Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ ДОБАВЛЕНИЯМИ К ПРИМИТИВНЫМ ПОДГРУППАМ

В. С. Монахов

Аннотация: На основе результатов, использующих классификацию простых групп, устанавливается разрешимость конечной группы с холловыми разрешимыми добавлениями к примитивным подгруппам, а если эти добавления дисперсивны по Оре, то доказывается, что сама группа дисперсивна по Оре.

Ключевые слова: конечная группа, примитивная подгруппа, добавление, дисперсивная группа, холлова подгруппа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Подгруппу H группы G называют *примитивной подгруппой*, если H отлична от пересечения всех тех подгрупп группы G, которые содержат подгруппу H в качестве собственной подгруппы. Ясно, что каждая максимальная подгруппа примитивна, а подгруппа Фраттини не примитивна ни в какой группе, за исключением циклических примарных групп.

В 1971 г. Джонсон [1] установил сверхразрешимость группы с примарными индексами примитивных подгрупп. В этой же работе поставлен вопрос о строении группы, в которой отсутствуют немаксимальные примитивные подгруппы. С помощью классификации простых групп А. С. Кондратьев [2] установил разрешимость группы, в которой каждая собственная подгруппа совпадает с пересечением некоторых максимальных подгрупп. Поскольку каждая подгруппа совпадает с пересечением некоторых примитивных подгрупп (см. лемму 5) и в разрешимой группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы, то группа, в которой каждая примитивная подгруппа максимальна, будет сверхразрешимой (см. лемму 6).

В настоящей заметке изучаются группы с известным строением добавлений к примитивным подгруппам. На основе результатов, использующих классификацию конечных простых групп, устанавливается разрешимость группы с холловыми разрешимыми добавлениями к примитивным подгруппам, а если эти добавления дисперсивны по Оре, то доказывается, что сама группа дисперсивна по Оре.

Работа выполнена при финансовой поддержке Болорусского фонда фундаментальных исследований (коды проектов Ф04МС–060, Ф05–341).

1. Вспомогательные утверждения

Напомним, что *добавлением к подгруппе A в группе G* называется подгруппа B такая, что $G = AB$. Пусть ϕ — некоторое упорядочение простых чисел. Запись $p\phi q$ означает, что p предшествует q в упорядочении ϕ, $p \neq q$. Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ называется *ϕ-дисперсивной*, если $p_1 \phi p_2 \phi \dots \phi p_n$, и для любого i в G есть нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$, т. е. группа G имеет нормальный ряд

$$E < G_1 < G_2 < \dots < G_{n-1} < G, \qquad (*)$$

где

$$|G_1| = p_1^{\alpha_1}, |G_2| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \dots , |G_i| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}, \dots, |G_{n-1}| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

В этом случае у ряда $(*)$ факторы изоморфны силовским подгруппам:

$$G_1/E \simeq G_{p_1}, \ G_2/G_1 \simeq G_{p_2}, \dots, G_n/G_{n-1} \simeq G_{p_n}.$$

В частности, ϕ-дисперсивная группа G p_1-замкнута и p_n-нильпотентна.

Если упорядочение ϕ таково, что $p\phi q$ всегда влечет $p > q$, то ϕ-дисперсивная группа называется *дисперсивной по Оре*. В частности, дисперсивная по Оре группа G p-замкнута для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего простого $q \in \pi(G)$.

Дисперсивной группой называют группу, являющуюся ϕ-дисперсивной для некоторого ϕ. Ясно, что каждая дисперсивная группа обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Поэтому каждая дисперсивная группа разрешима.

