varepsilon_i}^g x_i, x\bigr) \underset{\varepsilon_i\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.1}$$

Предложение 5.1. *Пусть* $x_i \in \mathrm{Box}_c(g, O(\varepsilon_i))$. *Сходимость* (5.1) *эквивалентна сходимости* $d_{cc}\big(\Delta^g_{1/\varepsilon_i} x_i, x\big) \underset{\varepsilon_i \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. Пусть $d_{\mathrm{riem},1}$, $d_{\mathrm{riem},2}$ — римановы квазиметрики, ассоциированные с наборами векторных полей $\{X_i\}$, $\big\{\widehat{X}^g_i\big\}$ соответственно. Заметим, что квазиметрики $d_{\mathrm{riem},1}$ и $d_{\mathrm{riem},2}$ эквивалентны в O. Тогда предложение 5.1 доказывается при помощи замечания 1.1 методом «от противного».

Предложение 5.2. *Сходимости* (5.1), (5.2) *равносильны выполнению одного из следующих эквивалентных условий:*

1) $d_{cc}(x_i, \Delta^g_{\varepsilon_i} x) = o(\varepsilon_i)$ *при* $\varepsilon_i \to 0$;

2) $d^g_c(x_i, \Delta^g_{\varepsilon_i} x) = o(\varepsilon_i)$ *при* $\varepsilon_i \to 0$.

Доказательство. Отметим, что эквивалентность условий 1, 2 вытекает из следствия 3.2. Предложение 5.2 следует из свойства 2.2 и предложения 5.1.

Свойство 5.1. *Пусть* $x_i = \exp\bigg(\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^i_j X^{\varepsilon_i}_j\bigg)(g)$, $x = \exp\bigg(\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \widehat{X}^g_j\bigg)(g)$. *Тогда сходимость* (5.1) *эквивалентна тому, что* $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha^i_j = \alpha_j$.

Доказательство. Свойство 5.1 вытекает из предложений 2.1, 2.2.

Определение 5.2. Пусть $\varepsilon_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ — некоторая последовательность, $s \in [0, s_0]$. Кривые $u_{i,\varepsilon_i}(s) \subset \mathrm{Box}_{cc}(g, O(\varepsilon_i))$ *сходятся* к кривой $u(s) \subset \mathrm{Box}^g_c(g, r)$, $r < \varepsilon_0$, если

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \sup_{s\in[0,s_0]} d^g_c\big(\Delta^g_{1/\varepsilon_i} u_{i,\varepsilon_i}(s), u(s)\big) = 0.$$

Предложение 5.3. *Кривые* $x_i(s) = \exp\bigg(s\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^i_j X^{\varepsilon_i}_j\bigg)(g_{\varepsilon_i}) \subset \mathrm{Box}_{cc}(g, O(\varepsilon_i))$, $s \in [0,1]$, *сходятся к кривой* $x(s) = \exp\bigg(s\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \widehat{X}^g_j\bigg)(\hat{g}) \subset \mathrm{Box}^g_c(g, r)$, $r < \varepsilon_0$, $s \in [0,1]$, *если точки* g_{ε_i} *сходятся к точке* $\hat{g}$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha^i_j = \alpha_j$.

Доказательство. Обозначим $\hat{x}_i(s) = \exp\bigg(s\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^i_j \varepsilon_i^{\deg X_i} \widehat{X}^g_j\bigg)(g_\varepsilon)$, $s \in [0,1]$. Из теоремы 3.1 имеем $d^g_c(x_i(s), \hat{x}_i(s)) = o(\varepsilon)$. С другой стороны, по теореме о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных [27] кривые $\exp\bigg(s\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^i_j \widehat{X}_j\bigg)\big(\Delta^g_{1/\varepsilon_i} g_{\varepsilon_i}\big)$ сходятся при $\varepsilon_i \to 0$ к кривой $x(s)$. С учетом свойств 2.1, 2.2 предложение 5.3 доказано.

