Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 519.725

О ДИСТАНЦИОННОЙ НЕРЕГУЛЯРНОСТИ КОДОВ ПРЕПАРАТЫ

Ф. И. Соловьева, Н. Н. Токарева

Аннотация: Показано, что среди всех кодов Препараты только код длины 16 дистанционно регулярен; аналогичный результат справедлив для кодов, полученных выкалыванием любой координаты кода Препараты (только код длины 15 является дистанционно регулярным).

Ключевые слова: Коды Препараты, совершенные коды, дистанционно регулярные коды, группы автоморфизмов кодов.

1. Введение

Пусть E^n обозначает n-мерное метрическое пространство всех двоичных векторов длины n с метрикой Хэмминга. *Расстояние Хэмминга* $d(x, y)$ между векторами x и y равно числу координат, в которых они различаются. *Весом* $w(x)$ произвольного вектора x называется расстояние от него до нулевого вектора. Подмножество пространства E^n мощности M с минимальным расстоянием d между его различными элементами называется *двоичным* (n, M, d)*-кодом*. Элементы кода будем называть *кодовыми словами*.

Для (n, M, d)-кода с нечетным кодовым расстоянием определяется операция *расширения* путем добавления общей проверки на четность: отобразим E^n в E^{n+1} по правилу

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \left(x_1, \dots, x_n, \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

где сумма рассматривается по модулю 2. Образ исходного кода при этом отображении называется *расширенным кодом* и имеет параметры $(n + 1, M, d + 1)$. Операция, обратная расширению, называется *выкалыванием* и заключается в удалении одной или нескольких координат в каждом кодовом слове. Код, полученный таким образом из исходного, называется *выколотым* и, вообще говоря, существенно зависит от выбора удаленных координат. Подробнее о способах построения новых кодов из заданных см. книгу [1].

Код называется *дистанционно инвариантным*, если число кодовых слов на расстоянии i от кодового слова x не зависит от выбора x, а зависит только от i. Обобщением приведенного свойства является *сильная дистанционная инвариантность*. В коде с таким свойством число пар кодовых слов x, y таких, что

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Шведской Королевской академии наук. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке в рамках интеграционного проекта СО РАН N35 «Древовидный каталог математических Интернет-ресурсов».

$d(x,y)=k$ и $d(x,z)=i$, $d(y,z)=j$ для любого кодового слова z, зависит только от чисел i,j,k и не зависит от выбора z. Еще более сильным свойством кода является свойство *дистанционной регулярности*: для любых кодовых слов x, y и любых целых чисел i, j число кодовых слов z таких, что $d(x,z)=i$, $d(y,z)=j$, не зависит от выбора векторов x, y и зависит только от $d(x,y)$ и чисел i,j. Нетрудно видеть, что любой дистанционно регулярный код является сильно дистанционно инвариантным (а следовательно, и дистанционно инвариантным).

Дистанционная регулярность, наряду с дистанционной инвариантностью и сильной дистанционной инвариантностью, отражает определенные структурные свойства кода, которые тесно связаны с группами автоморфизмов и группами симметрий кодов, с эквивалентностью и изометричностью кодов. Дистанционно регулярные коды могут быть полезны при исследовании восстановимости кода по некоторой его части (например, по известным кодовым словам на сфере или в некоторой грани), а также для изучения и построения кодов с большими кодовыми расстояниями. Рассмотрение дистанционно регулярных кодов представляет естественный вопрос в теории кодирования и первоначально инициировано исследованиями важного класса дистанционно регулярных графов (см. книги [2] и [3]). Следует отметить также тесную связь дистанционно регулярных кодов с метрическими схемами отношений (см. [2], а также [1, гл. 21]).

Исследованию свойства дистанционной регулярности кодов посвящено небольшое число публикаций. Известно, что дистанционно регулярными являются следующие двоичные коды: четно-весовой код произвольной длины; бесконечный класс кодов Адамара (см. [4]); коды Кердока (см. [2]); расширенный код Голея и коды, полученные из него однократным, двукратным (см. [4]), а также трехкратным укорочениями (см. работу С. Топаловой [5]); код Голея и коды, полученные из него выкалыванием одной или двух координат (см. [5]). Дистанционная регулярность q-значных кодов, $q>2$, изучена очень мало. Известно лишь, что троичный код Голея и укороченный код Голея дистанционно регулярны (см. [4]).