Нам потребуются следующие обозначения и термины: символы $A \leq G$, $A < G$, $A <_{\max} G$, $A <_{\rm prim} G$ соответственно означают, что A — подгруппа группы G, собственная подгруппа группы G (т. е. $A \leq G$ и $A \neq G$), максимальная подгруппа группы G, примитивная подгруппа группы G, (т. е. $A < \bigcap\limits_{A<X\leq G} X$); $\mathrm{core}_G(A) = \bigcap\limits_{g\in G} A^g$ — ядро подгруппы A в группе G; $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G; p и q — простые числа; p-замкнутая группа — группа с нормальной силовской p-подгруппой; q-нильпотентная группа — группа порядка $q^n m, q$ не делит m, с нормальной подгруппой порядка m; E — единичная группа; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G — произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G — пересечение всех максимальных подгрупп группы G, если $G \neq E$, и $\Phi(E) = E$; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G; $O^q(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой фактор-группа $G/O^q(G)$ является q-группой; $G = [A]B$ — полупрямое произведение с нормальной подгруппой A; примарное число — это число, являющееся степенью некоторого простого числа; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{D}$ — класс всех дисперсивных по Оре групп; если π — некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$.

Остальные обозначения и определения понятны из текста и соответствуют [3, 4].

В доказательстве следующего результата использовалась классификация конечных простых групп.

Лемма 1 [5, теорема 1.5]. *Если в группе G любая максимальная подгруппа обладает разрешимым добавлением, то каждый главный фактор группы G либо примарен, либо изоморфен $PSL(2, q)$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$.*

Лемма 2. *Если в простой группе G любая максимальная подгруппа обладает разрешимым добавлением, то G изоморфна $PSL(2, 7)$ или $PSL(2, 11)$.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно проверить только группы $PSL(2, q)$, $q \in \{5, 7, 9, 11\}$. Будем использовать теорему II.8.27 из [3]. В группе $PSL(2, 5)$ имеется максимальная подгруппа порядка 6, добавлением к которой может быть только сама группа. В группе $PSL(2, 7)$ максимальные подгруппы имеют индексы 7 или 8, поэтому в ней максимальные подгруппы имеют примарные холловы добавления. В группе $PSL(2, 9) \simeq A_6$ максимальная подгруппа S_4 не имеет разрешимого добавления. В группе $PSL(2, 11)$ максимальные подгруппы являются холловыми подгруппами порядков 12, 55 или 60, а дополнения к ним — примарными или бипримарными холловыми подгруппами порядков 55, 12 или 11 соответственно. Таким образом, только в простых группах $PSL(2, 7)$ и $PSL(2, 11)$ каждая максимальная подгруппа обладает разрешимым добавлением.

Лемма 3. *Если A и N — подгруппы группы G, причем A холлова, а N нормальна, то $\pi(A \cap N) = \pi(A) \cap \pi(N)$.*

Доказательство. Поскольку $A \cap N$ — подгруппа в A и в N, то $\pi(A \cap N) \subseteq \pi(A) \cap \pi(N)$. Пусть $p \in \pi(A) \cap \pi(N)$ и A_p — силовская p-подгруппа из A. Тогда A_p — силовская p-подгруппа группы G и $A_p \cap N = N_p$ является силовской p-подгруппой группы N. Поэтому $N_p \subseteq A \cap N$ и $p \in \pi(A \cap N)$.

Лемма 4. *Пусть A, B и N — подгруппы группы G, причем A холлова, а N нормальна. Если $G = AB$, то $N = (N \cap A)(N \cap B)$.*

Доказательство. Так как $|G| = |A||B|/|A \cap B|$ и $|BN| = |B||N|/|B \cap N|$, то

$$|G : B| = |A : A \cap B| = |G : BN||BN : B| = |G : BN||N : N \cap B|$$

и $\pi(N : N \cap B) \subseteq \pi(A) \cap \pi(N) = \pi(A \cap N)$ в силу леммы 3. Поскольку A — холлова подгруппа группы G, то $N \cap A$ будет холловой подгруппой в N и $N = (N \cap A)(N \cap B)$.

Лемма 5. (1) *Если $H <_{\max} G$, то $H <_{\mathrm{prim}} G$;*

(2) *если $H <_{\mathrm{prim}} G$, то $H^x <_{\mathrm{prim}} G$ для всех $x \in G$;*

(3) *если $H <_{\mathrm{prim}} G$ и $H < K$, то $H <_{\mathrm{prim}} K$;*

(4) *каждая собственная подгруппа группы G является пересечением некоторых примитивных подгрупп группы G;*

(5) *если $A <_{\mathrm{prim}} B \leq G$, то существует $K <_{\mathrm{prim}} G$ такая, что $B \cap K = A$.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) очевидны.

