Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2007. Том 48, № 2

УДК 510.643

ЯВНЫЙ БАЗИС ДЛЯ ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ ВЫВОДА ЛОГИКИ ГЁДЕЛЯ — ЛЕБА GL

Б. Р. Федоришин

Аннотация: Получено описание явного базиса допустимых правил вывода для логики Гёделя — Леба. Такой базис состоит из последовательности правил вывода от бесконечного числа переменных. Важную роль в исследовании играют правила вывода в редуцированной форме. Наряду с базисом для допустимых правил получен базис квазитождеств для свободной алгебры счетного ранга логики Гёделя — Леба.

Ключевые слова: модальная логика, правило вывода, допустимое правило, фрейм, базис.

1. Введение

Допустимым правилом вывода для логики λ мы называем правило вывода, относительно которого логика λ замкнута. Понятие допустимого правила вывода восходит к [1]. Вопрос о связи допустимости и выводимости правил вывода в интуиционистской логике H исследовался в [2, 3], где были получены правила вывода допустимые, но не выводимые в H.

Существуют различные подходы к изучению допустимых правил. Наиболее важные — это получение критериев допустимости и построение базиса для допустимых правил. Поскольку цель нашей работы заключается в нахождении явного описания для допустимых правил логики GL, коснемся некоторых результатов, полученных в исследованиях базисов для нестандартных исчислений.

На алгебраическом языке нахождение базиса для допустимых правил логики λ эквивалентно нахождению базиса для квазитождеств свободной алгебры многообразия логики λ. К примеру, в [4] получен базис для квазихарактеристических правил логики IPC, который состоит из единственного правила r_M, где $r_M := ((x \to y) \to x \vee z)/((x \to y) \to x) \vee ((x \to y) \to z)$. В [5, 6] показано, что интуиционистская логика H и модальные логики $S4$, Grz не имеют базиса от конечного числа переменных для допустимых правил. В. В. Римацкий в [7] исследовал существование конечного базиса для модальных логик, расширяющих логику Льюиса $S4$ ширины 2.

Исследование явного базиса для допустимых правил вывода объясняется несуществованием конечного базиса для допустимых правил вывода в некоторых нормальных модальных и суперинтуиционистских логиках. В [8] найден явный базис для допустимых правил вывода в интуиционистской логике H,

Работа поддержана Красноярским краевым фондом науки (код проекта 13G069).

а затем в [9] описан явный базис допустимых правил для логики $S4$. В настоящей работе строится явный базис для логики доказуемости GL, интерес к исследованию мотивирован тем, что логика Гёделя — Леба не имеет конечного базиса для допустимых правил вывода [10]. Напомним, что логика GL является нормальным расширением минимальной транзитивной нормальной модальной логики $K4$ с помощью аксиомы $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Исследования свойств расширений логики GL относительно разрешимости (в частности, дизъюнктивного свойства) проведены в [11]. В настоящей работе применяется техника для правил вывода в редуцированной форме [5, 6, 9–13], такой подход позволяет нам глубже понимать семантическую природу правил вывода для нестандартных логических систем.

2. Определения и обозначения

Приведем некоторые определения, обозначения и утверждения, используемые в нашем исследовании (подробности см. в [12]). Под *фреймом* понимаем $F = \langle |F|, R\rangle$, где $|F|$ — множество и R — бинарное отношение на F. Фрейм F назовем *λ-фреймом*, если все формулы λ истинны на F. Под *GL-фреймом* понимаем фрейм, на котором все формулы из логики GL истинны. Фрейм F *корневой*, если существует $a \in F$ такой, что для любого $b \in F - \{a\}$ выполняется aRb. Символ $S_m(F)$ обозначает множество элементов из F глубины не более m, $Sl_m(F)$ — множество глубины m. Для любого $X \subseteq F$ пусть $X^R = \{a \mid \exists b \in X(bRa)\}$ — верхний конус, порожденный X, для любой антицепи Y из F элемент C есть копокрытие для Y тогда и только тогда, когда $C^{R<} = \bigcup_{C_1 \in Y} \left(C_1^R \cup C_1\right)$.