В [6] установлено, что все двоичные совершенные коды с кодовым расстоянием 3 не являются дистанционно регулярными, за исключением кодов Хэмминга длин 3 и 7. Аналогично доказывается, что расширенные двоичные совершенные коды с кодовым расстоянием 4, кроме расширенных кодов Хэмминга длин 4 и 8, не дистанционно регулярны (см. [7]). Заметим, что согласно работам А. Ю. Васильевой [8] и [9] все двоичные совершенные коды и коды Препараты являются сильно дистанционно инвариантными. Несколько кодов, полученных из расширенного кода Голея выкалыванием координат или укорочениями, не являются дистанционно регулярными, при этом существуют два неэквивалентных укороченных кода длины 18, один из которых обладает свойством дистанционной регулярности, а другой — нет (см. [5]).

В настоящей работе показано, что среди всех кодов Препараты только код длины 16 дистанционно регулярен; произвольный код, полученный выкалыванием любой координаты кода Препараты длины больше 15, не является дистанционно регулярным. Выколотый код Препараты длины 15 дистанционно регулярен.

2. Дистанционная регулярность и коды Препараты

Всюду далее без ограничения общности будем рассматривать только *приведенные коды*, т. е. коды, содержащие нулевой вектор. Для доказательства дистанционной регулярности кода Препараты длины 16 потребуется некоторая связь группы автоморфизмов и группы симметрий произвольного кода со свойством его дистанционной регулярности.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(C)$ двоичного кода C длины n состоит из всех изометрий пространства E^n (комбинаций подстановок на n координатах и сдвигов на векторы пространства), переводящих код в себя, т. е.

$$\mathrm{Aut}(C) = \{(\pi, v) \mid \pi \in S_n, v \in E^n, v + \pi(C) = C\},$$

где S_n — группа подстановок длины n.

Группа симметрий $\mathrm{Sym}(C)$ определяется как множество всех подстановок на n координатах, оставляющих код на месте, т. е.

$$\mathrm{Sym}(C) = \{\pi \mid \pi \in S_n, \pi(C) = C\}.$$

Код C называется *транзитивным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве слов кода C. Два кода длины n *эквивалентны*, если существует изометрия пространства E^n, переводящая один код в другой.

Лемма 1. *Пусть группа симметрий* $\mathrm{Sym}(C)$ *транзитивного кода* C *действует транзитивно на каждом множестве кодовых слов фиксированного веса. Тогда код* C *дистанционно регулярен.*

Доказательство. Зафиксируем числа i, j, k из множества $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим пару кодовых слов x, y, расстояние между которыми равно k. Покажем, что число кодовых слов z таких, что $d(x, z) = i$, $d(y, z) = j$, не зависит от выбора x и y. В силу транзитивности кода можно без ограничения общности выбрать в качестве x нулевой вектор. Поскольку группа $\mathrm{Sym}(C)$ действует транзитивно на множестве кодовых слов веса k и каждая подстановка на n координатах является изометрией, то число кодовых слов z веса i, находящихся на расстоянии j от некоторого кодового слова y веса k, не зависит от выбора y. $\square$

Кодом Препараты называется произвольный максимальный двоичный код P длины $n = 2^m$ для четного $m \geq 4$ с кодовым расстоянием 6. Мощность такого кода равна $2^n/n^2$. Первую конструкцию таких кодов для каждой допустимой длины n предложил Препарата в 1968 г. (см. [10]). Используя специальные автоморфизмы поля Галуа $GF(n/2)$, И. И. Думер [11] и позднее Бакер, Ван Линт и Вилсон [12] построили серию попарно неэквивалентных кодов Препараты для каждой допустимой длины n. Коды Препараты выделяются рядом своих замечательных свойств. Н. В. Семаковым, В. А. Зиновьевым, Г. В. Зайцевым [13] показано, что после выкалывания любой координаты каждый такой код становится равномерно упакованным (в узком смысле) в пространстве E^{n-1}, единственным образом достраивается до совершенного кода с кодовым расстоянием 3 (см. [14]) и является, в некотором смысле, плотно упакованным в нем (см. [14], а также [15]). Напомним, что двоичным *совершенным кодом* с кодовым расстоянием 3 называется такой код, для которого шары радиуса 1 с центрами в кодовых словах образуют разбиение всего пространства.