(4) Воспользуемся индукцией по индексам подгрупп. Предположим противное, и пусть H — собственная подгруппа наименьшего индекса, не являющаяся пересечением примитивных подгрупп. Тогда подгруппа H не примитивна, поэтому $H = X_1 \cap \dots \cap X_m$, $H < X_i$, $i = 1, \dots, m$. Так как $|G : X_i| < |G : H|$, то по индукции $X_i = X_{i1} \cap \dots \cap X_{is}$, где все X_{ij} — примитивные подгруппы. Следовательно, подгруппа H совпадает с пересечением примитивных подгрупп X_{ij}.

(5) Пусть $A <_{\mathrm{prim}} B \leq G$. Согласно (4) существуют примитивные подгруппы $B_1, \dots, B_m$ такие, что $A = \bigcap\limits_{i=1}^{m} B_i$. Поэтому $A = B \cap A = B \cap B_1 \cap \dots \cap B \cap B_m$. Так как $A <_{\mathrm{prim}} B$, то $A < \bigcap\limits_{A<X\leq B} X$. Поэтому $A = B \cap B_i$ для некоторого i.

Лемма 6. *Группа, в которой каждая примитивная подгруппа максимальна, является сверхразрешимой.*

Доказательство. Пусть G — группа, в которой каждая примитивная подгруппа максимальна. По лемме 5 каждая подгруппа группы G совпадает с пересечением некоторых максимальных подгрупп из G. По теореме Кондратьева [2] группа G разрешима. Теперь в G каждая примитивная подгруппа имеет примарный индекс и G сверхразрешима по теореме Джонсона [1]. Лемма доказана.

Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ называется *наследственным классом*, если из условий: $G \in \mathfrak{F}$, H — подгруппа группы G, следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Если из условий: $G \in \mathfrak{F}$, N — нормальная подгруппа группы G, следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$, то класс $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом.*

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственный гомоморф и N — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что каждая примитивная подгруппа группы G обладает холловым добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *каждая примитивная в N подгруппа обладает холловым в N добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$;*

(2) *каждая примитивная в G/N подгруппа обладает холловым в G/N добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. (1) Пусть A — примитивная подгруппа в N. Если подгруппа A примитивна в G, то существует холлова подгруппа $K \in \mathfrak{F}$ такая, что $G = AK$. Теперь $N = A(N \cap K)$, где $N \cap K$ — холлова подгруппа в N и $N \cap K \in \mathfrak{F}$, поскольку класс $\mathfrak{F}$ наследственный. Пусть подгруппа A не примитивна в группе G. По лемме 5 существует примитивная в G подгруппа B такая, что $A = N \cap B$. По условию найдется холлова в G подгруппа $H \in \mathfrak{F}$ такая, что $G = BH$. По лемме 4 $N = (N \cap B)(N \cap H) = A(N \cap H)$. Поскольку $N \cap H$ — холлова подгруппа в N и класс $\mathfrak{F}$ наследственный, то $N \cap H \in \mathfrak{F}$.

(2) Если U/N — примитивная подгруппа группы G, то U — примитивная подгруппа группы G. Поэтому существует холлово добавление $V \in \mathfrak{F}$ к подгруппе U в группе G. Теперь $G/N = (U/N)(VN/N)$, VN/N — холлова подгруппа группы G/N и $VN/N \simeq V/V \cap N \in \mathfrak{F}$, поскольку $\mathfrak{F}$ — гомоморф.