Пусть задан произвольный корневой конечный фрейм F. *Копоследователем фрейма F над GL* назовем фрейм G, построенный из F с помощью последовательности фреймов $F_0, \dots, F_n$. Пусть $F_0 := F$. Фрейм F_{k+1} строим из фрейма F_k следующим образом. Фиксируем произвольным образом множество антицепей иррефлексивных элементов $A_0, \dots, A_n$ из F_k. Для каждой антицепи A_i из заданного множества добавляем во фрейм F_k копокрытие для антицепи A_i, если такое копокрытие отсутствует для A_i. Процесс построения последовательности фреймов F_i завершаем на произвольном шаге $n \geq 1$ и полагаем $G := F_n$. Логику $\lambda \supseteq GL$ назовем *логикой со свойством копокрытия над GL*, если любой копоследователь над GL конечного корневого λ-фрейма также является λ-фреймом.

Связка $\Box_0$ определяется как $\Box_0\alpha := \Box\alpha \wedge \alpha$, а связка $\Diamond_0$ — как $\Diamond_0\alpha := \Diamond\alpha \vee \alpha$. Символ $\mathrm{Var}(\alpha)$ обозначает множество переменных входящих в формулу α, $\mathrm{For}(\lambda)$ — множество всех формул в языке λ.

Модальная логика λ обладает свойством $\Box_0$-дизъюнкции, если для любых $\alpha \in \mathrm{For}(\lambda)$ и $\beta \in \mathrm{For}(\lambda)$ выполняется $\Box_0\alpha \vee \Box_0\beta \in \lambda$ тогда и только тогда, когда $\Box_0\alpha \in \lambda$ или $\Box_0\beta \in \lambda$. Правило вывода $r := \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n/\beta$ называется допустимым для λ, если для любой подстановки s

$$\alpha_1^s \in \lambda, \alpha_2^s \in \lambda, \dots, \alpha_n^s \in \lambda \Rightarrow \beta^s \in \lambda.$$

Логика λ называется *финитно аппроксимируемой*, если для любой $\alpha \notin \lambda$ существует конечный λ-фрейм F такой, что $F \nVdash \alpha$. Назовем модель M *n-характеристической для логики λ*, если для любой формулы α от переменных P_n

$$\alpha \in \lambda \Leftrightarrow M \Vdash \alpha.$$

Приведем построение n-характеристической модели $Ch_\lambda(n)$ логики λ над GL. Пусть дана финитно аппроксимируемая модальная логика λ над GL и множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$; $Sl_1(Ch_\lambda(n))$ состоит из иррефлексивных элементов, причем означивание V переменных из P_n задано таким образом, что не существует элементов, изоморфных, как модели Крипке. Предположим, что $S_m(Ch_\lambda(n))$ уже построено. Построим множество $Sl_{m+1}(Ch_\lambda(n))$ следующим образом: возьмем произвольную антицепь Y из $S_m(Ch_\lambda(n))$, которая имеет по меньшей мере один иррефлексивный элемент из $Sl_m(Ch_\lambda(n))$, и присоединим элемент C, который является непосредственным предшественником для Y, так что фрейм $C^< \cup C$ является λ-фреймом. В результате получим модель $Ch_\lambda(n)$.

Подмножество X данной модели M называется *формульным*, если существует формула α такая, что для любого $x \in M$

$$x \Vdash \alpha \Leftrightarrow x \in X.$$

Означивание V называется *формульным*, если для любой пропозициональной переменной $V(p)$ формульное. Для данного фрейма F, данного означивания V и правила r назовем правило *истинным на F относительно V*, в обозначениях $F \Vdash r$, если для любого $x \in F$ верно

$$x \Vdash_V \alpha_i \Leftrightarrow x \Vdash \beta.$$

Приведем следующие результаты, доказательства которых можно найти в [12].

Теорема 2.1. *Пусть $K_n = \langle W_n, R_n, V_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность n-характеристических моделей для модальной логики λ. Правило вывода $r := \alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)/\beta(x)$ является допустимым в λ тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого формульного означивания S переменных из r в K_n правило r истинно в модели $\langle W_n, R_n, S \rangle$, т. е. из $S(\alpha_1) = W_n, \dots, S(\alpha_n) = W_n$ следует $S(\beta) = W_n$.*

Теорема 2.2. *Для любой финитно аппроксимируемой модальной логики λ, расширяющей $K4$, модель $Ch_\lambda(n)$ является n-характеристической.*