Предложение 5.4. *Последовательность ломаных* $u^l_i(s) \in \mathrm{Box}_{cc}(g, O(\varepsilon_i))$, $s \in [0, l]$, $l \in \mathbb{N}$, *где*

$$u^l_i(s) = \begin{cases} \exp\bigg(s\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^1_{j,i} X^{\varepsilon_i}_j\bigg)(g) = v^i_1(s), & s \in [0,1], \\ \exp\bigg((s-k)\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha^{k+1}_{j,i} X^{\varepsilon_i}_j\bigg)\big(v^i_k(k)\big) = v^i_{k+1}(s), & s \in [k, k+1], \end{cases}$$

$1 \le k < l$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha^k_{j,i} = \alpha^k_j = \mathrm{const}$, *сходится к ломаной* $u(s) \in \mathrm{Box}^g_c(g, r)$,

$r < \varepsilon_0$, $s \in [0,l]$, *при* $\varepsilon_i \to 0$, *где*

$$u^l(s) = \begin{cases} \exp\Bigl(s \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j^1 \widehat{X}_j^g\Bigr)(g) = \hat{v}_1(s), & s \in [0,1], \\ \exp\Bigl((s-k) \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j^{k+1} \widehat{X}_j^g\Bigr)(\hat{v}_k(k)) = \hat{v}_{k+1}(s), & s \in [k,k+1]. \end{cases}$$

Доказательство будем проводить по индукции, где шаг индукции — параметр l. Случай $l=1$ вытекает из свойства 5.1. Рассмотрим $l=2$. В этом случае необходимо доказать сходимость кривых $u_i^2(s)$ к кривой $u^2(s)$. Но данная сходимость получается из свойства 5.1 и предложения 5.3. Пусть при $l=k-1$ требуемая сходимость доказана. Рассмотрим ломаные $u_i^k(s)$. Отметим, что сходимость первых $k-1$ звеньев этих ломаных к первым $k-1$ звеньям ломаной $u^k(s)$ — индукционное предположение. Таким образом, осталось доказать сходимость кривых $\exp\Bigl(s \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_{j,i}^{k+1} X_j^{\varepsilon_i}\Bigr)\bigl(v_{k-1}^i(k-1)\bigr)$, $s \in [0,1]$, к кривой $\exp\Bigl(s \sum\limits_{j=1}^{\dim H_1} \alpha_j^{k+1} \widehat{X}_j^g\Bigr)(\hat{v}_{k-1}(k-1))$, $s \in [0,1]$, при условии, что точки $v_{k-1}^i(k-1)$ сходятся к точке $\hat{v}_{k-1}(k-1)$ (это условие следует из индукционного предположения). Поскольку $v_{k-1}^i(k-1) \in \mathrm{Box}_{cc}(g, O(\varepsilon_i))$, требуемая сходимость вытекает из предложения 5.3.

§ 6. Сходимость компактных квазипространств Карно — Каратеодори к нильпотентному касательному конусу

В дальнейшем константы c_1, Q из определения 1.2 будем называть *квазиконстантами*, и пусть $B_{\mathbb{X}}(x,r) = \{y \in \mathbb{X} \mid d_{\mathbb{X}}(x,y) < r\}$. Далее мы будем рассматривать лишь те квазипространства, для которых $c_1 = 1$ в определении 1.2. Говоря «метрическое пространство», мы подразумеваем, что $Q = 1$ в определении 1.2.

Определение 6.1. *Расстоянием по Липшицу* d_L для квазипространств (U,d_U), (V,d_V) называется величина

$$d_L(U,V) = \inf_{F:U\to V} \log\bigl(\max\{\operatorname{dil} F, \operatorname{dil} F^{-1}\}\bigr), \quad \text{где } \operatorname{dil} F = \sup_{x,y\in U} \frac{d_V(F(x),F(y))}{d_U(x,y)}$$

и точная нижняя грань берется по всем билипшицевым гомеоморфизмам F. Последовательность $\{U_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, квазипространств сходится по Липшицу к квазипространству V, если $d_L(U_n,V) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Определение 6.2. Пусть (X,d_X), (Y,d_Y) — квазипространства, $f: X \to Y$ — произвольное отображение. Величина $\operatorname{dis}(f) = \sup\limits_{u,v\in X} |d_Y(f(u),f(v))) - d_X(u,v)|$ называется *искажением* f. Последовательность $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, квазипространств *равномерно сходится* к квазипространству X, если существуют гомеоморфизмы $f_n : X_n \to X$ такие, что $\operatorname{dis}(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Определения 6.1, 6.2 обобщают соответствующие определения из [26] для квазипространств. Тот факт, что d_L из определения 6.1 является действительно метрикой, для квазипространств доказывается точно так же, как и для метрических пространств (см. [26]).