Лемма 8. *Пусть G — группа, $p \in \pi(G)$, P — силовская p-подгруппа группы G и $M <_{\max} P$. Предположим, что либо p наименьшее в $\pi(G)$, либо группа G p-разрешима. Тогда в группе G существует подгруппа K такая, что*

(1) *$K <_{\mathrm{prim}} G$, $M = P \cap K$ и M силовская в K;*

(2) *$|G : K| = pm$ и p не делит m;*

(3) *$|N_G(M) : N_G(M) \cap K| = p$.*

Доказательство. Пусть $N = N_G(M)$. Предположим, что $|P| = p$. Если p наименьшее в $\pi(G)$, то в группе G имеется подгруппа индекса p по теореме IV.2.8 из [3], которая будет примитивной, поскольку она максимальна в группе G. Если группа G p-разрешима, то p'-холлова подгруппа будет иметь индекс p, поэтому она будет максимальной подгруппой, а значит, и примитивной.

Таким образом, при $|P| = p$ p'-холлова подгруппа группы G будет примитивной подгруппой, обладающей свойствами (1)–(3).

Пусть теперь $|P| > p$, т. е. $M \neq E$. В фактор-группе N/M имеется подгруппа C/M индекса p в первом случае по теореме IV.2.8 из [3], а во втором — по теореме VI.1.7 из [3]. Теперь $C <_{\mathrm{prim}} N$, а по лемме 5 существует $K <_{\mathrm{prim}} G$ такая, что $C = N \cap K$. Допустим, что p не делит $|G : K|$. Пусть T — силовская p-подгруппа в K, содержащая M. Так как $|P : M| = |T : M| = p$, то $M \triangleleft T$ и $T \leq N$. Но тогда $T \leq K \cap N = C$, что невозможно. Следовательно, p делит $|G : K|$. Поскольку $M \leq C = N \cap K$, то p^2 не делит $|G : K|$. Ясно, что подгруппа K обладает свойствами (1)–(3).

Лемма 9. *Пусть $H <_{\mathrm{prim}} G$ и $\pi \subseteq \pi(G)$. Тогда*
(1) *если $O_\pi(G)$ не содержится в H, то $O_{\pi'}(G) \subseteq H$;*
(2) *индекс подгруппы H в $F(G)H$ примарен.*

Доказательство. (1) Пусть $O_\pi(G)$ не содержится в H. Предположим, что $O_{\pi'}(G)$ не содержится в H. Тогда H — собственная подгруппа в $HO_\pi(G)$ и в $HO_{\pi'}(G)$. Если $HO_\pi(G) = HO_{\pi'}(G)$, то

$$|O_\pi(G) : H \cap O_\pi(G)| = |O_{\pi'}(G) : H \cap O_{\pi'}(G)| = 1,$$

откуда следует, что $O_\pi(G) \subseteq H$ и $O_{\pi'}(G) \subseteq H$. Имеем противоречие с условием леммы. Значит, $HO_\pi(G)$ и $HO_{\pi'}(G)$ — две различные подгруппы группы G, содержащие H в качестве собственной подгруппы. Пусть $K = HO_\pi(G) \cap HO_{\pi'}(G)$. По тождеству Дедекинда $K = H(K \cap O_\pi(G)) = H(K \cap O_{\pi'}(G))$. Но теперь индекс

$$|K : H| = |K \cap O_\pi(G) : H \cap O_\pi(G)| = |K \cap O_{\pi'}(G) : H \cap O_{\pi'}(G)|$$

должен быть одновременно π-числом и π'-числом. Это возможно лишь в случае, когда $|K : H| = 1$, т. е. $H = K$. Получили противоречие с примитивностью подгруппы H.

(2) Предположим, что $F(G)H \neq H$. Тогда $O_p(G)$ не содержится в H для некоторого $p \in \pi(G)$. Из (1) следует, что $O_{p'}(F(G)) \subseteq H$ и $|F(G)H : H|$ есть степень числа p.

Пример 1. В группе $G = S_3 \times S_3$, где S_3 — симметрическая группа степени 3, существует ненормальная подгруппа H порядка 3. Эта подгруппа будет примитивной в группе G. Группа G имеет две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 порядка 3, причем $N_1 \cap H = N_2 \cap H = E$. Поэтому в лемме 9 подгруппы $O_\pi(G)$ и $O_{\pi'}(G)$ нельзя заменить минимальными нормальными подгруппами группы G.