Лемма 2.3. *Пусть λ — финитно аппроксимируемая модальная логика, расширяющая $K4$. Если существует означивание S переменных правила вывода $r = \alpha_1, \dots \alpha_n/\beta$ во фрейме некоторой n-характеристической модели $Ch_\lambda(n)$, которое опровергает r, то существует означивание S этих переменных в $Ch_\lambda(k)$, где k — число переменных в r, которое также опровергает r.*

Теорема 2.4. *Модальная логика GL полна по Крипке. Класс Fr_{GL} иррефлексивных фреймов без бесконечно возрастающих цепей элементов является характеристическим для GL.*

Определение 2.5. Пусть $F = \langle W, R \rangle$ — фрейм. Алгебра

$$F^+ := \langle 2^W, \wedge, \vee, \to, \neg, \Box, \bot, \top \rangle,$$

где

(i) $\langle 2^W, \wedge, \vee, \to, \neg, \bot, \top \rangle$ является булевой алгеброй подмножеств W,

(ii) $\Box X := \{a \mid \forall y(\langle a, y \rangle \in R \Rightarrow (y \in X))\}$,

называется ассоциированной (*или обертывающей*) *модальной алгеброй* для F.

Определение 2.6. Пусть B — модальная алгебра. *Представлением Стоуна* для B называется модель Крипке $B^+ := \langle W(B), R, V\rangle$, где
(i) $W(B)$ — множество ультрафильтров на B,
(ii) $\langle Y_1, Y_2\rangle \in R \Leftrightarrow (\Box x \in Y_1 \Rightarrow\ x \in Y_2)$,
(iii) $\mathrm{Dom}(V) := \{a \mid a \in |B|\}$, $V(a) := \{Y \mid Y \in W(B), a \in Y\}$.

Символ $F(M)$ означает фрейм для любой модели M.

Теорема 2.7 (теорема о представлении Стоуна). *Любая модальная алгебра B является подалгеброй $F(B^+)^+$. В частности, если B конечна, то $B \cong F(B^+)^+$ и $F^{++} \cong F$ для любого конечного фрейма F.*

Для любой модальной алгебры A правило вывода r истинно на A относительно произвольного означивания V, $A \models_V r$, если истинность посылки правила r влечет истинность заключения при V. Назовем правило r *следствием множества правил вывода B в модальной логике λ*, $B \vdash_\lambda r$, если заключение правила r выводимо из множества посылок с помощью аксиом, постулированных правил логики λ и множества B. Семантическое толкование этого определения следующее: $B \vdash_\lambda r$ тогда и только тогда, когда $A \models B$ влечет $A \models r$ для любой $A \in \mathrm{Var}(\lambda)$. Множество правил вывода B назовем в таком случае *базисом для правила r*. Множество B допустимых правил вывода для логики λ называется *базисом для всех допустимых правил логики λ* тогда и только тогда, когда каждое правило r, допустимое для λ, является следствием множества B.

3. Явный базис для допустимых правил модальной логики *GL*

Лемма 3.1. *Логика GL обладает свойством $\Box_0$-дизъюнкции.*

Доказательство. Допустим, что GL не обладает свойством дизъюнкции, тогда $\Box_0\alpha \vee \Box_0\beta \in GL$, но $\Box_0\alpha \notin GL$ и $\Box_0\beta \notin GL$. По теореме 2.4 логика GL полна относительно класса иррефлексивных фреймов без возрастающих цепей элементов. Тогда найдутся GL-фреймы F_1 и F_2 такие, что $F_1 \not\Vdash \Box_0\alpha$ и $F_2 \not\Vdash \Box_0\beta$. Фрейм $F_1 \cup F_2$ является GL-фреймом, и мы можем присоединить иррефлексивное копокрытие c для антицепи $\{a, b\}$, где $a \not\Vdash \Box_0\alpha$ и $b \not\Vdash \Box_0\beta$, так что $c^< \cup c$ является GL-фреймом и $c \not\Vdash \Box_0\alpha \vee \Box_0\beta$. Но по условию $\Box_0\alpha \vee \Box_0\beta \in GL$; противоречие. Лемма доказана.

Введем последовательность правил вывода следующим образом.