В литературе кодом Препараты иногда называют максимальный двоичный код длины $n-1$ с кодовым расстоянием 5. Очевидно, что каждый такой код P' получается выкалыванием одной координаты некоторого кода P. Заметим, что операция расширения кода с помощью добавления проверки на четность, вообще говоря, не является взаимно обратной для операции выкалывания. Однако в случае совершенных кодов и кодов Препараты эти операции всегда взаимно обратны, что несложно следует из [13]. Таким образом, приведенные выше определения кода Препараты с кодовым расстоянием 6 эквивалентны.

Код Препараты с параметрами $(16, 256, 6)$, именуемый *кодом Нордстрома — Робинсона*, единствен с точностью до эквивалентности (см. [1, гл. 2]). Хорошо известно (см. [16]), что $(16, 256, 6)$-код является $\mathbb{Z}_4$-линейным и, следовательно, транзитивным. В работе [17] установлено, что каждое множество кодовых слов одного веса кода Нордстрома — Робинсона составляет одну орбиту под действием его группы симметрий. Следовательно, в силу леммы 1 справедливо

Утверждение 1. *Код Препараты длины* 16 *дистанционно регулярен.*

Замечание. Дистанционная регулярность расширенного двоичного совершенного кода длины 8 может быть показана с помощью леммы 1, поскольку означенный код удовлетворяет условиям этой леммы (см. также [6]).

Для доказательства того, что произвольный код Препараты длины $n > 16$ не является дистанционно регулярным, будет проведен анализ весового спектра кода (определение см. ниже), а точнее будет показано, что достаточно исследовать кодовые слова веса не более 8. Приведем необходимые обозначения и две леммы.

Пусть A_i обозначает число кодовых слов веса i кода Препараты длины n. Набор чисел $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ называется *весовым спектром* кода. Поскольку код Препараты имеет кодовое расстояние 6 и содержит нулевой вектор, справедливы равенства

$$A_0 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_4 = 0. \tag{1}$$

Согласно работе [13, теорема 5] для весового спектра произвольного кода Препараты при нечетных k, таких что $3 \le k \le n-3$, справедливо соотношение

$$b_k A_{k+3} + c_k A_{k+1} + c_{n-k} A_{k-1} + b_{n-k} A_{k-3} = 2(n-1)\binom{n}{k},$$

где $b_\ell = (\ell+1)(\ell+2)(\ell+3)$, $c_\ell = (\ell+1)(3\ell(n-\ell-1) + 2(n-1))$. Здесь $\binom{n}{k}$ обозначает число сочетаний без повторений из n элементов по k. Используя это соотношение при k, равном трем и пяти, а также равенства (1), можно получить значения

$$A_6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{360}, \tag{2}$$

$$A_8 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n^2-21n+95)}{8 \cdot 7 \cdot 360}. \tag{3}$$

В работе [13, см. следствие теоремы 7] установлено, что множество кодовых слов веса 6 кода Препараты длины n образует $3-(n, 6, (n-4)/3)$-схему, т. е. для любых трех различных координат a, b, c существуют в точности $(n-4)/3$ слов веса 6 кода Препараты с единицами в этих координатах. Для краткости тройку координат будем обозначать через (a, b, c) и говорить, что она *входит* в $(n-4)/3$ кодовых слов веса 6.

Лемма 2. *Пусть некоторое кодовое слово веса 6 произвольного кода Препараты длины n имеет ненулевые координаты p, q, a, b, c, e. Тогда число кодовых слов веса 6 с единицами в координатах p, q и нулями в координатах a, b, c, e равно*

$$\frac{n^2 - 22n + 108}{12}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что число кодовых слов веса 6, имеющих ненулевыми две фиксированные координаты p и q, равно $(n-2)(n-4)/12$. Действительно, число различных троек из n чисел, содержащих p и q, равно $n-2$. Каждая такая тройка входит в точности в $(n-4)/3$ кодовых слова веса 6. Число всех вхождений таких троек в кодовые слова веса 6 равно $(n-2)(n-4)/3$. Учитывая то, что в каждое кодовое слово веса 6 с ненулевыми координатами p и q входит ровно 4 различные тройки, содержащие p и q, получаем искомое число кодовых слов.