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 10. *Если $p \in \pi(G)$ — наименьшее простое число, то каждая подгруппа индекса p нормальна в группе G.*

Доказательство. Пусть $H \leq G$, $|G : H| = p$. Тогда для любого $x \in G$ имеем $G \neq HH^x$ по лемме VI.4.5 из [3], поэтому $|G| = |H|p > |HH^x| = |H||H^x|/|H \cap H^x|$ и $p > |H|/|H \cap H^x|$. Из минимальности p следует, что $H = H \cap H^x$, т. е. $H \triangleleft G$.

Лемма 11 [3, гл. III]. *Пусть G — разрешимая неединичная группа. Тогда*
(1) *$\Phi(G) \leq F(G)$ и $\Phi(G) \neq F(G)$;*
(2) *$F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$;*

(3) $C_G(F(G)) \leq F(G)$;

(4) *фактор-группа* $F(G)/\Phi(G)$ *есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы* $G/\Phi(G)$.

Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром $\operatorname{core}_G M = E$, то группу G называют *примитивной*, а подгруппу M — ее *примитиватором* (см. [6]).

Лемма 12 [6, теорема I.8; 3, теорема II.3.2]. *Пусть* G — *примитивная разрешимая группа с примитиватором* M. *Тогда*

(1) $\Phi(G) = E$;

(2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ *и* $F(G)$ *является элементарной абелевой* p-*группой порядка* p^n *для некоторого простого* p;

(3) *в группе* G *единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с* $F(G)$;

(4) $G = [F(G)]M$ *и* $O_p(M) = E$;

(5) M *изоморфна неприводимой подгруппе группы* $GL(n,p)$.

Следующие определения и обозначения соответствуют принятым в [4, 6]. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом группы* G. *Произведением формаций* $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{Y}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{X}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \leq \Phi(G)$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Лемма 13. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *насыщенная формация и* G — *разрешимая группа. Предположим, что* G *не принадлежит* $\mathfrak{F}$, *но* $G/N \in \mathfrak{F}$ *для всех неединичных нормальных подгрупп* N *группы* G. *Тогда* G — *примитивная группа.*

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 14. (1) *Класс всех* p-*замкнутых групп является наследственной насыщенной формацией.*

(2) *Если* $G/O_p(G)$ p-*замкнута, то* G p-*замкнута.*

(3) *Класс всех* q-*нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией.*

(4) *Если* $G/O^q(G)$ q-*нильпотентна, то* G q-*нильпотентна.*

Доказательство. Утверждения (1) и (3) см. в [4, с. 33, 35]. Утверждения (2) и (4) легко выводятся из соответствующих определений.

Лемма 15. (1) *Для любого фиксированного упорядочения* ϕ *простых чисел класс* $\mathfrak{D}_\phi$ *всех* ϕ-*дисперсивных групп является наследственной насыщенной формацией. В частности, класс* $\mathfrak{D}$ *всех дисперсивных по Оре групп является наследственной насыщенной формацией.*

(2) *Пусть* p — *наибольший простой делитель порядка группы* G. *Если* $G/O_p(G)$ *дисперсивна по Оре, то* G *дисперсивна по Оре.*

(3) *Пусть* q — *наименьший простой делитель порядка группы* G. *Если* $O^q(G)$ *дисперсивна по Оре, то* G *дисперсивна по Оре.*

Доказательство. Утверждение (1) см. в [4, с. 35]. Утверждения (2), (3) легко выводятся из соответствующих определений.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимый наследственный гомоморф такой, что $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Включение $G \in \mathfrak{F}$ имеет место тогда и только тогда, когда каждая примитивная подгруппа обладает холловым добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$ и X — примитивная подгруппа группы G, то в качестве холлова добавления к примитивным подгруппам можно брать всю группу.

Обратно, пусть в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым добавлением, принадлежащим $\mathfrak{F}$. По лемме 7 условия теоремы наследуются всеми фактор-группами группы G и всеми нормальными подгруппами группы G.