Зададим формулы A_h, $A_{h,l}$ и B_l:

$$A_h := \bigwedge_{1\le i\le h} \Diamond p_i, \quad A_{h,l} := \Box_0\Big(\bigwedge_{1\le i\le h}\Big(p_i \to \bigwedge_{1\le j\le l} \neg\Diamond_0 q_j\Big)\Big), \quad B_l := \bigwedge_{1\le i\le l} \neg\Diamond q_i.$$

Из заданных выше формул составим правило вывода $r_{h,l}$:

$$r_{h,l} := (\Box_0(A_{h,l} \wedge \neg(A_h \wedge B_l)) \vee \Box_0 z)/(\Box_0\neg A_h \vee \Box_0 z),$$

где $h \ge 1$, $l \ge 1$.

Лемма 3.2. *Любое правило вывода из последовательности $\{r_{h,l}\}$, где $h \ge 1$, $l \ge 1$, является допустимым для GL.*

Доказательство. Предположим, что найдется некоторое правило $r_{n,m}$ из $r_{h,l}$, которое не является допустимым для GL. Тогда, поскольку GL обладает свойством $\Box_0$-дизъюнкции, правило

$$R := \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m))/\Box_0\neg A_n$$

не является допустимым для GL, следовательно, по теоремам 2.1, 2.2 и лемме 2.3 существует означивание V переменных из правила R такое, что

$$Ch_{GL}(n+m) \Vdash_V \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)) \& Ch_{GL}(n+m) \nVdash_V \Box_0 \neg A_n. \quad (1)$$

Отсюда следует, что найдется $a \in Ch_{GL}(n+m)$ такой, что $a \nVdash \Box_0 \neg A_n$, это означает, что либо (i) $a \nVdash \neg A_n$, либо (ii) $a \nVdash \Box \neg A_n$. Рассмотрим (i). Поскольку $a \Vdash A_n$, существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, где $a < b_i$, такие, что $b_i \Vdash_V p_i$. Логика GL обладает свойством копокрытия над GL, тем самым существует копокрытие $b \in Ch_{GL}(n+m)$ для $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и поэтому $b \Vdash A_n$. Кроме того, из (1) вытекает, что $b \Vdash A_{n,m}$, а значит, $b \Vdash B_m$. Следовательно, $b \Vdash A_n \wedge B_m$; противоречие. Проверка (ii) осуществляется аналогично, отличие только в глубине элемента, на котором истинна формула A_n. Лемма доказана.

Введем редуцированную форму для правила вывода r в модальной логике GL следующим образом:

$$r := \bigvee_{1 \le i \le t} \phi_i / \Box_0 x_0, \quad \phi_i := \bigwedge_{0 \le j \le k} x_j^{k(i,j,1)} \wedge \bigwedge_{0 \le j \le k} \big(\Diamond x_j^{k(i,j,2)}\big),$$

где $s^0 := s$, $s^1 := \neg s$, $k(i,j,1), k(i,j,2) \in \{0,1\}$.

Теорема 3.3 [12]. *Для любого модального правила r существует $rf(r)$ в редуцированной форме такое, что $rf(r) \equiv r$ относительно истинности в любой модальной алгебре из* $\mathrm{Var}(GL)$ *и любого GL-фрейма.*

Пусть даны $rf(r)$ в редуцированной форме. Построим GL-модель над $rf(r)$ следующим образом: для любого $\phi_j \in Dpr(rf(r))$, где $Dpr(rf(r))$ — совокупность дизъюнктивных членов посылки правила $rf(r)$, положим

$$\theta_1(\phi_j) = \{x_j \mid 0 \le j \le k, k(i,j,1) = 0\}, \quad \theta_2(\phi_j) = \{x_j \mid 0 \le j \le k, k(i,j,2) = 0\}.$$

Возьмем $X \subseteq Dpr(f(r))$ и построим модель $M(GL, rf(r), X)$ на X, где

$$|M(GL, rf(r), X)| = X,$$

с отношением $<$ и означиванием V: для любых $\phi_j, \phi_k \in X$

$$(\phi_j < \phi_k \Leftrightarrow \theta_2(\phi_k) \subset \theta_2(\phi_j) \& \theta_1(\phi_k) \subseteq \theta_2(\phi_j)), \quad V(x_i) := \{\phi_j \mid x_i \in \theta_1(\phi_j)\}.$$

Теорема 3.4 [12]. *Правило $rf(r)$ допустимо для GL тогда и только тогда, когда для любого $X \subseteq Dpr(rf(r))$ модель $M(GL, rf(r), X)$ опровергает по меньшей мере одно из следующих свойств:*