Определение 6.3. Расстояние по Хаусдорфу между двумя компактными подмножествами X, Y метрического пространства (W, d_W) определяется как

$$H_W(X,Y) = \inf\{\varepsilon \mid Y \subset N_\varepsilon(X), X \subset N_\varepsilon(Y)\},$$

где $N_\varepsilon(A) = \{y \in W : \operatorname{dist}(y, A) < \varepsilon\}$ обозначает ε-окрестность множества A.

Определение 6.4. Расстояние по Громову — Хаусдорфу между двумя компактными метрическими пространствами X, Y определяется как $H(X,Y) = \inf\limits_W H_W(X,Y)$, где инфимум берется по всем изометрическим вложениям пространств X, Y во всевозможные метрические пространства W.

Определение 6.5. Компактные метрические пространства $\{X_i\}$ сходятся по Громову — Хаусдорфу к компактному метрическому пространству X ($X_i \underset{GH}{\longrightarrow} X$), если $\lim\limits_{i\to\infty} H(X_i, X) = 0$.

Критерий 6.1 [26]. *Если метрические пространства X, $\{X_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, компактны, то $X_i \underset{GH}{\longrightarrow} X$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные ε-сети $\Gamma_i \subset X_i$, $\Gamma \subset X$, что $\Gamma_i \underset{GH}{\longrightarrow} \Gamma$. Более того, эти ε-сети могут быть выбраны так, что для каждого достаточно большого i сеть Γ_i равномощна Γ.*

Критерий 6.2 [2; 13, с. 37]. *Последовательность $\{X_i\}$ компактных метрических пространств GH-сходится к компактному пространству X тогда и только тогда, когда существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ такая, что для каждого i существуют $(1+\varepsilon_i)$-билипшицевы ε_i-плотные сети $\Gamma_i \subset X_i$ и $\Gamma'_i \subset X$.*

Замечание 6.1. В [26] отмечено, что если последовательность метрических пространств X_n сходится равномерно к метрическому пространству X, то $X_n \underset{GH}{\longrightarrow} X$.

Замечание 6.2. Определения 6.4, 6.5 не могут быть обобщены прямолинейным образом на класс всевозможных квазипространств. Действительно, для любых ограниченных пространств X и Y можно определить расстояние на их формальном объединении $X \sqcup Y$, положив $d(x,y) = d(y,x) = \varepsilon$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная константа. Получится квазиметрика с константой в обобщенном неравенстве треугольника порядка D/ε, где $D = \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$, и X, Y лежат в ней на расстоянии ε друг от друга. Поэтому рассматривать расстояние по Громову — Хаусдорфу как инфимум по всем изометрическим вложениям во всевозможные квазипространства бессмысленно, иначе все ограниченные пространства будут сходиться друг к другу по такой квазиметрике (автор благодарен рецензенту за то, что он обратил внимание автора на этот факт).

Следующие утверждения (учитывая критерии 6.1, 6.2) в некотором смысле обобщают определение GH-сходимости для квазипространств.

Определение 6.6. Последовательность $\{(X_i, d_{X_i})\}$ компактных квазипространств *L-близка по сетям* к квазипространству (X, d_X), если существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ такая, что для каждого i существуют ε_i-плотные сети $\Gamma_i \subset X_i$ и $\Gamma'_i \subset X$ такие, что $d_L(\Gamma_i, \Gamma'_i) < L = \mathrm{const}$.