Предположим, что группа G не простая. Тогда существует неединичная нормальная подгруппа $N \neq G$. По индукции $N \in \mathfrak{F}$, $G/N \in \mathfrak{F}$, а так как $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, G — простая группа. По лемме 8 в G существует примитивная подгруппа A индекса $2m$, где m — нечетное число. По условию теоремы существует холлова подгруппа $B \in \mathfrak{F}$ такая, что $G = AB$. Так как максимальные подгруппы примитивны, то по условию теоремы каждая максимальная подгруппа группы G имеет холлово добавление, принадлежащее разрешимому классу $\mathfrak{F}$. По лемме 2 получаем, что G изоморфна $PSL(2,7)$ или $PSL(2,11)$. Так как в $PSL(2,7)$ все собственные подгруппы разрешимы, то примитивная подгруппа A индекса $2m$, m нечетное, либо имеет порядок 4, либо изоморфна A_4. Теперь разрешимая холлова подгруппа B должна либо совпасть с $PSL(2,7)$, либо иметь индекс 3 в $PSL(2,7)$. Оба случая невозможны. Поэтому изоморфизм $G \simeq PSL(2,7)$ исключается. В группе $PSL(2,11)$ примитивная подгруппа A индекса $2m$, m нечетное, должна иметь порядок $2n$, n нечетно, поэтому $|A|$ равно 2, 6 или 10. Но группа $PSL(2,11)$ не обладает факторизацией $PSL(2,11) = AB$, где $|A|$ равно 2, 6 или 10, а подгруппа B разрешима. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{F}$ — класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, получаем

Следствие 1.1. *Группа разрешима тогда и только тогда, когда все ее примитивные подгруппы имеют разрешимые холловы добавления.*

Если $\mathfrak{F}$ — класс $\mathfrak{S}_{2'}$ всех групп нечетного порядка, получаем

Следствие 1.2. *Порядок группы нечетен тогда и только тогда, когда все ее примитивные подгруппы имеют холловы добавления нечетного порядка.*

Теорема 2. *Пусть G — группа, $p, q \in \pi(G)$, p наибольшее, а q наименьшее.*

(1) *Группа G разрешима и p-замкнута тогда и только тогда, когда каждая ее примитивная подгруппа обладает разрешимым p-замкнутым холловым добавлением.*

(2) *Группа G q-нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее примитивная подгруппа обладает q-нильпотентным холловым добавлением.*

(3) *Группа G дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда каждая ее примитивная подгруппа обладает холловым дисперсивным по Оре добавлением.*

Доказательство. (1) Если разрешимая группа G p-замкнута, то в качестве холловых p-замкнутых добавлений к ее примитивным подгруппам можно брать всю группу G.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ — класс всех p-замкнутых разрешимых групп, и пусть в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым добавлением, принадлежащим классу $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$. По теореме 1 группа G разрешима. По лемме 7 и по индукции все собственные нормальные подгруппы группы G и все отличные от G фактор-группы группы G принадлежат классу $\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$.