Определим теперь число кодовых слов веса 6, имеющих единицы в координатах p, q и нули в координатах a, b, c, e. Используем то, что каждая из троек (p, q, a), (p, q, b), (p, q, c), (p, q, e) входит ровно в $(n-4)/3$ кодовых слов веса 6 с единицами в координатах p и q. При этом существует только одно кодовое слово веса 6, в которое входит более одной (в точности все четыре) из этих троек. Поэтому искомое число кодовых слов веса 6, имеющих единицы в координатах p, q и нули в координатах a, b, c, e, равно

$$\frac{(n-2)(n-4)}{12} - \left(4 \cdot \frac{(n-7)}{3} + 1\right) = \frac{n^2 - 22n + 108}{12}. \quad \square$$

Следуя работе [6], обозначим через $S_{ij}^k(C)$ число упорядоченных пар (x, y) кодовых слов кода C длины n таких, что $w(x) = i$, $w(y) = j$ и $d(x, y) = k$. Далее для краткости будем использовать запись S_{ij}^k.

Лемма 3. *Для произвольного кода Препараты длины n справедливо*

$$S_{68}^6 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n^2 - 22n + 108)}{8 \cdot 36}.$$

Доказательство. Пусть фиксировано некоторое кодовое слово x веса 6. Найдем сперва число кодовых слов y веса 6 таких, что $d(x, y) = 8$. Каждое такое слово y имеет со словом x в точности две общие ненулевые координаты. Пару координат p, q из шести ненулевых координат слова x можно выбрать $\binom{6}{2}$ способами. Тогда из леммы 2 следует, что искомое число кодовых слов y (обозначим его через γ) равно

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{n^2 - 22n + 108}{12} = \frac{5 \cdot (n^2 - 22n + 108)}{4}.$$

Заметим, что число γ не зависит от выбора кода и кодового слова x веса 6. Отсюда несложно следует, что γ равно числу кодовых слов z веса 8 таких, что $d(x, z) = 6$. Умножая число γ на A_6 и используя выражение (2), получаем требуемое выражение для S_{68}^6. $\square$

Теорема 1. *Произвольный код Препараты длины $n = 2^m$, m четно, не является дистанционно регулярным при $n \geq 64$.*

Доказательство. Предположим, что код Препараты дистанционно регулярен. Из определения дистанционной регулярности кода следует, что все числа

S^k_{ij}/A_i и S^k_{ij}/A_j целые. Покажем, что число δ, равное S^6_{68}/A_8, является целым только при $n = 16$. Используя лемму 3 и подставляя выражение (3) для A_8, получаем

$$\delta = 70 \cdot \frac{n^2 - 22n + 108}{n^2 - 21n + 95}. \tag{4}$$

При $n = 16$ согласно лемме 1 код Препараты дистанционно регулярен. При $n = 64$ получаем несократимую дробь $\delta = 65240/(13 \cdot 73)$. Пусть далее $n \geq 256$. Заметим, что при всех $n \geq 16$ дробь в равенстве (4) меньше единицы и, следовательно, для таких n выполняется

$$0 < \delta < 70. \tag{5}$$

После преобразования равенства (4) приходим к однородному уравнению от n, в котором свободный член равен $(70 \cdot 108 - 95\delta)$. Очевидно, что он должен быть кратен n. Поэтому для некоторого целого числа r имеем

$$70 \cdot 108 - 95\delta = nr. \tag{6}$$

Сокращая равенство (6) на 8 и используя тот факт, что $n = 2^m$, $n \geq 256$, приходим к равенству вида

$$35 \cdot 27 - \frac{95\delta}{8} = 32\ell, \tag{7}$$

где ℓ — целое число. Поскольку первое слагаемое нечетно, второе также должно быть нечетным, отсюда следует, что δ равно $8(2t + 1)$ для некоторого целого числа t. Подставляя это выражение в (7), получаем, что

$$(85 - 19t) \text{ кратно } 16. \tag{8}$$

В силу неравенства (5) возможными значениями t являются $0, 1, 2$ и 3. Ни при одном из них условие (8) не выполняется. Таким образом, при $n \geq 64$ код Препараты не является дистанционно регулярным. □

3. Выколотые коды Препараты

Группа симметрий кода *t-транзитивна*, если для любых двух t-элементных подмножеств координат найдется автоморфизм (подстановка), переводящая одно подмножество координат в другое.