Утверждение 6.1. *Пусть (X_i, d_{X_i}), $i \in \mathbb{N}$, — последовательность компактных квазипространств, квазиконстанты которых ограничены в совокупности величиной Q. Пусть последовательность $\{(X_i, d_{X_i})\}$, $i > 1$, L-близка по сетям к квазипространству (X_1, d_{X_1}). Тогда существует последовательность квазипространств $\{(W_i, d_{W_i})\}$ такая, что квазиконстанты этих пространств равномерно ограничены некоторой постоянной, зависящей от Q, L, при этом для каждого $i > 1$ квазипространства (X_i, d_{X_i}), (X_1, d_{X_1}) изометрически вложены в (W_i, d_{W_i}) и $H_{W_i}(X_i, X_1) \le c\varepsilon_i$ для некоторой константы $c = c(L, Q)$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_i = (x_i)_{i\in I} \subset (X_i, d_{X_i})$, $\Gamma_i' = (x_i')_{i\in I} \subset (X_1, d_{X_1})$ — соответствующие ε_i-плотные L-билипшицевы сети. Обозначим через F_i последовательность билипшицевых отображений из условий теоремы, т. е.

$$F_i : \Gamma_i \to \Gamma_i', \quad F_i(x_i) = x_i', \quad L^{-1} d_{X_i}(x_j, x_k) \le d_{X_1}(x_j', x_k') \le L d_{X_i}(x_j, x_k).$$

Рассмотрим пространство $(X_i \sqcup X_1, D_i)$ с квазиметрикой

$$D_i(u,v) = \begin{cases} \inf\limits_j \{d_{X_i}(u, x_j) + d_{X_1}(x_j', v) + \varepsilon_i\}, & u \in X_i,\ v \in X_1, \\ d_{X_j}(u, v), & u, v \in X_j,\ j = 1, i. \end{cases}$$

Проверим, что функция $D_i(u, v)$ является квазиметрикой на $X_i \sqcup X_1$. Достаточно проверить, что для D_i выполняется обобщенное неравенство треугольника. Пусть u, $v \in (X_1, d_{X_1})$, $w \in (X_i, d_{X_i})$. В силу симметрии достаточно рассмотреть следующие два случая.

Случай 1. Оценим расстояние $D_i(w, u)$. Для точек x_j, x_j' таких, что $F_i(x_j) = x_j'$, имеем $d_{X_i}(w, x_j) + d_{X_1}(x_j', u) + \varepsilon_i \le Q(d_{X_i}(w, x_j) + d_{X_1}(x_j', v) + d_{X_1}(u, v) + \varepsilon_i)$. Поэтому

$$\begin{aligned} D_i(w,u) &= \inf_j \{d_{X_i}(w, x_j) + d_{X_1}(x_j', u)\} \\ &\le Q(\inf_j \{d_{X_i}(w, x_j) + d_{X_1}(x_j', v) + d_{X_1}(u, v) + \varepsilon_i\}) = Q(D_i(w, v) + D_i(u, v)). \end{aligned}$$

Случай 2. Имеем

$$D_i(u,v) = d_{X_1}(u,v) \le Q^2(d_{X_1}(u, x_k') + d_{X_1}(x_k', x_l') + d_{X_1}(x_l', v)) \le Q^2(d_{X_1}(u, x_k')$$
$$+ L d_{X_i}(x_k, x_l) + d_{X_1}(x_l', v)) \le \widetilde{Q}(d_{X_1}(u, x_k') + d_{X_i}(x_k, w) + d_i(w, x_l) + d_{X_1}(x_l', v) + 2\varepsilon_i)$$

для произвольных x_k', $x_l' \in \Gamma_i'$, откуда следует $D_i(u, v) \le \widetilde{Q}(D_i(u, w) + D_i(w, v))$, причем квазиконстанта $\widetilde{Q}$ не зависит от i. Таким образом, функция D_i является квазиметрикой.