Если $O_p(G) \neq E$, то по индукции группа $G/O_p(G)$ p-замкнута, а по лемме 14 и сама группа G p-замкнута. Значит, следует считать, что $O_p(G) = E$. В силу лемм 13 и 14 группа G примитивна, поэтому $G = [F(G)]M$, где $F(G) = O_q(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа, $p \neq q$, подгруппа M максимальна в группе G и $O_q(M) = E$ по лемме 12. Так как $M \simeq G/F(G)$ p-замкнута, то $PF(G)/F(G)$ нормальна в $G/F(G)$, где P — силовская p-подгруппа группы G. Если $PF(G)$ отлична от G, то по лемме 7 подгруппа $PF(G)$ p-замкнута, поскольку $PF(G)$ нормальна в G. Но теперь подгруппа P нормальна в $PF(G)$ и $P \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$, что противоречит лемме 11. Следовательно, $P = M$. Если z — элемент простого порядка из центра подгруппы P, то подгруппа $\langle z\rangle F(G)$ нормальна в G, и если $\langle z\rangle F(G) \neq G$, то подгруппа $\langle z\rangle F(G)$ p-замкнута по индукции. Поэтому $\langle z\rangle$ нормальна в $\langle z\rangle F(G)$ и $\langle z\rangle \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$, что противоречит лемме 11. Следовательно, $|M| = p$ и $|G| = pq^n$, $q^n = |F(G)|$. Если $n = 1$, то $|G| = pq$, $p > q$, и G p-замкнута по лемме 10. Пусть $n > 1$. По лемме 8 в группе G существует примитивная подгруппа X индекса qm, q не делит m. Если $m = 1$, то силовская q-подгруппа из X будет неединичной нормальной подгруппой в G; противоречие с тем, что силовская q-подгруппа $F(G)$ группы G является минимальной нормальной подгруппой. Если $m \neq 1$, то $m = p$ и холлово p-замкнутое добавление к примитивной подгруппе X совпадет с группой G.

(2) Ясно, что q-нильпотентная группа G будет разрешимой при $q \in \pi(G)$, q наименьшее. Если группа G q-нильпотентна, то в качестве холловых q-нильпотентных добавлений к ее примитивным подгруппам можно брать всю группу G.

Обратно, пусть $\mathfrak{S}_{q'}\mathfrak{N}_q$ — класс всех q-нильпотентных групп, и пусть в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым добавлением, принадлежащим классу $\mathfrak{S}_{q'}\mathfrak{N}_q$. По теореме 1 группа G разрешима. По лемме 7 и по индукции все собственные нормальные подгруппы группы G и все отличные от G фактор-группы группы G принадлежат классу $\mathfrak{S}_{q'}\mathfrak{N}_q$. Пусть $\pi = \pi(G) \setminus \{q\}$.

Если $O_\pi(G) \neq E$, то по индукции группа $G/O_\pi(G)$ q-нильпотентна, поэтому и сама группа G q-нильпотентна. Значит, следует считать, что $O_\pi(G) = E$. В силу лемм 13 и 14 группа G примитивна, поэтому $G = [F(G)]M$, где $F(G) = O_q(G)$ — единственная в G минимальная нормальная подгруппа, подгруппа M максимальна в группе G и $O_q(M) = E$ по лемме 12. Так как $M \simeq G/F(G)$ q-нильпотентна, то $KF(G)/F(G)$ нормальна в $G/F(G)$, где K — холлова π-подгруппа группы G. Если $KF(G)$ отлична от G, то по лемме 7 подгруппа $KF(G)$ q-нильпотентна, поскольку $KF(G)$ нормальна в G. Но теперь подгруппа K нормальна в $KF(G)$ и $K \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$; противоречие. Следовательно, $K = M$. Если $K_1 \neq E$ — максимальная нормальная подгруппа из K, то подгруппа $K_1F(G)$ нормальна в G и $K_1F(G)$ q-нильпотентна по индукции. Поэтому K_1 нормальна в $K_1F(G)$ и $K_1 \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$, противоречие. Следовательно, $|M| = p$ и $|G| = pq^n$, $n \in \mathbb{N}$. По лемме 8 в группе G существует примитивная подгруппа X индекса qm, q не делит m. Если $m \neq 1$, то $m = p$, $|X| = q^{n-1}$ и холлово q-нильпотентное добавление к примитивной подгруппе

X совпадет с группой G. Если $m = 1$, то силовская q-подгруппа Q из X будет нормальной в G. Так как $F(G) = O_q(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $Q = E$ и $|G| = pq$, $p > q$. Значит, группа G q-нильпотентна.

(3) Если группа G дисперсивна по Оре, то в качестве холлова дисперсивного по Оре добавления можно брать всю группу G.

Обратно, пусть в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым дисперсивным по Оре добавлением. По теореме 1 группа G разрешима, а по (1) группа G p-замкнута для наибольшего $p \in \pi(G)$. По лемме 7 и по индукции группа $G/O_p(G)$ дисперсивна по Оре, а по лемме 15 группа G дисперсивна по Оре. Теорема доказана.