Лемма 4. *Пусть группа* $\mathrm{Sym}(C)$ *транзитивного приведенного кода C длины n является* 1*-транзитивной. Тогда код C', полученный выкалыванием произвольной координаты кода C, транзитивен.*

Доказательство. Пусть код C' получен из кода C выкалыванием координаты с номером a. Удобно считать, что для C' сохраняется прежняя нумерация координат, за исключением координаты a. Приведем эквивалентное определение транзитивного приведенного кода. Код C транзитивен тогда и только тогда, когда для каждого кодового слова x найдется перестановка $\pi \in S_n$ такая, что $x + \pi(C) = C$. Пусть $\pi(b) = a$ для некоторой координаты b. Поскольку группа $\mathrm{Sym}(C)$ является 1-транзитивной, существует перестановка $\tau \in \mathrm{Sym}(C)$ такая, что $\tau(a) = b$. Для перестановки $\sigma = \pi \circ \tau$ выполняется равенство

$$x + \sigma(C) = x + \pi(\tau(C)) = x + \pi(C) = C \tag{9}$$

и, кроме того, $\sigma(a) = a$. Пусть после выкалывания координаты a кодовое слово x переходит в кодовое слово $x' \in C'$. Имеем

$$x' = (x_1, \ldots, x_{a-1}, x_{a+1}, \ldots, x_n).$$

Определим перестановку $\pi' \in S_{n-1}$ следующим образом:

$$\pi' = (\sigma(1), \ldots, \sigma(a-1), \sigma(a+1), \ldots, \sigma(n)).$$

Тогда из равенств (9) и $\sigma(a) = a$ следует, что в коде C' выполняется $x' + \pi'(C') = C'$. Поскольку выбор кодового слова x (а следовательно, и слова x') был произволен, код C' является транзитивным. $\square$

Как отмечено ранее, код Нордстрома — Робинсона длины 16 транзитивен. В работе [18] доказано, что его группа симметрий трижды транзитивна. Следовательно, по лемме 4 код длины 15, полученный выкалыванием произвольной координаты из кода Нордстрома — Робинсона, транзитивен. С помощью компьютера нами было проверено, что в приведенном $(15, 256, 5)$-коде для кодового слова x веса i число кодовых слов y веса j таких, что $d(x, y) = k$, не зависит от выбора x для любых допустимых значений i, j, k. Поскольку код транзитивен и единствен с точностью до эквивалентности (см. [1, гл. 2]), этого достаточно для доказательства дистанционной регулярности. Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Произвольный* $(15, 256, 5)$*-код дистанционно регулярен.*

Замечание. Интересно отметить, что при добавлении к этому коду всех векторов пространства, находящихся от него на расстоянии 3, получится линейный совершенный $(15, 256 \cdot 8, 3)$-код (см. [14]), не являющийся, в свою очередь, дистанционно регулярным (см. [6]).

Используя рассуждения, аналогичные проведенным для кодов Препараты длины n, можно доказать следующий факт (при этом будут исследованы кодовые слова веса не более 6).

Теорема 2. *Произвольный* $(n-1, 2^n/n^2, 5)$*-код, полученный выкалыванием любой координаты некоторого* $(n, 2^n/n^2, 6)$*-кода Препараты, не является дистанционно регулярным при* $n - 1 \geq 63$.

Приведем набросок доказательства. В работе [13] показано, что множество кодовых слов веса 5 выколотого кода Препараты длины $n-1$ образует $2-(n-1, 5, (n-4)/3)$-схему. Отсюда можно вычислить значения

$$A_5 = \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{60}, \tag{10}$$

$$A_6 = \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{360}. \tag{11}$$

Справедлива

Лемма 5. *В произвольном выколотом коде Препараты длины* $n-1$ *выполняется*

$$S^5_{56} = \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-7)}{18}.$$

Доказательство. Выберем кодовое слово x веса 5 с ненулевыми координатами p, q, a, b, c. Нетрудно показать, что число кодовых слов веса 5, имеющих единицы в координатах p, q и нули в координатах a, b, c, равно $(n-7)/3$. Умножая на $\binom{5}{2}$, получаем число кодовых слов y веса 5 таких, что $d(x, y) = 6$. Оно не зависит от выбора кода и слова x, поэтому равно числу кодовых слов z веса 6 таких, что $d(x, z) = 5$. Домножая это число на A_5, используя равенство (10), получаем S_{56}^5. $\square$

Предположим, что выколотый код Препараты длины $n-1$ дистанционно регулярен. Тогда все числа S_{ij}^k/A_i и S_{ij}^k/A_j должны быть целыми. Нетрудно видеть, используя лемму 5 и формулу (11), что число

$$\frac{S_{56}^5}{A_6} = 20 \cdot \frac{n-7}{n-6}$$

является целым только при $n-1 = 15$. Следовательно, выколотые коды Препараты длины $n-1 > 15$ не являются дистанционно регулярными.