(i) *существует $\phi_j \in X$ такой, что $x_0 \notin \theta_1(\phi_j)$,*

(ii) *если $\phi_j \in Sl_1(X)$, то $\theta_2(\phi_j) = \varnothing$,*

(iii) *$\phi_j \Vdash \phi_j$ для любого $\phi_j \in X$,*

(iv) *для любого $D \subseteq X$ существует $e(X, D) \in M(GL, rf(r), X)$: $\theta_2(e(X,D)) = \{\theta_2(\phi_j) \cup \theta_1(\phi_j) \mid \phi_j \in D\}$.*

Пусть даны произвольная модальная алгебра $A = F^+(Y) \in \mathrm{Var}(GL)$, порожденная множеством подмножеств Y в обертывающей алгебре F^+ над иррефлексивным фреймом F, и r в редуцированной форме $rf(r)$.

Лемма 3.5. *Пусть $rf(r)$ допустимо для GL, $\|\operatorname{Var}(rf(r))\| = k+1$, $A \not\models rf(r)$. Тогда $A \not\models r_{n,m}$ для некоторых n, m, $n \geq 1$, $m \geq 1$, где $n+m \leq k+1+2^{2(k+1)}$.*

Доказательство. По условию $A \not\models rf(r)$ для определенного означивания $V(x_i) = Y_i \in A$, где $0 \leq i \leq k$,

$$F \Vdash_V \bigvee_{1\leq i\leq t} \phi_i \& F \nVdash_V \Box_0 x_0. \tag{2}$$

В множестве $Q = \{a \mid a \nVdash \Box_0 x_0\}$ возьмем b такой, что $\phi(b) = \{\phi_j \mid \exists c \in V(\phi_j)(b < c)\} \cup \{\phi_k\}$, где $b \Vdash \phi_k$, является максимальным в X. Рассмотрим модальную алгебру $(b^< \cup b)^+$, ассоциированную с фреймом $b^< \cup b$. В $(b^< \cup b)^+$ возьмем подалгебру $B := ((b^<) \cup b)^+)(V(x_0), \dots, V(x_k))$, порожденную элементами $V(x_0), \dots, V(x_k)$. Тогда по (2) получим $B \not\models rf(r)$. Рассмотрим множество дизъюнктов Z из $Dpr(rf(r))$ таких, что $V(\phi_j) \neq \varnothing$ для любого $\phi_j \in Z$ в алгебре B. Нетрудно заметить, что (i)–(iii) выполняются для множества $M(rf(r), Z)$, а так как $rf(r)$ допустимо для GL, то (iv) нарушается. Это означает, что существует $D \subseteq Z$ такое, что для любого $\phi_j \in Z$

$$\theta_2(\phi_j) \neq \{\theta_2(\phi_s) \cup \theta_1(\phi_s) \mid \phi_s \in D\}.$$

Рассмотрим следующие множества: $P_v := \{x_i \mid x_i \in \operatorname{Var}(rf(r))\}$ и $P_t := \{x_i \mid x_i \in \{\theta_2(\phi_s) \cup \theta_1(\phi_s) \mid \phi_s \in D\}\}$. Пусть $n = \|D\|$ и $m = \|P_v - P_t\|$. Тогда $n \geq 1$ и $m > 0$, поскольку, если $m = 0$, мы получим $b \Vdash_V \phi_j$ для некоторого $\phi_j \in Z$ и ϕ_j опровергнет $\theta_2(\phi_j) \neq \bigcup_{\phi_s \in D} (\theta_2(\phi_s) \cup \theta_1(\phi_s))$. Несложно также видеть, что $m + n \leq k + 1 + 2^{2(k+1)}$.

Возьмем из введенной выше последовательности правило вывода $r_{n,m}$. Пусть f и g — произвольные 1-1-соответствия:

$$f : \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \to D, \quad g : \{q_1, q_2, \dots, q_m\} \to P_v - P_t.$$

Переведем означивание V из переменных правила $rf(r)$ на переменные правила $r_{n,m}$ следующим образом: $V(p_i) := V(f(p_i))$, $V(q_j) = V(g(q_j))$. Поскольку b является наименьшим элементом фрейма, ассоциированного с алгеброй B, получим

$$b \Vdash_V \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Diamond p_i.$$

Следовательно, $b \Vdash_V A_n$. Возьмем произвольный $c \in b^< \cup b$ и предположим $c \Vdash p_i$ для некоторого i. Тогда получим $c \Vdash_V f(p_i)$ для $f(p_i) \in D$ и для любого $g(q_i) \in P_v - P_t$, $c \Vdash_V \neg\Diamond_0 g(q_i)$ в силу выбора P_t и $c \Vdash_V f(p_i)$. Таким образом, $B \models A_{n,m}$.