Поскольку сверхразрешимые группы дисперсивны по Оре, из теоремы 2 получаем

Следствие 2.1. *Группа, в которой все примитивные подгруппы обладают сверхразрешимыми холловыми добавлениями, дисперсивна по Оре.*

Следствие 2.2. *В группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым нильпотентным добавлением тогда и только тогда, когда каждая примитивная подгруппа имеет примарный индекс. В частности, если в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым нильпотентным добавлением, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая примитивная подгруппа обладает холловым нильпотентным добавлением. По теореме 2 группа G дисперсивна по Оре, поэтому силовская p-подгруппа P для наибольшего $p \in \pi(G)$ нормальна в группе G. Пусть H — примитивная подгруппа группы G. По индукции можно считать, что $\mathrm{core}_G(H) = E$. Из леммы 9 следует, что $F(G) = P$, а из леммы 11 заключаем, что $C_G(P) \subseteq P$. Так как по условию подгруппа H обладает холловым нильпотентным добавлением K и $P \subseteq K$, то $P = K$ и индекс подгруппы H в группе G примарен. В частности, по теореме из [1] группа G сверхразрешима.

Обратно, если в группе G каждая примитивная H подгруппа имеет примарный индекс $|G : H| = p^n$, то $G = HP$, где P — силовская p-подгруппа группы G, и подгруппа H имеет в группе G холлово нильпотентное добавление.

Это следствие обобщает теорему Джонсона [1].

Пример 2. В симметрической группе S_3 каждая примитивная подгруппа обладает нильпотентным холловым добавлением, но сама группа S_3 не ϕ-дисперсивна для упорядочения $2\phi3$. Поэтому в теореме 2 условие дисперсивности по Оре нельзя заменить условием ϕ-дисперсивности при произвольным упорядочении ϕ. Этот же пример показывает, что в теореме 2 каждое из требований: p наибольшее, q наименьшее, не является лишним.

Пример 3. По теореме 1 из [7] существует минимальная несверхразрешимая группа $G = [[\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle]\langle b\rangle]\langle c\rangle$; $a_1^7 = a_2^7 = b^3 = c^2 = e$, $a_1^b \in \langle a_1\rangle$, $a_2^b \in \langle a_2\rangle$, $a_1^c = a_2$, $a_2^c = a_1$, порядка $2 \cdot 3 \cdot 7^2$. Предположим, что существует подгруппа $A \leq (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle)$ такая, что $N_G(A) = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$. Тогда класс сопряженных с A подгрупп насчитывает шесть подгрупп. Класс сопряженных с $\langle a_1\rangle$ подгрупп состоит из двух подгрупп, а класс сопряженных с $\langle a_1a_2\rangle$ подгрупп — из трех подгрупп. Все эти подгруппы различны. Но в группе G всего восемь подгрупп порядка 7; противоречие. Значит, допущение неверно, и $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ — собственная подгруппа в нормализаторе каждой своей подгруппы. Это означает, что в группе G каждая подгруппа порядка 7 не примитивна. Поэтому все примитивные подгруппы в этой группе имеют сверхразрешимые холловы добавления, но сама группа не сверхразрешима. Следовательно, группа со сверхразрешимыми холловыми добавлениями к примитивным подгруппам не обязана быть сверхразрешимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Johnson D. L.* A note on supersoluble groups // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 3. P. 562–564.
2. *Кондратьев А. С.* Разрешимость конечных коатомических групп // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 92–97.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Baumeister B.* A characterization of finite soluble groups // Arch. Math. 1999. V. 72, N 3. P. 167–176.
6. *Gaschutz W.* Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups. Canberra: Australian National Univ., 1979. (Notes Pure Math.; N 11).
7. *Нагребецкий В. Т.* О конечных минимальных несверхразрешимых группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 104–108.

Статья поступила 10 ноября 2005 г.

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет, кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
monakhov@gsu.unibel.by