Пусть $u \in (X_1, d_1)$. Найдется точка $x_j' \in \Gamma_1$ такая, что $d_{X_1}(u, x_j') = D_i(u, x_j') \le \varepsilon_i$. С другой стороны, $D_i(x_j, x_j') = \varepsilon_i$. Поэтому $D_i(u, (X_i, d_i)) \le D_i(u, x_j) \le \widetilde{Q}(D_i(u, x_j') + D_i(x_j, x_j')) \le 2\widetilde{Q}\varepsilon_i$. Аналогично для произвольной точки $v \in (X_i, d_i)$ получаем $D_i(v, (X_1, d_1)) \le 2\widetilde{Q}\varepsilon_i$. Тогда $H_{X_i \sqcup X_1}((X_1, d_1), (X_i, d_i)) \le 2\widetilde{Q}\varepsilon_i$. Утверждение 6.1 доказано.

Лемма 6.1. *Пусть D — компактное множество квазипространства (X, d). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует набор шаров $\{B_X(x_j, \varepsilon)\}$ такой, что*

1°) $x_j \in D$,
2°) $x_{j_k} \notin B_X(x_{j_l}, \varepsilon)$ *в случае* $k \ne l$,
3°) $B_X(x_{j_k}, t'\varepsilon) \cap B_X(x_{j_l}, t'\varepsilon) = \varnothing$, $t' \le t$, *для некоторой константы* $t = t(Q)$,
4°) $D \subset \bigcup\limits_j B_X(x_j, 2Q\varepsilon)$.

Доказательство. Из компактности множества D вытекает, что для каждого ε существует его конечное покрытие шарами $B_X(x_i, \varepsilon)$, $x_i \in X$. Исключая из этого покрытия «лишние» шары, получим свойство 2°. Кроме того, поскольку объединение исходной совокупности шаров покрывало D, имеем свойство 4°. Тогда условие 3° будет выполняться при $t = (2Q)^{-1}$.

Утверждение 6.2. *Пусть (X_i, d_i), $i \in \mathbb{N}$, — последовательность компактных квазипространств, квазиконстанты которых равномерно ограничены некоторой константой Q. Предположим, что существуют последовательность квазипространств (W_i, d_{W_i}), квазиконстанты которых равномерно ограничены (для краткости) той же константой Q, и последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такие, что для каждого i квазипространства (X_i, d_{X_i}) и (X_1, d_{X_1}) изометрически вложены в (W_i, d_{W_i}) и $H_{W_i}(X_i, X_1) \le \varepsilon_i$. Тогда существуют $c\varepsilon_i$-плотные сети $\Gamma_i \subset X_i$ и $\Gamma_i' \subset X_1$, $c = c(Q)$, такие, что $d_L(\Gamma_i', \Gamma_i) < L = L(Q)$.*

Доказательство. Из условий утверждения 6.2 $H_{W_i}(f_i(X_i), g_i(X_1)) \le \varepsilon_i$, где $f_i : (X_i, d_i) \to (W_i, d_{W_i})$, $g_i : (X_1, d_i) \to (W_i, d_{W_i})$, $i > 1$, — соответствующие изометрические вложения. Зафиксируем положительное число $A > 1$. Пусть набор шаров $\{B_{X_i}(w_k, A\varepsilon_i)\}$ удовлетворяет условиям леммы 6.1 для X_i. Мы можем выбрать константу t' настолько малой, что $B_{W_i}(f_i(w_k), t'A\varepsilon_i) \cap B_{W_i}(f_i(w_l), t'A\varepsilon_i) = \varnothing$ при $w_k \ne w_l$. Действительно, пусть

$$B_{W_i}(f_i(w_k), t'A\varepsilon_i) \cap B_{W_i}(f_i(w_l), t'\varepsilon_i) = \mathscr{D} \ne \varnothing \quad \text{для некоторых } k \ne l.$$

Пусть $y \in \mathscr{D}$. Используя изометричность отображения f_i и обобщенное неравенство треугольника, получаем

$$d_{X_i}(w_k, w_l) = d_{W_i}(f_i(w_k), f_i(w_l)) \le Q(d_{W_i}(f_i(w_k), y) + d_{W_i}(y, f_i(w_l))) \le 2QAt'\varepsilon_i.$$