Допустим, $c \in b^< \cup b$, $c \Vdash_V A_n$. Тогда $c \Vdash_V \Diamond\phi_k$ для всех $\phi_k \in D$. Из (2) следует $c \Vdash \phi_j$ для некоторого j. Поэтому если $x_i \in \theta_1(\phi_k) \cup \theta_2(\phi_k)$, где $\phi_k \in D$, то $x_i \in \theta_2(\phi_j)$, следовательно, $P_t \subseteq \theta_2(\phi_j)$.

Поскольку $c \Vdash \phi_j$ и по теореме 3.4 будет $\theta_2(\phi_j) \not\subseteq \theta_1(\phi_k) \cup \theta_2(\phi_k)$ для любого $\phi_k \in D$, существуют $x_i \in \theta_2(\phi_j)$ и $x_i \notin \theta_1(\phi_k) \cup \theta_2(\phi_k)$, так что $c \Vdash \Diamond x_i$, где $x_i \in P_v - P_t$. Получили $c \nVdash B_m$. Следовательно,

$$b^< \cup b \Vdash_V \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m))$$

и

$$B \models_V \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)). \tag{3}$$

Зададим означивание V для z так, что $A \not\models_V r_{n,m}$.

Лемма 3.6. *Правило вывода $r_{n,m}$ опровергается на A.*

Доказательство. Из (2) следует, что существует единственная формула $\phi_k \in Z$ такая, что $b \Vdash_V \phi_k$. Для переменной z возьмем следующее означивание:

$$V(z) = V\Big(\neg\Big(\Diamond_0\phi_k \wedge \bigwedge_{\phi_j\in\phi(b)} \Diamond\phi_j \wedge \Box\Big(\bigvee_{\phi_j\in Z} \phi_j\Big)\Big)\Big). \tag{4}$$

Вследствие выбора $\phi(b)$ и Z получим $b \nVdash_V z$ в силу того, что $b \Vdash A_n$. Поэтому заключение правила $r_{n,m}$ опровергается на b относительно V. Покажем, что посылка $r_{n,m}$ истинна на A относительно V. Если c — произвольный элемент фрейма F, то $c \nVdash \Box_0 z$, тогда (i) $c \nVdash z$ или (ii) $c \nVdash \Box z$.

Докажем (i).

Утверждение 3.7. *Пусть $c \in F$ и $c \nVdash z$, тогда $\phi(b) = \phi(c)$ и $c \nVdash \Box_0 x_0$.*

Доказательство. По выбору V для z получим

$$c \Vdash_V \Diamond_0\phi_k \wedge \bigwedge_{\phi_j\in\phi(b)} \Diamond\phi_j \wedge \Box\Big(\bigvee_{\phi_j\in Z} \phi_j\Big).$$

Поскольку $b \in Q$ и $c \Vdash \Diamond_0\phi_k$, то $c \nVdash \Box_0 x_0$. Докажем $\phi(b) = \phi(c)$. Вначале установим, что $\phi(b) \subseteq \phi(c)$. Возьмем $\phi_i \in \phi(b)$. Так как $c \Vdash_V \bigwedge_{\phi_j\in\phi(b)} \Diamond\phi_j$, то $c \Vdash_V \Diamond\phi_i$. Следовательно, $\phi_i \in \phi(c)$. Покажем, что $\phi(c) \subseteq \phi(b)$. Допустим, что $\phi_i \in \phi(c)$, но $\phi_i \notin \phi(b)$. Тогда для любого b' такого, что $b < b'$, $b' \nVdash_V \phi_i$, в силу (4) получим $c \nVdash_V \phi_i$; противоречие. Таким образом, элементы, достижимые из b и c, имеют в совокупности одинаковое множество истинных формул вида ϕ_j, а значит, $\phi(b) = \phi(c)$. Утверждение доказано

Рассмотрим случай (ii). Поскольку $c \nVdash_V \Box z$, это означает, что существует d такой, что $c < d$ и $d \nVdash_V z$. Следовательно,

$$d \Vdash_V \Diamond_0\phi_k \wedge \bigwedge_{\phi_j\in\phi(b)} \Diamond\phi_j \wedge \Box\Big(\bigvee_{\phi_j\in Z} \phi_j\Big),$$

и все рассуждения, приведенные в утверждении, выполняются для элемента d.

Из утверждения 3.7 и (4) теми же рассуждениями, что и в лемме 3.5, получаем, что

$$F \Vdash_V \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)),$$

а значит,

$$A \models_V \Box_0(A_{n,m} \wedge \neg(A_n \wedge B_m)).$$

Таким образом, при означивании V на алгебре A опровергается правило $r_{n,m}$. Лемма доказана.

Пусть $R_p(\lambda)$ — правила вывода фиксированной формальной системы для логики λ. Для множества правил R и алгебры A полагаем $A \models R$, если все правила из R истинны на A. Следующий результат легко следует из [12, теорема 1.4.11].

Теорема 3.8. *Пусть $R \cup r$ — семейство правил вывода в языке логики GL. Тогда $R \vdash_{GL} r$ тогда и только тогда, когда $R \models_{GL} r$. В частности, если $R \not\models_{GL} r$, то существует некоторая алгебра $B \in \mathrm{Var}(GL)$ такая, что $B \models R \cup R_p(GL)$ и $B \not\models r$.*

Из лемм 3.5, 3.6 и теоремы 3.8 получим следующее утверждение.

Теорема 3.9. *Последовательность $r_{h,l}$, где $h \geq 1$, $l \geq 1$, образует базис для допустимых правил вывода логики GL.*

Из результата работы [14] о связи допустимого правила вывода для алгебраической логики λ и соответственно квазитождества свободной алгебры счетного ранга для λ естественно вытекает следующий факт.

Теорема 3.10. *Правило вывода*

$$r := \alpha_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \alpha_m(x_1, \ldots, x_n)/\alpha(x_1, \ldots, x_n)$$

допустимо в логике GL тогда и только тогда, когда квазитождество $q(r) := \alpha_1 = \top, \ldots, \alpha_m = \top \Rightarrow \alpha = \top$ истинно на свободной алгебре счетного ранга $F_{GL}(\omega)$ из $\mathrm{Var}(GL)$.

Из теорем 3.9 и 3.10 следует

Теорема 3.11. *Квазитождества $q(r_{h,l})$ образуют базис для всех квазитождеств, истинных на свободной алгебре $F_{GL}(\omega)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzen P.* Einfurung in Operativ Logik und Mathematik. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer Verl., 1955.
2. *Harrop R.* Conserning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ in intuitionistic formal system // J. Symbolic Logic. 1960. V. 25. P. 27–32.
3. *Минц Г. Е.* Производность допустимых правил // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. 1972. Т. 32. С. 85–99.
4. *Циткин А. И.* О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 291–312.
5. *Рыбаков В. В.* Базисы допустимых правил $S4$ и Int // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 87–107.
6. *Рыбаков В. В.* Базисы допустимых правил модальной системы Grz и интуиционистской логики // Мат. сб. 1985. Т. 128, № 3. С. 321–338.
7. *Римацкий В. В.* О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.
8. *Iemhoff R.* On the admissible rules of intuitionistic propositional logic // J. Symbolic Logic. 2001. V. 66. P. 291–312.
9. *Rybakov V. V.* Construction of an explicit basis for rules admissible in modal system S4 // Math. Logic Quart. 2001. V. 47, N 4. P. 441–446.
10. *Рыбаков В. В.* Допустимость правил вывода и логические уравнения в модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54, № 3. С. 357–377.
11. *Чагров А. В.* Неразрешимые свойства расширений логики доказуемости // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 350–367.
12. *Rybakov V. V.* Admissibility of logical inference rules. Amsterdam; New York: Elsevier Publ., 1997.
13. *Rybakov V. V., Terziler M., Remazki V.* Basis in semi-reduced form for admissible rules of intuitionistic logic IPC // Math. Logic Quart. 2000. V. 46, N 2. P. 207–218.
14. *Wojcicki R.* Theory of logical calculi. Dordrecht: Kluwer Press, 1988.

Статья поступила 18 июля 2003 г.

Федоришин Богдан Романович
Красноярский гос. технический университет,
инженерно-физический факультет, кафедра высшей математики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041