Замечание. Следует отметить, что в теоремах 1 и 2 были исследованы кодовые слова веса не более 8 и 6 соответственно, причем это наименьшие веса кодовых слов, для которых начинает нарушаться свойство дистанционной регулярности. Говоря неформально, для кодовых слов меньшего веса коды Препараты и коды, полученные из них выкалыванием одной координаты, в некотором смысле являются локально дистанционно регулярными.

Результаты настоящей статьи были частично анонсированы в [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
2. *Delsarte P.* An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Research Reports Supplements. 1973. N 10.
3. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Heidelberg: Springer-Verl., 1989. (Ergeb. Math.; 3.18).
4. *Levenshtein V. I.* Universal bounds for codes and designs, in Handbook of Coding Theory / Ed. V. S. Pless and W. C. Huffman, Eds., Amsterdam: Elsevier Sci. 1998. V. 1. P. 499–648.
5. *Topalova S.* Distance regularity of some linear codes // Abstracts of the annual workshop on algebraic and combinatorial coding theory, 23–26 November 2000. St. Zagora, Bulgaria. P. 18.
6. *Августинович С. В., Соловьева Ф. И.* О дистанционной регулярности совершенных двоичных кодов // Пробл. передачи информ. 1998. Т. 34, № 3. С. 47–49.
7. *Августинович С. В., Соловьева Ф. И.* Новые конструкции и свойства совершенных кодов // Тр. Междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций», Новосибирск, 2000. С. 5–10.
8. *Васильева А. Ю.* Сильная дистанционная инвариантность совершенных двоичных кодов // Дискр. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 4. С. 33–40.
9. *Vasil'eva A. Yu.* Local and interweight spectra of completely regular codes and perfect colourings // Proc. tenth intern. workshop on algebraic and combinatorial coding theory, 3–9 September 2006. Zvenigorod, Russia. P. 273–276.
10. *Preparata F. P.* A Class of optimum nonlinear double-error-correcting codes // Inform. and Control. 1968. V. 13, N 5. P. 378–400.
11. *Думер И. И.* Некоторые новые равномерно упакованные коды // Труды МФТИ. Серия «Радиотехника и электроника». М.: МФТИ, 1976. P. 72–78.
12. *Baker R. D., van Lint J. H., Wilson R. M.* On the Preparata and Goethals codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1983. V. 29, N 3. P. 342–345.
13. *Семаков Н. В., Зиновьев В. А., Зайцев Г. В.* Равномерно упакованные коды // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7, № 1. С. 38–50.
14. *Semakov N. V., Zinoviev V. A., Zaitsev G. V.* Interrelation of Preparata and Hamming codes and extension of Hamming codes to new double-error correcting codes // Proc. 2nd Intern.

Sympos. Information Theory. Tsakhadsor, Armenia, 1971. Budapest: Akad. Kiado, 1973. P. 257–263.

15. *Токарева Н. Н.* О компонентах кодов Препараты // Пробл. передачи информ. 2004. Т. 40, № 2. С. 63–69.

16. *Hammons A. R., Kumar P. V., Calderbank A. R., Sloane N. J. A., Solé P.* The $\mathbb{Z}_4$-linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1994. V. 40, N 2. P. 301–319.

17. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Orbit and coset analysis of the Golay and related codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36, N 5. P. 1038–1050.

18. *Berlekamp E. R.* Coding theory and the Mathieu groups // Inform. and Control. 1971. V. 18, N 1. P. 40–64.

19. *Solov'eva F. I., Tokareva N. N.* On the property of distance regularity of Kerdock and Preparata codes // Proc. Tenth intern. workshop on algebraic and combinatorial coding theory, 3–9 September 2006. Zvenigorod, Russia. P. 248–251.

Статья поступила 20 декабря 2005 г.

Соловьева Фаина Ивановна,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sol@math.nsc.ru

Токарева Наталья Николаевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
toknn@ngs.ru