Пусть $2Qt' < 1$. Тогда $w_l \in B_{X_i}(w_k, A\varepsilon_i)$, что противоречит п. 2° леммы 6.1. Полагаем $t' = \frac{1}{4Q}$. Тогда

$$d_{X_i}(w_k, w_l) > \frac{A\varepsilon_i}{4Q}, \quad k \ne l. \tag{6.1}$$

Из изометричности f_i следует, что $f_i(B_{X_i}(w_k, C\varepsilon_i)) \subset B_{W_i}(f_i(w_k), C\varepsilon_i)$, $C = \mathrm{const}$, поэтому, используя п. 4° леммы 6.1, имеем $f_i(X_i) \subset \bigcup\limits_k B_{W_i}(f_i(w_k), 2AQ\varepsilon_i)$. Тем самым

$$N_{\varepsilon_i}^{W_i}(f_i(X_i)) \subset \bigcup_k B_{W_i}(f_i(w_k), Q(2AQ+1)\varepsilon_i). \tag{6.2}$$

Отметим, что из п. 3° и изометричности вложения f_i вытекает, что не существует точки $z \in X_i$ такой, что

$$f_i(z) \in B_{W_i}\left(f_i(w_k), \frac{A\varepsilon_i}{400Q^4}\right) \cap B_{W_i}\left(f_i(w_l), \frac{A\varepsilon_i}{400Q^4}\right), \quad k \ne l.$$

Так как $f_i(X_i) \subset N_{\varepsilon_i}^{W_i}(g_i(X_1))$, для каждой точки w_k найдется точка $v_k \in X_1$ такая, что $g_i(v_k) \in B_{W_i}\big(f_i(w_k), \frac{A\varepsilon_i}{40Q^4}\big)$ (здесь мы уже предполагаем, что A — достаточно большое число, например, $1000Q^5$). Пусть $d_{X_1}(v_k, v_l) = \beta\varepsilon_i$. Используя изометричность вложения g_i и обобщенное неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} d_{W_i}(f_i(w_k), f_i(w_l)) &\le Q\left(d_{W_i}(w_k, v_l) + \frac{A\varepsilon_i}{400Q^4}\right) \\ &\le Q\left(Q(d_{W_i}(w_k, v_k) + d_{W_i}(v_k, v_l)) + \frac{A\varepsilon_i}{40Q^4}\right) = \frac{A\varepsilon_i}{40Q^2} + Q^2\beta\varepsilon_i + \frac{A\varepsilon_i}{40Q^3}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Предположим, что $\beta < \frac{A}{40Q_0^4}$. Тогда из (6.3) вытекает $d_{W_i}(f_i(w_k), f_i(w_l)) < \frac{3A\varepsilon_i}{40Q^2}$, что противоречит (6.1). Таким образом,

$$d_{X_1}(v_k, v_l) > \frac{A\varepsilon_i}{40Q^4}, \quad k \neq l. \tag{6.4}$$

В силу обобщенного неравенства треугольника

$$B_{W_i}(f_i(w_k), 2AQ\varepsilon_i) \subset B_{W_i}(g_i(v_k), 4AQ^2\varepsilon_i).$$

Используя (6.2), получаем

$$X_1 \subset \bigcup_k B_{W_i}(f_i(w_k), Q(2AQ+1)\varepsilon_i) \subset \bigcup_k B_{W_i}(g_k(v_k), Q(Q(2AQ+1)+4AQ^2)\varepsilon_i)). \tag{6.5}$$

Из (6.5) и изометричности вложения f_1 вытекает, что $X_1 \subset \bigcup_k B_{X_1}(v_k, \widetilde{Q}\varepsilon_i))$, где $\widetilde{Q} = 2AQ^3 + 4AQ^2 + Q^2$, т. е. точки $\{v_k\}$ образуют $\widetilde{Q}\varepsilon_i$-плотную сеть для множества X_1. Используя обобщенное неравенство треугольника (так же, как и при доказательстве (6.3)), изометричность вложений g_i, f_i и неравенства (6.1), (6.4), для некоторой константы L имеем

$$d_{X_i}(w_k, w_l) = d_{W_i}(f_i(w_k), f_i(w_l)) \leq Q^3 d_{W_i}(v_k, v_l) + \frac{A\varepsilon_i}{20Q^2} \leq L d_{X_i}(v_k, v_l),$$

$$d_{X_1}(v_k, v_l) = d_{W_i}(g_i(v_k), g_i(v_l)) \leq Q^3 d_{W_i}(w_k, w_l) + \frac{A\varepsilon_i}{20Q^2} \leq L d_{X_i}(w_k, w_l).$$

Таким образом, отображение $F_i : v_k \to w_k$ является L-билипшицевым отображением $\widetilde{Q}\varepsilon_i$-плотных сетей $\{v_k\}_{k\in I}$, $\{w_k\}_{k\in I}$ множеств X_1 и X_i, $i > 1$, соответственно.

Следствие 6.1. *L-близость по сетям (в смысле определения 6.6) последовательности компактных квазипространств $\{(X_i, d_{X_i})\}$ квазипространству (X, d_X) эквивалентна существованию последовательности квазипространств $\{(W_i, d_{W_i})\}$, квазиконстанты которых равномерно ограничены, таких, что X_i и X изометрически вложены в (W_i, d_{W_i}) для каждого i и $H_{W_i}(X_i, X) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Рассмотрим на области O квазиметрику td_{cc}. Обозначим через $B_t(g, r)$ шар в квазиметрике td_{cc} с центром в точке $g \in O$ радиуса r. Отметим, что $B_t(g, r) = \mathrm{Box}_{cc}(g, r/t)$. Действительно, $B_t(g, r) = \{u \in O \mid td_{cc}(g, u) < r\} = \{u \in O \mid d_{cc}(g, u) < r/t\}$.

Теорема 6.1. *Пусть $\{(\overline{B}_{t_k}(g, r), t_k d_{cc})\}$, где $t_k \to \infty$, $r < \varepsilon_0$, — последовательность компактных квазипространств. Для каждого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные ε-плотные сети $\Gamma_k^\varepsilon \subset (\overline{B}_{t_k}(g, r), t_k d_{cc})$, $\Gamma^\varepsilon \subset (\overline{\mathrm{Box}}_c^g(g, r), d_c^g)$ одинаковой мощности, что $d_L(\Gamma_k^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Доказательство. Для множества $\overline{\mathrm{Box}}_c^g(g, r)$ рассмотрим удовлетворяющие лемме 6.1 шары $\{\mathrm{Box}_c^g(x_j, \varepsilon)\}$. Используя свойство 2.2, получаем, что точки $\{\Delta^g_{t_k^{-1}} x_j\}$ образуют $t_k^{-1} 2Q\varepsilon$-плотную сеть на $\overline{\mathrm{Box}}_c^g(g, t_k^{-1} r)$. Используя следствие 3.3, выводим, что точки $\{\Delta^g_{t_k^{-1}} x_j\}$ образуют $(t_k^{-1} 2Q\varepsilon + C(t_k^{-1} r)^{1+\frac{1}{C_U}})$-плотную сеть для $\overline{\mathrm{Box}}_{cc}(g, t_k^{-1} r)$, откуда следует, что точки $\{\Delta^g_{t_k^{-1}} x_j\}$ образуют $(2Q\varepsilon + C t_k^{-\frac{1}{C_U}} r^{1+\frac{1}{C_U}})$-плотную сеть для $\overline{B}_{t_k}(g, r)$; кроме того, по свойству 2.2 и следствию 3.2 найдутся положительные константы c_1, c_2, не зависящие от ε, такие, что

$$d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})+c_1r^{1+\frac{1}{C_U}}t_k^{\frac{-1}{C_U}}\le t_kd_{cc}\big(\Delta^g_{t_k^{-1}}x_{j_1},\Delta^g_{t_k^{-1}}x_{j_2}\big)\le d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})+c_2r^{1+\frac{1}{C_U}}t_k^{\frac{-1}{C_U}}.$$

Из п. 3° леммы 6.1 вытекает, что $d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})\ge t'\varepsilon$. Пусть $c=\max\{c_1,c_2\}$. Тогда

$$d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})+cr^{1+\frac{1}{C_U}}t_k^{\frac{-1}{C_U}}\le d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})\big(1+cr^{1+\frac{1}{C_U}}t_k^{\frac{-1}{C_U}}(c'\varepsilon)^{-1}\big)=d_c^g(x_{j_1},x_{j_2})z_k.$$

Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=1$. Таким образом, для всех достаточно больших t_k отображения $\Delta^g_{t_k}$ билипшицевы между $(2Q+1)\varepsilon$-плотными сетями $\big\{\Delta^g_{t_k^{-1}}x_j\big\}\subset\big(\overline{B}_{t_k}(g,r),t_kd_{cc}\big)$ и $\{x_j\}\subset\big(\overline{\mathrm{Box}}^g_c(g,r),d_c^g\big)$ с коэффициентом билипшицевости $1+o(1)$. Теорема 6.1 доказана.

Утверждение 6.3. *Квазипространства* $(\overline{B}_{t_k}(g,r),t_kd_1)$, $r<\varepsilon_0$, *сходятся равномерно к квазипространству* $\big(\overline{\mathrm{Box}}^g_c(g,r),d_c^g\big)$ *при* $t_k\to\infty$.

Доказательство получается непосредственным применением следствия 3.3 и свойства 2.2 (необходимыми для определения 6.2 гомеоморфизмами являются отображения $\Delta^g_{t_k}$ при $t_k\to\infty$).

Пунктированным метрическим пространством называется пара (X,p), состоящая из пространства X и точки $p\in X$. Так же, как и для пунктированных метрических пространств (см. [26]), можно определить сходимость по Громову — Хаусдорфу для пунктированных квазипространств. Тогда из утверждения 6.3 и предложения 2.2 вытекает

Теорема 6.2. *Пунктированные квазипространства* $\{(\overline{B}_{t_k}(g,r),g)\}$ *сходятся по Громову — Хаусдорфу к пунктированному квазипространству* $(\overline{\mathrm{Box}}^g_c(g,r),$ $g)$ *при* $t_k\to\infty$, *где* $r<\varepsilon_0$.

Следуя классическому подходу (см. [26]), можно определить понятие касательного конуса для пунктированного квазипространства. Тогда из теоремы 6.2 вытекает

Следствие 6.2. *Квазипространство* $\big(\mathscr{O}_g,d_c^g\big)$ *является локальным касательным конусом квазипространства Карно — Каратеодори* (O,d_{cc}) *в точке* g.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M.* Groups of polinomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1981. V. 53. P. 53–73.
2. *Gromov M.* Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: CEDIC, 1981.
3. *Petersen V. P.* Gromov–Hausdorff convergence in metric space // Differential geometry: Riemannian geometry (Proc. Sympos. Pure Math.; V. 54, Pt. 3). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 489–504.
4. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 119. P. 1–60.
5. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии (Редактор-составитель С. К. Водопьянов). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. P. 603–670.
6. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 7–85.
7. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
8. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory spaces // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.

9. *Margulis G. A., Mostow G. D.* Some remarks on definition of tangent cones in a Carnot–Carathéodory space // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 299–317.
10. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
11. *Варченко А. Н.* О препятствиях к локальной эквивалентности распределений // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 6. С. 939–947.
12. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
13. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differential Geometry. 1985. V. 21. P. 35–45.
14. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
15. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
16. *Liu W., Sussmann H. J.* Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions // Mem. Amer. Math. Soc. 1995. V. 118, N 564. P. 1–100.
17. *Montgomery R.* Survey of singular geodesics Sub-Riemannian geometry // Progr. Math. 1996. V. 144. P. 325–339.
18. *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 1–5.
19. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
20. *Capogna L., Garofalo N.* Nontangentially accessible domains for Carnot–Carathéodory metrics and a Fatou type theorem // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1995. V. 321, N 12. P. 1565–1570.
21. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of non-negative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot–Carathéodory metrics // Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, N 4. P. 403–432.
22. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; 28).
23. *Metivier G.* Fonction spectrale et valeurs proposes d'une classe d'operateurs // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 479–519.
24. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
25. *Rothchild L. P., Stein E. S.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
26. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
27. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.
28. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
29. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
30. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 28 июня 2004 г., окончательный вариант — 26 июня 2006 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru