Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.5

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ФОРМУЛ ТИПА ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

О. Л. Виноградов

Аннотация: Устанавливаются точные на классах целых функций конечной степени оценки погрешностей некоторых формул типа численного дифференцирования. Эти оценки усиливают классические точные неравенства теории приближений.

Ключевые слова: точные неравенства, неравенство Бернштейна, целые функции конечной степени, преобразование Фурье, формулы численного дифференцирования.

§ 1. Введение

1.1. Классические неравенства (см., например, [1, с. 222, 223, 228–232, 266; 2, с. 182–193, 332–334; 3, с. 114, 115])

$$\|f^{(r)}\| \le \sigma^r \|f\|, \tag{1}$$

$$\|f^{(r)}\| \le \left(\frac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma h}{2}}\right)^r \|\delta_h^r(f)\| \quad \left(0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\|\delta_u^r(f)\|}{\sin^r \frac{\sigma u}{2}} \le \frac{\|\delta_h^r(f)\|}{\sin^r \frac{\sigma h}{2}} \quad \left(0 < u < h < \frac{2\pi}{\sigma}\right) \tag{3}$$

для целых функций конечной степени и, в частности, для тригонометрических многочленов играют важную роль в теории аппроксимации. Здесь $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, f принадлежит классу $\mathbf{B}_\sigma$ целых функций степени не выше σ, ограниченных на $\mathbb{R}$,

$$\delta_h^r(f,x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^m C_r^m f\left(x + \frac{(r-2m)h}{2}\right)$$

— центральная разность r-го порядка функции f, $\|f\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Неравенство типа (1) впервые установлено С. Н. Бернштейном сначала для тригонометрических многочленов (см. [4, с. 25, 26, 527]), затем — для целых функций конечной степени (см. [4, с. 269, 270, 539]), типа (2) (для тригонометрических многочленов) — М. Риссом [5, с. 365], типа (3) — Боасом [6]. В связи с неравенствами типа (2) укажем также на важные работы [7–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00742) и гранта для молодых кандидатов наук Санкт-Петербурга (PD06–1.1–240).

Неравенство (2) получило дальнейшее развитие в работе В. Г. Доронина [10], где при $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ установлено неравенство

$$\|f^{(r)}\|_p \le \left(\frac{1}{h}\right)^r \left(\|\delta_h^r(f)\|_p + \frac{\left(\frac{nh/2}{\sin\frac{nh}{2}}\right)^r - 1}{4\sin^2\frac{nh}{2}} \|\delta_h^{r+2}(f)\|_p\right) \tag{4}$$

для $f \in H_n$ (H_n — множество тригонометрических многочленов порядка не выше n) в пространстве L_p $(1 \le p < \infty)$ и отмечено, что в пространстве C аналогичный результат был ранее получен В. Ф. Бабенко и А. А. Лигуном. При $0 < h < \frac{\pi}{n}$ неравенство (4) усиливает неравенство (2).

В данной работе неравенства типа (1)–(4) значительно усиливаются в следующих направлениях. Рассматривается широкий класс разложений, примером которых могут служить формулы численного дифференцирования вида

$$f^{(r)} \approx \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(r)} \delta_h^{r+2\nu}(f),$$

где $\beta_0^{(r)} = 1$, и даются точные на классах целых функций конечной степени оценки погрешностей этих формул, в данном случае

$$f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu^{(r)} \delta_h^{r+2\nu}(f),$$

через первый отброшенный член разложения. При таком подходе оказывается, что неравенства (2) и (4) являются начальными случаями этих оценок соответственно при $m = -1$ и $m = 0$ (следствие 3). В рассматриваемый класс разложений попадают, в частности, формулы Стирлинга и Бесселя численного дифференцирования (теоремы 2 и 3), формула Эйлера — Маклорена (теорема 6) и разложение разности с меньшим шагом по разностям с бóльшим шагом (теорема 4). Начальным случаем оценки погрешности последней формулы является неравенство (3) (следствие 7). Все неравенства верны для широкого класса пространств с полунормой, в частности, для пространств $(\mathbf{B}_\sigma, \|\cdot\|)$, $(\mathbf{B}_\sigma \cap L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, и пространств тригонометрических многочленов. В перечисленных пространствах неравенства точны. В пространстве $(\mathbf{B}_\sigma, \|\cdot\|)$ они обращаются в равенство на функциях вида $f^*(x) = ae^{i\sigma x} + be^{-i\sigma x}$.

Неравенства для тригонометрических многочленов ранее были установлены в работе О. Л. Виноградова и В. В. Жука [11] и вошли в пособие [12].

1.2. В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, целых, целых неотрицательных и натуральных чисел. Если из контекста не следует иное, то все функции комплекснозначны. Введем обозначения: $CB(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций; C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с равномерными нормами $\|\cdot\|$; $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}$ функций f, для которых $\|f\|_p^p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f|^p < \infty$; L — пространство 2π-периодических функций, суммируемых на периоде; $C(E)$ — множество непрерывных на E функций; если $f : E \to \mathbb{C}$, то $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$;

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad c_k^{(\alpha)}(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(k+\alpha)t}\,dt$$

— коэффициенты Фурье функции f. Пусть $\sigma > 0$, $\mathfrak{M}_\sigma$ — подпространство $\mathbf{B}_\sigma$, P — полунорма, заданная на $\mathfrak{M}_\sigma$. Если выполнены условия:

а) пространство $(\mathfrak{M}_\sigma, P)$ инвариантно относительно сдвига, т. е. для любых $f \in \mathfrak{M}_\sigma$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}_\sigma$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$;

б) если последовательность функций f_n из $\mathfrak{M}_\sigma$ сходится в себе по полунорме P и равномерно сходится к функции f, то $f \in \mathfrak{M}_\sigma$ и $P(f_n - f) \to 0$;

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}_\sigma, P)$ *принадлежит классу* Λ_σ. Далее, $\mathbf{V}_\sigma$ — множество функций, представимых в виде

$$f(x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixy}\, d\rho(f, y), \tag{5}$$

где $\rho(f)$ — функция ограниченной вариации на $[-\sigma, \sigma]$. В частности, $\mathbf{V}_\sigma$ принадлежат тригонометрические многочлены порядка не выше σ, и $\mathbf{V}_\sigma \subset \mathbf{B}_\sigma$.

Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Пустая сумма считается равной нулю, а пустое произведение — единице; $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k$.

§ 2. Абсолютно монотонные функции

Будем называть функцию $\varphi : [0, a\rangle \to \mathbb{R}$ *абсолютно монотонной на промежутке* $[0, a\rangle$ и писать $\varphi \in \mathrm{AM}[0, a\rangle$, если φ разлагается на промежутке $[0, a\rangle$ в степенной ряд с неотрицательными коэффициентами:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \geq 0,\ x \in [0, a\rangle.$$

Если функция φ разлагается на промежутке $(0, a\rangle$ в ряд Лорана с неотрицательными коэффициентами:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k \geq 0, \quad x \in (0, a\rangle,$$

то будем называть функцию φ *квазиабсолютно монотонной на промежутке* $(0, a\rangle$ и писать $\varphi \in \mathrm{AM}(0, a\rangle$.

Очевидно, что сумма и произведение (квази)абсолютно монотонных функций (квази)абсолютно монотонны. Все производные функции из $\mathrm{AM}[0, a)$ также принадлежат $\mathrm{AM}[0, a)$, а все производные четного порядка функции из $\mathrm{AM}(0, a)$ также принадлежат $\mathrm{AM}(0, a)$.

Замечание 1. Если функция $\varphi : \langle -a, a\rangle \to \mathbb{R}$ четна и абсолютно монотонна на $[0, a\rangle$, то φ неотрицательна, возрастает на $[0, a\rangle$ и выпукла вниз на $\langle -a, a\rangle$.

Многочлены Бернулли $B_n(\cdot)$ и Эйлера $E_n(\cdot)$ определяются равенствами

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n,\ |z| < 2\pi, \quad \frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} z^n,\ |z| < \pi.$$

Полагаем еще $\mathscr{E}_n = 2^n E_n(1/2)$, $\mathscr{B}_n = 2^n B_n(1/2)$.

Лемма 1. *Функции* $\frac{x}{\sin x}$ *и* $\frac{\sin \alpha x}{\sin x}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ *абсолютно монотонны на* $[0, \pi)$, *а функция* $\frac{1}{\cos x}$ — *на* $[0, \pi/2)$.

Лемма 1 следует из известных разложений [13, с. 398, формулы 6.3.2.4 и 6.3.3.2]

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \mathscr{B}_{2m}}{(2m)!} x^{2m-1}, \quad 0 < |x| < \pi,$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \mathscr{E}_{2m}}{(2m)!} x^{2m}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\sin \alpha x}{\sin x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+1)!} B_{2m+1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) x^{2m}, \quad |x| < \pi,$$

и неравенств для многочленов Бернулли и Эйлера (см., например, [14, с. 129, 130; 15, с. 442, формулы 7.530, 7.533, а также 11, 12]).

Лемма 2 [11,12]. *Пусть* $a > 0$, *задана система функций* $\{\varphi_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$, $\varphi_\nu : (0, a\rangle \to \mathbb{C}$, $\varphi_{\nu-1} = g_\nu \varphi_\nu$, $g_\nu(x) \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} \infty$ *при всех* $\nu \in \mathbb{N}$; *функция* $\psi : (0, a\rangle \to \mathbb{C}$ *разлагается в асимптотический ряд по системе* $\{\varphi_\nu\}$ *при* $x \to 0+$:

$$\psi(x) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \varphi_\nu(x), \text{ т. е. } \psi(x) - \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \varphi_\nu(x) = O(\varphi_{m+1}(x)) \text{ при } x \to 0+,$$

$P_m(\psi, x) = \sum\limits_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \varphi_\nu(x)$, $\psi = g_0 \varphi_0$, $g_\nu \in \mathrm{AM}(0, a\rangle$ *при всех* $\nu \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при всех* $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\gamma_m = \frac{\psi - P_m(\psi)}{\varphi_{m+1}} \in \mathrm{AM}(0, a\rangle.$$

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции. База индукции — случай $m = 0$. Функция $\gamma_0 = \frac{\psi - \alpha_0 \varphi_0}{\varphi_1} = (g_0 - \alpha_0) g_1$ принадлежит $\mathrm{AM}(0, a\rangle$ как произведение двух функций из $\mathrm{AM}(0, a\rangle$. В самом деле, так как $\alpha_0 = \lim\limits_{x\to 0+} g_0(x)$, функция g_0 разлагается в степенной ряд:

$$g_0(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k,$$

где $c_k \geq 0$ по условию.

Индукционный переход от $m - 1$ к m таков:

$$\gamma_m = \left(\frac{\psi - P_{m-1}(\psi)}{\varphi_m} - \alpha_m\right) g_{m+1} = (\gamma_{m-1} - \alpha_m) g_{m+1}$$

принадлежит $\mathrm{AM}(0, a\rangle$ снова как произведение двух функций из $\mathrm{AM}(0, a\rangle$.

§ 3. Точные неравенства общего вида для целых функций конечной степени

Пусть $\lambda, \mu \in C[-\pi, \pi]$, на множестве $\mathbf{V}_\sigma$ функций вида (5) заданы операторы

$$U(f, x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda\left(\frac{\pi y}{\sigma}\right) e^{ixy}\, d\rho(f, y), \tag{6}$$

$$V(f, x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mu\left(\frac{\pi y}{\sigma}\right) e^{ixy}\, d\rho(f, y). \tag{7}$$

Ясно, что $U, V : \mathbf{V}_\sigma \to \mathbf{V}_\sigma$. Остановимся на вопросе о выполнении неравенства вида

$$P(U(f)) \le MP(V(f))$$

$((\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma,\ f \in \mathbf{V}_\sigma)$ и о наилучшей постоянной M в этом неравенстве.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu \in C[-\pi, \pi]$,

$$g(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) e^{i(l+\alpha)u}, \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_l^{(\alpha)}(g)| < \infty,$$

$\lambda(u) = g(u)\mu(u)$ *при* $|u| \le \pi$, $\sigma > 0$, $f \in \mathbf{V}_\sigma$, *операторы* U *и* V *определены формулами* (6) *и* (7). *Тогда*

$$U(f, x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) V\left(f, x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{8}$$

Если, кроме того, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $V(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$, *то* $U(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$ *и*

$$P(U(f)) \le P(V(f)) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right|. \tag{9}$$

Доказательство. Подставляя в формулу (6) разложение функции g в ряд Фурье и интегрируя ряд почленно, что законно в силу его равномерной сходимости, приходим к равенству (8):

$$U(f, x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) e^{i(l+\alpha)\frac{\pi y}{\sigma}} e^{ixy}\, d\rho(V(f), y)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i(x+(l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma})y}\, d\rho(V(f), y) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) V\left(f, x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Ряд в правой части сходится в себе по полунорме P и к $U(f, x)$ равномерно, поэтому по свойствам пространства класса Λ_σ функция $U(f)$ принадлежит $\mathfrak{M}_\sigma$, ряд сходится к $U(f, x)$ по полунорме P и выполняется неравенство (9).

Следствие 1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(\lambda) e^{i(l+\alpha)u}, \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| < \infty,$$

$\sigma > 0$, $f \in \mathbf{V}_\sigma$, *оператор* U *определен формулой* (6). *Тогда*

$$U(f, x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(\lambda) f\left(x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{10}$$

Если, кроме того, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, *то* $U(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$ *и*

$$P(U(f)) \le P(f) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right|. \tag{11}$$

Для доказательства достаточно положить $\mu \equiv 1$ в лемме 3.

Во многих случаях соотношения (8)–(11) выполняются на классе $\mathbf{B}_\sigma$, более широком, чем $\mathbf{V}_\sigma$.

Будем говорить, что последовательность функций f_n, заданных на $\mathbb{R}$, *ограниченно локально равномерно сходится к функции* f, если $f_n \to f$ равномерно на любом отрезке и функции f_n ограничены общей постоянной $\|f_n\|_{\mathbb{R}} \le K$.

Будем говорить, что оператор $V : \mathbf{B}_\sigma \to CB(\mathbb{R})$ *замкнут относительно ограниченной локально равномерной сходимости*, если из того, что последовательность f_n ограниченно локально равномерно сходится к f, а последовательность $V(f_n)$ ограниченно локально равномерно сходится к h, следует, что $h = V(f)$ для любых функций $\{f_n\}$, $f \in \mathbf{B}_\sigma$ и $h \in CB(\mathbb{R})$.

Примерами операторов, замкнутых относительно ограниченной локально равномерной сходимости, помимо непрерывных операторов из $CB(\mathbb{R})$ в $CB(\mathbb{R})$ служат операторы дифференцирования D^r.

Лемма 4. *Пусть оператор $U : \mathbf{B}_\sigma \to CB(\mathbb{R})$ на функциях из $\mathbf{V}_\sigma$ задается формулой* (6) *и замкнут относительно ограниченной локально равномерной сходимости. Тогда в условиях следствия* 1 *требование $f \in \mathbf{V}_\sigma$ можно заменить требованием $f \in \mathbf{B}_\sigma$.*

Доказательство. Обозначим через $h(x)$ сумму ряда в правой части (10). Известно, что для всякой функции $f \in \mathbf{B}_\sigma$ существует последовательность функций f_n из $\mathbf{V}_\sigma$ (полиномов Левитана, см. [2, с. 193–199]) такая, что $f_n \to f$ равномерно на любом отрезке и $\|f_n\| \le \|f\|$. Тогда

$$U(f_n, x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(\lambda) f_n\left(x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right), \quad \|U(f_n)\| \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| \|f\|.$$

Докажем, что $U(f_n) \to h$ равномерно на любом отрезке $[a, b]$; тогда ввиду замкнутости U можно будет заключить, что $U(f) = h$. Зафиксировав $\varepsilon > 0$, подберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{|l|>N} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| \|f\| < \frac{\varepsilon}{4}$, и обозначим $[a_N, b_N] = \left[a + (\alpha - N)\frac{\pi}{\sigma}, b + (\alpha + N)\frac{\pi}{\sigma}\right]$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} |U(f_n, x) - h(x)| &\le \sum_{|l|>N} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| \|f_n - f\| \\ &\quad + \sum_{l=-N}^{N} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| \left|(f_n - f)\left(x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right)\right| \\ &\le 2 \sum_{|l|>N} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right| \|f\| + \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(\lambda)\right|\right) \|f_n - f\|_{[a_N, b_N]}. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться равномерной сходимостью f_n к f на $[a_N, b_N]$ и подобрать такое n_0, что для всех n, больших n_0, второе слагаемое меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Замечание 2. В условиях следствия 1 равенство (10) служит естественным способом продолжить оператор U на множество $\mathbf{B}_\sigma$.

Лемма 5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$g(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) e^{i(l+\alpha)u}, \quad \mu(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\beta)}(\mu) e^{i(l+\beta)u},$$

$\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| < \infty$, $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\beta)}(\mu)\right| < \infty$, $\lambda(u) = g(u)\mu(u)$ *при* $|u| \le \pi$, $\sigma > 0$, *операторы $U, V : \mathbf{B}_\sigma \to CB(\mathbb{R})$ на функциях из $\mathbf{V}_\sigma$ задаются формулами* (6), (7) *и замкнуты относительно ограниченной локально равномерной сходимости. Тогда равенство* (8) *выполняется для любой $f \in \mathbf{B}_\sigma$. Если, кроме того, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, то $U(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$ и выполнено неравенство* (9).

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{V}_\sigma$ ограниченно локально равномерно сходится к f. По лемме 3

$$U(f_n, x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^{(\alpha)}(g) V\left(f_n, x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right),$$

а по лемме 4 последовательность $V(f_n)$ ограниченно локально равномерно сходится к $V(f)$ и $V(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$. Остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 4, заменив λ на g, f_n на $V(f_n)$, f на $V(f)$.

Лемма 6. 1. *Если $g \in C[-\pi, \pi]$, $e^{-i\alpha\pi} g(\pi) = e^{i\alpha\pi} g(-\pi)$ и для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

$$\varepsilon(-1)^l c_l^{(\alpha)}(g) \geq 0 \quad \text{при всех } l \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

то ряд $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right|$ сходится к сумме $|g(\pi)|$. Таким образом, в этом случае в условиях леммы 3 сходимости ряда можно не предполагать.

2. *Если в условиях леммы 3 при некотором $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ выполнено условие (12), а функция $f_\sigma^*(x) = ae^{i\sigma x} + be^{-i\sigma x}$ ($a, b \in \mathbb{C}$) принадлежит $\mathfrak{M}_\sigma$, то для нее неравенство (9) обращается в равенство.*

Доказательство. 1. Не уменьшая общности, будем считать, что $|\varepsilon| = 1$. Функция $\varphi(u) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\alpha(u-\pi)} g(u-\pi)$ принадлежит C,

$$\varphi(u) \sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{ilu},$$

где $\gamma_l = \varepsilon(-1)^l c_l^{(\alpha)}(g) \geq 0$. Имеем

$$\|\varphi\| \geq \|F_{2n}(\varphi)\| \geq \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} S_k(\varphi, 0) \geq \frac{1}{2} S_n(\varphi, 0) = \frac{1}{2} \sum_{l=-n}^{n} \gamma_l$$

(здесь $F_{2n}(\varphi)$ — сумма Фейера, $S_k(\varphi)$ — сумма Фурье функции φ). Следовательно, ряд $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l$ сходится, ряд Фурье функции φ сходится равномерно и абсолютно к φ и, в частности, при $u = 0$ сходится к $\varphi(0) = |g(\pi)|$.

2. Действительно, для функции f_σ^* имеем

$$V(f_\sigma^*, x) = a\mu(\pi)e^{i\sigma x} + b\mu(-\pi)e^{-i\sigma x}, \ V\left(f_\sigma^*, x + (l+\alpha)\frac{\pi}{\sigma}\right) = (-1)^l V\left(f_\sigma^*, x + \frac{\alpha\pi}{\sigma}\right),$$

$$U(f_\sigma^*, x) = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l c_l^{(\alpha)}(g)\right) V\left(f_\sigma^*, x + \frac{\alpha\pi}{\sigma}\right),$$

поэтому

$$P(U(f_\sigma^*)) = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right|\right) P(V(f_\sigma^*)) = |g(\pi)| P(V(f_\sigma^*)).$$

Сразу выведем из общих результатов неравенство Бернштейна.

Следствие 2. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$. Тогда $f^{(r)} \in \mathfrak{M}_\sigma$ и $P(f^r) \leq \sigma^r P(f)$.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму при $r = 1$. Для $U(f) = f'$ будет $\lambda(x) = i\frac{\sigma}{\pi} x$. Возьмем $\alpha = 1/2$. Учитывая, что

$$(-1)^l c_l^{(1/2)}(\lambda) = \frac{\sigma}{\pi^2 (l + 1/2)^2} > 0,$$

по следствию 1 и лемме 6 получаем требуемое.

Примерами пространств $(\mathfrak{M}_\sigma, P)$, содержащих функции f_σ^*, являются пространство $(\mathbf{B}_\sigma, \|\cdot\|)$ и (при $\sigma = n \in \mathbb{N}$) пространства тригонометрических многочленов (H_n, P) с произвольной полунормой P, инвариантной относительно сдвига. Пусть $L_{p\sigma}$ $(1 \le p < \infty)$ — множество целых функций степени не выше σ, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$. Известно [2, с. 191–193], что $L_{p\sigma} \subset \mathbf{B}_\sigma$. Функции f_σ^* (при $|a| + |b| \neq 0$) не принадлежат $L_{p\sigma}$.

Лемма 7. *Если в условиях леммы 3 выполнено условие* (12), $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\beta)}(\mu)\right| < \infty$ *при некотором* $\beta \in \mathbb{R}$ *и для любого* $\delta > 0$ *функция* μ *— не тождественный нуль на* $(-\pi, -\pi + \delta)$ *или на* $(\pi - \delta, \pi)$, *то неравенство* (9) *точно в пространстве* $(L_{p\sigma}, \|\cdot\|_p)$.

Доказательство. Пусть $M = \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right|$, $\tau \in (0, \sigma)$, $d(t) = 0$ при всех $t \notin (0,1)$, $d(t) > 0$ при всех $t \in (0,1)$, $d \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Положим

$$f_\tau(x) = \int\limits_0^1 d(y) e^{i(\sigma - \tau y)x}\, dy.$$

Ясно, что $f_\tau \in L_{p\sigma}$. Тогда

$$V(f_\tau, x) = \int\limits_0^1 \mu\left(\pi - \frac{\pi\tau y}{\sigma}\right) d(y) e^{i(\sigma - \tau y)x}\, dy,$$

$V(f_\tau) \in L_{p\sigma}$ по следствию 1, функция $V(f_\tau)$ ненулевая как преобразование Фурье ненулевой функции. Далее, по равенству (8), инвариантности нормы в $L_p(\mathbb{R})$ относительно сдвига и неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} \|U(f_\tau)\|_p &= \left\| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| (-1)^l V\left(f_\tau, \cdot + \frac{l\pi}{\sigma}\right) \right\|_p \\ &\ge M\,\|V(f_\tau)\|_p - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| \left\| (-1)^l V\left(f_\tau, \cdot + \frac{l\pi}{\sigma}\right) - V(f_\tau) \right\|_p . \end{aligned}$$

При каждом $l \in \mathbb{Z}$ будет

$$(-1)^l V\left(f_\tau, x + \frac{l\pi}{\sigma}\right) = e^{i\sigma x} h_\tau\left(x + \frac{l\pi}{\sigma}\right),$$

где $h_\tau(x) = e^{-i\sigma x} V(f_\tau, x)$. Пользуясь равенством $|e^{i\sigma x}| = 1$, теоремой о конечных приращениях и применяя неравенство Бернштейна к функции h_τ, принадлежащей $L_{p\tau}$, находим

$$\left\| (-1)^l V\left(f_\tau, \cdot + \frac{l\pi}{\sigma}\right) - V(f_\tau) \right\|_p \le \frac{|l|\pi}{\sigma}\|h_\tau'\|_p \le \frac{|l|\pi}{\sigma}\tau\|h_\tau\|_p = \frac{|l|\pi}{\sigma}\tau\|V(f_\tau)\|_p. \tag{13}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{|l|>N} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$\sum_{|l|>N} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| \left\| (-1)^l V\left(f_\tau, \cdot + \frac{l\pi}{\sigma}\right) - V(f_\tau) \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}\|V(f_\tau)\|_p.$$

Теперь если $\tau < \frac{\sigma\varepsilon}{2MN\pi}$, то в силу (13) также

$$\sum_{l=-N}^{N} \left|c_l^{(\alpha)}(g)\right| \left\|(-1)^l V\left(f_\tau, \cdot + \frac{l\pi}{\sigma}\right) - V(f_\tau)\right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}\|V(f_\tau)\|_p.$$

Таким образом, для этих τ

$$\|U(f_\tau)\|_p \geq (M-\varepsilon)\|V(f_\tau)\|_p,$$

что доказывает точность неравенства (9) для комплексных пространств $L_{p\sigma}$. Для доказательства точности в вещественном случае можно воспользоваться вещественной или мнимой частью функций f_τ.

В [2, с. 190, 191] таким же способом доказана точность неравенства Бернштейна в $L_{p\sigma}$.

Далее мы не будем каждый раз отмечать точность установленных неравенств для конкретных операторов.

Лемма 8. *Если функция g принадлежит L и выпукла вниз на $(-\pi,\pi)$, то $(-1)^l a_l(g) \geq 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$.*

Утверждение о неотрицательности $a_l(g)$ для выпуклой на $(0,2\pi)$ функции $g \in L$ содержится в [16, с. 35]; утверждение леммы 8 получается из него сдвигом аргумента на π.

Лемма 9. *Пусть $g \in C$ четна, неотрицательна и выпукла вниз на $(-\pi,\pi)$, $\mu \in C[-\pi,\pi]$, $\lambda(u) = g(u)\mu(u)$ при $|u| \leq \pi$, $\sigma > 0$, $f \in \mathbf{V}_\sigma$, операторы U и V определены формулами (6) и (7), $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $V(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$. Тогда $U(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$ и*

$$P(U(f)) \leq g(\pi)P(V(f)).$$

Доказательство. При всех $l \in \mathbb{Z}_+$ будет $a_l(g) \geq 0$ (при $l=0$ по неотрицательности g, а при $l \in \mathbb{N}$ по лемме 8). Так как $a_l(g) = 2c_l^{(0)}(g)$, выполнено условие (12) при $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$. Поэтому $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(0)}(g)\right| = g(\pi)$. Остается применить лемму 3.

Замечание 3. Если $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left|c_l^{(\beta)}(\mu)\right| < \infty$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$, а операторы U, $V : \mathbf{B}_\sigma \to CB(\mathbb{R})$ на функциях из $\mathbf{V}_\sigma$ задаются формулами (6), (7) и замкнуты относительно ограниченной локально равномерной сходимости, то требование $f \in \mathbf{V}_\sigma$ в лемме 9 можно заменить требованием $f \in \mathbf{B}_\sigma$.

Для доказательства этого добавления к лемме 9 надо на заключительном шаге сослаться на лемму 5.

Метод получения неравенств для операторов вида (6) и (7) с помощью разложения функции g в ряд Фурье применялся для различных пространств функций, в том числе тригонометрических полиномов, и для различных операторов в статьях [17, 6] и монографиях [18, с. 132, 133; 1, с. 229; 3, с. 112–115].

§ 4. Построение формул типа численного дифференцирования и оценки их погрешностей

4.1. Пусть $\psi, \varphi_\nu \in C[-\pi,\pi]$, $\psi = g_0\varphi_0$, $\varphi_{\nu-1} = g_\nu\varphi_\nu$, $g_\nu(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$ при всех $\nu \in \mathbb{N}$; функция ψ разлагается в асимптотический ряд по системе $\{\varphi_\nu\}$ при $x \to 0$:

$$\psi(x) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \varphi_\nu(x),$$

при всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$ функции g_ν принадлежат $\mathrm{AM}(0,\pi]$ и четны. Введем операторы

$$U(f,x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi\left(\frac{\pi y}{\sigma}\right) e^{ixy}\, d\rho(f,y), \tag{14}$$

$$V_\nu(f,x) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi_\nu\left(\frac{\pi y}{\sigma}\right) e^{ixy}\, d\rho(f,y), \tag{15}$$

$$W_m = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu V_\nu. \tag{16}$$

Рассмотрим вопрос об оценке погрешности $U - W_m$ разложения оператора U по операторам V_ν через следующий член V_{m+1} этого разложения на классе $\mathbf{V}_\sigma$.

Теорема 1. *Пусть $m+1 \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$, $f \in \mathbf{V}_\sigma$, функции ψ и φ_ν удовлетворяют перечисленным выше условиям, операторы U, V_ν и W_m определены формулами* (14)–(16), $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $V_{m+1}(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$. *Тогда* $U(f) - W_m(f) \in \mathfrak{M}_\sigma$ *и*

$$P(U(f) - W_m(f)) \le \frac{\psi(\pi) - \sum\limits_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \varphi_\nu(\pi)}{\varphi_{m+1}(\pi)} P(V_{m+1}(f)).$$

Доказательство. Положим $\lambda = \psi - \sum\limits_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu \varphi_\nu$, $\mu = \varphi_{m+1}$. Функция $g = \lambda/\mu$ четна, принадлежит $\mathrm{AM}(0,\pi]$ по лемме 2, неотрицательна и выпукла вниз на $[-\pi,\pi]$ по замечанию 1. Остается применить лемму 9, взяв в качестве операторов U и V соответственно $U - W_m$ и V_{m+1}.

Замечание 4. Если $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \left| c_l^{(\beta)}(\varphi_\nu) \right| < \infty$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$, а операторы U, $V_\nu : \mathbf{B}_\sigma \to CB(\mathbb{R})$ на функциях из $\mathbf{V}_\sigma$ задаются формулами (14), (15) и замкнуты относительно ограниченной локально равномерной сходимости, то требование $f \in \mathbf{V}_\sigma$ в теореме 1 можно заменить требованием $f \in \mathbf{B}_\sigma$.

Это замечание аналогично замечанию 3.

Введем операторы центральной разности и среднего арифметического функции f с шагом h:

$$\delta_h^1(f,x) = \delta_h(f,x) = f(x+h/2) - f(x-h/2),$$

$$\delta_h^r(f) = \delta_h\big(\delta_h^{r-1}(f)\big), \quad \Box_h(f,x) = \frac{f(x+h/2) + f(x-h/2)}{2}.$$

Ясно, что если $f \in \mathbf{V}_\sigma$, $r \in \mathbb{N}$, то $d\rho(f^{(r)}, y) = (iy)^r d\rho(f,y)$,

$$d\rho(\Box_h(f), y) = \cos\frac{hy}{2}\, d\rho(f,y), \quad d\rho(\delta_h^r(f), y) = \left(2i \sin\frac{hy}{2}\right)^r d\rho(f,y).$$

Эти операторы удовлетворяют условиям замечания 4, что далее не будет отдельно отмечаться.

Следующее замечание, мотивирующее описанный подход к построению формул типа численного дифференцирования, имеет тривиальный характер.

Замечание 5. Пусть на множестве функций $f_p(x) = e^{ipx}$ $(p \in \mathbb{R})$ заданы операторы U и V, причем $U(f_p, x) = \psi(p) f_p(x)$, $V(f_p, x) = \varphi(p) f_p(x)$. Тогда для того чтобы выполнялось неравенство $\|U(f_p)\|_{\mathbb{R}} \le M \|V(f_p)\|_{\mathbb{R}}$ при всех $p \in \mathbb{R}$, необходимо, чтобы $\psi(p) = O(\varphi(p))$ при $p \to 0$.

Обычно при построении формул численного дифференцирования применяется подход, основанный на интерполировании: за приближенное выражение производной функции принимается производная интерполяционного многочлена этой функции. При этом приближенное выражение для производной записывается в виде разложения по разностям функции, а остаточный член допускает оценку через норму производной более высокого порядка (для достаточно гладких функций). Согласно замечанию 5 в таких формулах коэффициенты необходимо определяются как коэффициенты соответствующих асимптотических разложений.

4.2. Рассмотрим разложение r-й производной функции по разностям самой функции начиная с r-й разности:

$$f^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu^{(r)} \delta_h^{r+2\nu}(f) + R_m(f),$$

где остаточный член допускает оценку

$$\|R_m(f)\|_{\mathbb{R}} \le M \|f^{(r+2m+2)}\|_{\mathbb{R}}$$

для f, принадлежащих множеству $\{e^{ipx}\}_{p\in\mathbb{R}}$. Такая формула известна [14, с. 69, 70]: при четных r она называется *формулой Бесселя*, а при нечетных r — *формулой Стирлинга численного дифференцирования*. Тогда согласно замечанию 5 коэффициенты $\alpha_\nu^{(r)}$ (которые зависят еще и от h) определяются асимптотическим разложением

$$(ix)^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^{(r)} \left(2i \sin \frac{hx}{2}\right)^{r+2\nu},$$

или, если положить $2i \sin \frac{hx}{2} = z$, $\beta_\nu^{(r)} = h^r \alpha_\nu^{(r)}$,

$$\left(\frac{\ln(z/2 + \sqrt{1+z^2/4})}{z/2}\right)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(r)} z^{2\nu}.$$

Для коэффициентов $\beta_\nu^{(r)}$ (которые уже не зависят от h) справедливы равенства (см., например, [14, с. 186, 61, 194; 19, с. 712, формула 5.2.13.10, с. 714, формула 5.2.14.3])

$$\beta_0^{(r)} = 1, \quad \beta_1^{(r)} = -\frac{r}{24}, \quad \beta_\nu^{(1)} = (-1)^\nu \frac{((2\nu-1)!!)^2}{2^{2\nu}(2\nu+1)!},$$

$$\beta_\nu^{(2)} = (-1)^\nu \frac{2(\nu!)^2}{(2\nu+2)!}, \quad \beta_\nu^{(r+1)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \beta_\mu^{(r)} \beta_{\nu-\mu}^{(1)}, \quad \beta_\nu^{(r)} = \frac{D^r O^{[r+2\nu]}}{(r+2\nu)!}.$$

В последнем равенстве, как в [14], символом $D^r O^{[r+2\nu]}$ обозначена производная порядка r центрального факториала $x^{[r+2\nu]} = x(x + (r+2\nu)/2 - 1)\dots(x - (r + 2\nu)/2 + 1)$ в нуле.

Теорема 2. *Пусть* $m+1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r} \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu^{(r)} \delta_h^{r+2\nu}(f)\right) \le \frac{\sigma^r - \frac{1}{h^r} \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \beta_\nu^{(r)} \left(2 \sin \frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2\nu}}{\left(2 \sin \frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2m+2}} P\left(\delta_h^{r+2m+2}(f)\right). \quad (17)$$

Доказательство. Положим $U(f) = f^{(r)}$, $V_\nu = (-1)^\nu \delta_h^{r+2\nu}$. Тогда

$$\psi(x) = \left(i\frac{\sigma}{\pi}x\right)^r, \quad \varphi_\nu(x) = (-1)^\nu \left(2i\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x\right)^{r+2\nu} \quad (\nu \in \mathbb{Z}_+),$$

$$g_0(x) = \left(\frac{\sigma x/\pi}{2\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x}\right)^r, \quad g_\nu(x) = \frac{1}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x\right)^2} \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Согласно лемме 1 $g_\nu \in \mathrm{AM}(0,\pi]$, поэтому можно применить теорему 1.

Следствие 3. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P(f^{(r)}) \le \left(\frac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma h}{2}}\right)^r P\bigl(\delta_h^r(f)\bigr), \tag{18}$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f)\right) \le \frac{\sigma^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2}} P\bigl(\delta_h^{r+2}(f)\bigr), \tag{19}$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\left(\delta_h^r(f) - \frac{r}{24}\delta_h^{r+2}(f)\right)\right) \le \frac{\sigma^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \left(1 + \frac{r}{24}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^2\right)}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+4}} P\bigl(\delta_h^{r+4}(f)\bigr).$$

Для доказательства следствия 3 надо положить $m = -1, 0, 1$ в теореме 2. Неравенство (4) следует из (19), если применить неравенство треугольника.

Особенно простой вид принимает теорема 2 при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ и $h = \frac{\pi}{2\sigma}$.

Следствие 4. *Пусть* $m + 1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^r \sum_{\nu=0}^m \beta_\nu^{(r)} \delta_{\pi/\sigma}^{r+2\nu}(f)\right) \le \sigma^r \frac{1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^r \sum\limits_{\nu=0}^m (-1)^\nu 2^{2\nu} \beta_\nu^{(r)}}{2^{r+2m+2}} P\bigl(\delta_{\pi/\sigma}^{r+2m+2}(f)\bigr),$$

$$P\left(f^{(r)} - \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^r \sum_{\nu=0}^m \beta_\nu^{(r)} \delta_{\pi/2\sigma}^{r+2\nu}(f)\right) \le \sigma^r \frac{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^r \sum\limits_{\nu=0}^m (-1)^\nu 2^{\nu} \beta_\nu^{(r)}}{2^{r/2+m+1}} P\bigl(\delta_{\pi/2\sigma}^{r+2m+2}(f)\bigr).$$

Замечание 6. Обозначим

$$M_m^{(r)}(\theta) = \frac{1}{\theta^r} \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \beta_\nu^{(r)} \left(2\sin\frac{\theta\pi}{2}\right)^{r+2\nu}.$$

Тогда константа в правой части теоремы 2 при $h = \frac{\theta\pi}{\sigma}$, $0 < \theta < 2$, может быть записана в виде

$$\sigma^r \frac{1 - \frac{1}{\pi^r} M_m^{(r)}(\theta)}{\left(2\sin\frac{\theta\pi}{2}\right)^{r+2m+2}}.$$

Лемма 10. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h \le \frac{\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\bigl(\delta_h^r(f)\bigr) \le \left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r P(f).$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму при $r = 1$. Применяя леммы 3 и 6 к функции $g(u) = 2i\sin\frac{\sigma h}{2\pi}u$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ и учитывая, что

$$(-1)^l c_l^{(1/2)}(g) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{\sigma h}{2}\left(\frac{1}{l + \frac{1}{2} - \frac{\sigma h}{2\pi}} - \frac{1}{l + \frac{1}{2} + \frac{\sigma h}{2\pi}}\right) > 0,$$

получаем требуемое.

Лемму 10 для равномерной нормы см. в [1, с. 228].

Замечание 7. Неравенство Бернштейна (следствие 2), доказанное в § 3 непосредственным применением леммы 3, может быть получено также сопоставлением неравенства (18) и леммы 10.

Замечание 8. При $0 < h \le \frac{\pi}{\sigma}$ каждое следующее неравенство в теореме 2 усиливает предыдущее. Действительно, обозначим для краткости через s_m константу в правой части (17) и предположим, что неравенство (17) выполнено для $m+1$. Пользуясь неравенством треугольника, леммой 10 при $r=2$ и учитывая, что $(-1)^\nu\beta_\nu^{(r)} > 0$, получаем

$$\begin{aligned} &P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{m}\beta_\nu^{(r)}\delta_h^{r+2\nu}(f)\right) \\ &\quad\le P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{m+1}\beta_\nu^{(r)}\delta_h^{r+2\nu}(f)\right) + \frac{(-1)^{m+1}\beta_{m+1}^{(r)}}{h^r}P\left(\delta_h^{r+2m+2}(f)\right) \\ &\quad\le s_{m+1}P\left(\delta_h^{r+2m+4}(f)\right) + \frac{(-1)^{m+1}\beta_{m+1}^{(r)}}{h^r}P\left(\delta_h^{r+2m+2}(f)\right) \\ &\quad\le \left(s_m + \frac{(-1)^{m+1}\beta_{m+1}^{(r)}}{h^r}\right)P\bigl(\delta_h^{r+2m+2}(f)\bigr) = s_m P\bigl(\delta_h^{r+2m+2}(f)\bigr). \end{aligned}$$

4.3. Рассмотрим разложение r-й производной функции по средним разностей самой функции начиная с r-й разности:

$$f^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{m}\gamma_\nu^{(r)}\Box_h\delta_h^{r+2\nu}(f) + R_m(f),$$

где остаточный член допускает оценку

$$\|R_m(f)\|_{\mathbb{R}} \le M\|f^{(r+2m+2)}\|_{\mathbb{R}}$$

на множестве $\{e^{ipx}\}_{p\in\mathbb{R}}$. Эта формула также известна [14, с. 69, 70]: при четных r она называется *формулой Стирлинга*, а при нечетных r — *формулой Бесселя численного дифференцирования*. Согласно замечанию 5 коэффициенты $\gamma_\nu^{(r)}$ (которые зависят еще и от h) определяются асимптотическим разложением

$$(ix)^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu^{(r)}\cos\frac{hx}{2}\left(2i\sin\frac{hx}{2}\right)^{r+2\nu},$$

или, если положить $2i\sin\frac{hx}{2} = z$, $\varepsilon_\nu^{(r)} = h^r\gamma_\nu^{(r)}$,

$$\left(\frac{\ln(z/2+\sqrt{1+z^2/4})}{z/2}\right)^r\frac{1}{\sqrt{1+z^2/4}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu^{(r)}z^{2\nu}.$$

Для коэффициентов $\varepsilon_\nu^{(r)}$ имеют место формулы [14, с. 187, 195]

$$\varepsilon_0^{(r)} = 1, \quad \varepsilon_1^{(r)} = -\frac{1}{8} - \frac{r}{24}, \quad \varepsilon_\nu^{(1)} = (-1)^\nu\frac{(\nu!)^2}{(2\nu+1)!},$$

$$\varepsilon_\nu^{(r+1)} = \sum_{\mu=0}^{\nu}\varepsilon_\mu^{(r)}\beta_{\nu-\mu}^{(1)}, \quad \varepsilon_\nu^{(r)} = \frac{D^{r+1}O^{[r+1+2\nu]}}{(r+2\nu)!(r+1)}.$$

Теорема 3. *Пусть* $m+1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{m} \varepsilon_\nu^{(r)} \square_h \delta_h^{r+2\nu}(f)\right) \le \frac{\sigma^r - \frac{1}{h^r}\sum\limits_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \varepsilon_\nu^{(r)} \cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2\nu}}{\cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2m+2}} P\left(\square_h \delta_h^{r+2m+2}(f)\right).$$

Доказательство. Положим $U(f) = f^{(r)}$, $V_\nu = (-1)^\nu \square_h \delta_h^{r+2\nu}$. Тогда $\psi(x) = \left(i\frac{\sigma}{\pi}x\right)^r$,

$$\varphi_\nu(x) = (-1)^\nu \cos\frac{\sigma h}{2\pi}x\left(2i\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x\right)^{r+2\nu} \quad (\nu \in \mathbb{Z}_+),$$

$$g_0(x) = \frac{1}{\cos\frac{\sigma h}{2\pi}x}\left(\frac{\sigma x/\pi}{2\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x}\right)^r, \quad g_\nu(x) = \frac{1}{\cos\frac{\sigma h}{2\pi}x\left(2\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x\right)^2} \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Согласно лемме 1 $g_\nu \in \mathrm{AM}(0,\pi]$, поэтому можно применить теорему 1.

Следствие 5. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P(f^{(r)}) \le \frac{1}{\cos\frac{\sigma h}{2}}\left(\frac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma h}{2}}\right)^r P\big(\square_h \delta_h^r(f)\big),$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\square_h \delta_h^r(f)\right) \le \frac{\sigma^r - \cos\frac{\sigma h}{2}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r}{\cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2}} P\big(\square_h \delta_h^{r+2}(f)\big),$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\left(\square_h \delta_h^r(f) - \left(\frac{1}{8} + \frac{r}{24}\right)\square_h \delta_h^{r+2}(f)\right)\right) \le \frac{\sigma^r - \cos\frac{\sigma h}{2}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r\left(1 + \left(\frac{1}{8}+\frac{r}{24}\right)\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^2\right)}{\cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+4}} P\big(\square_h \delta_h^{r+4}(f)\big).$$

Для доказательства следствия 5 надо положить $m = -1$, 0 и 1 в теореме 3.

Особенно простой вид принимает теорема 3 при $h = \frac{\pi}{2\sigma}$.

Следствие 6. *Пусть* $m+1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^r \sum_{\nu=0}^{m} \varepsilon_\nu^{(r)} \square_{\pi/2\sigma} \delta_{\pi/2\sigma}^{r+2\nu}(f)\right) \le \sigma^r \frac{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)^r \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu 2^{\nu+1/2} \varepsilon_\nu^{(r)}}{2^{\frac{r+1}{2}+m+1}} P\big(\square_{\pi/2\sigma} \delta_{\pi/2\sigma}^{r+2m+2}(f)\big).$$

Замечание 9. Обозначим

$$N_m^{(r)}(\theta) = \frac{1}{\theta^r}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \varepsilon_\nu^{(r)} \cos\frac{\theta\pi}{2}\left(2\sin\frac{\theta\pi}{2}\right)^{r+2\nu}.$$

Тогда константа в теореме 3 при $h = \frac{\theta\pi}{n}$, $0 < \theta < 1$, может быть записана в виде

$$\sigma^r \frac{1 - \frac{1}{\pi^r} N_m^{(r)}(\theta)}{\cos\frac{\theta\pi}{2}\left(2\sin\frac{\theta\pi}{2}\right)^{r+2m+2}}.$$

4.4. В неравенствах теорем 2 и 3 можно заменить в левой части производную разностью с шагом u, меньшим h. Пусть коэффициенты $\zeta_\nu^{(r)}$ и $\varkappa_\nu^{(r)}$ определяются асимптотическими разложениями

$$\left(2i\sin\frac{ux}{2}\right)^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\zeta_\nu^{(r)}\left(2i\sin\frac{hx}{2}\right)^{r+2\nu},$$

$$\left(2i\sin\frac{ux}{2}\right)^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\varkappa_\nu^{(r)}\cos\frac{hx}{2}\left(2i\sin\frac{hx}{2}\right)^{r+2\nu},$$

или, если положить $2i\sin\frac{hx}{2}=z$, $\tau=\frac{u}{h}$,

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\tau\ln(z/2+\sqrt{1+z^2/4})\right)}{z/2}\right)^r=\sum_{\nu=0}^{\infty}\zeta_\nu^{(r)}z^{2\nu},$$

$$\frac{\operatorname{ch}(\tau\ln(z/2+\sqrt{1+z^2/4}))}{\sqrt{1+z^2/4}}\left(\frac{\operatorname{sh}(\tau\ln(z/2+\sqrt{1+z^2/4}))}{z/2}\right)^r=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varkappa_\nu^{(r)}z^{2\nu}.$$

Ясно, что $\zeta_0^{(r)}=\varkappa_0^{(r)}=\tau^r$,

$$\zeta_1^{(r)}=-\frac{r}{24}(1-\tau^2)\tau^r,\quad \varkappa_1^{(r)}=\left(-\frac{1}{8}-\frac{r}{24}\right)(1-\tau^2)\tau^r,$$

$$\zeta_\nu^{(r+1)}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\zeta_\mu^{(r)}\zeta_{\nu-\mu}^{(1)},\ \varkappa_\nu^{(r+1)}=\sum_{\mu=0}^{\nu}\varkappa_\mu^{(r)}\zeta_{\nu-\mu}^{(1)},\quad \beta_\nu^{(r)}=\lim_{\tau\to0}\frac{\zeta_\nu^{(r)}}{\tau^r},\ \varepsilon_\nu^{(r)}=\lim_{\tau\to0}\frac{\varkappa_\nu^{(r)}}{\tau^r}.$$

Из известного разложения [19, с. 706, формула 5.2.8.24]

$$\sin(\tau\arcsin x)=\tau\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1^2-\tau^2)(3^2-\tau^2)\dots((2\nu-1)^2-\tau^2)}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1},$$

пользуясь связью между тригонометрическими и гиперболическими функциями $\arcsin iz=i\ln(z+\sqrt{1+z^2})$, $\sin iz=i\operatorname{sh}z$, получаем

$$\zeta_\nu^{(1)}=(-1)^\nu\tau\frac{(1^2-\tau^2)(3^2-\tau^2)\dots((2\nu-1)^2-\tau^2)}{2^{2\nu}(2\nu+1)!}.$$

Отметим еще без доказательства, что

$$\varkappa_\nu^{(1)}=(-1)^\nu\tau\frac{(1^2-\tau^2)(2^2-\tau^2)\dots(\nu^2-\tau^2)}{(2\nu+1)!}.$$

Теорема 4. *Пусть* $m+1\in\mathbb{Z}_+$, $r\in\mathbb{N}$, $\sigma>0$, $(\mathfrak{M}_\sigma,P)\in\Lambda_\sigma$, $f\in\mathfrak{M}_\sigma$, $0<u<h<\frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(\delta_u^r(f)-\sum_{\nu=0}^{m}\zeta_\nu^{(r)}\delta_h^{r+2\nu}(f)\right)\le\frac{\left(2\sin\frac{\sigma u}{2}\right)^r-\sum\limits_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu\zeta_\nu^{(r)}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2\nu}}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2m+2}}P\big(\delta_h^{r+2m+2}(f)\big).$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2, только в качестве оператора U вместо D^r берется δ_u^r. Тогда

$$\psi(x)=\left(2i\sin\frac{\sigma u}{2\pi}x\right)^r,\quad g_0(x)=\left(\frac{\sin\frac{\sigma u}{2\pi}x}{\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x}\right)^r,$$

φ_ν ($\nu\in\mathbb{Z}_+$) и g_ν ($\nu\in\mathbb{N}$), как в теореме 2. По-прежнему $g_\nu\in\mathrm{AM}(0,\pi]$ по лемме 1.

Следствие 7. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < u < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$\frac{P\big(\delta_u^r(f)\big)}{\sin^r \frac{\sigma u}{2}} \le \frac{P\big(\delta_h^r(f)\big)}{\sin^r \frac{\sigma h}{2}}, \tag{20}$$

$$P\left(\frac{1}{u^r}\delta_u^r(f) - \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f)\right) \le \frac{\left(\frac{2}{u}\sin\frac{\sigma u}{2}\right)^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2}} P\left(\delta_h^{r+2}(f)\right),$$

$$P\left(\frac{1}{u^r}\delta_u^r(f) - \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f) + \frac{r}{24}(h^2-u^2)\frac{1}{h^{r+2}}\delta_h^{r+2}(f)\right)$$
$$\le \frac{\left(\frac{2}{u}\sin\frac{\sigma u}{2}\right)^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r - \frac{r}{24}(h^2-u^2)\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2}}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+4}} P\left(\delta_h^{r+4}(f)\right).$$

Для доказательства следствия 7 надо положить $m = -1, 0, 1$ в теореме 4. Неравенство (20) отмечалось во введении (неравенство (3)).

Теорема 5. *Пусть* $m + 1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < u < h < \frac{\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(\Box_u\delta_u^r(f) - \sum_{\nu=0}^{m} \varkappa_\nu^{(r)} \Box_h \delta_h^{r+2\nu}(f)\right)$$
$$\le \frac{\cos\frac{\sigma u}{2}\big(2\sin\frac{\sigma u}{2}\big)^r - \sum\limits_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu \varkappa_\nu^{(r)} \cos\frac{\sigma h}{2}\big(2\sin\frac{\sigma h}{2}\big)^{r+2\nu}}{\cos\frac{\sigma h}{2}\big(2\sin\frac{\sigma h}{2}\big)^{r+2m+2}} P\big(\Box_h\delta_h^{r+2m+2}(f)\big).$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3, только в качестве оператора U вместо D^r берется δ_u^r. Тогда

$$\psi(x) = \left(2i\sin\frac{\sigma u}{2\pi}x\right)^r, \quad g_0(x) = \frac{1}{\cos\frac{\sigma h}{2\pi}x}\left(\frac{\sin\frac{\sigma u}{2\pi}x}{\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x}\right)^r,$$

φ_ν ($\nu \in \mathbb{Z}_+$) и g_ν ($\nu \in \mathbb{N}$), как в теореме 3. По-прежнему $g_\nu \in \mathrm{AM}(0,\pi]$ по лемме 1.

Следствие 8. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < u < h < \frac{\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$\frac{P\big(\Box_u\delta_u^r(f)\big)}{\cos\frac{\sigma u}{2}\left(2\sin\frac{\sigma u}{2}\right)^r} \le \frac{P\big(\Box_h\delta_h^r(f)\big)}{\cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r},$$

$$P\left(\frac{1}{u^r}\Box_u\delta_u^r(f) - \frac{1}{h^r}\Box_h\delta_h^r(f)\right)$$
$$\le \frac{\cos\frac{\sigma u}{2}\left(\frac{2}{u}\sin\frac{\sigma u}{2}\right)^r - \cos\frac{\sigma h}{2}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r}{\cos\frac{\sigma h}{2}\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^{r+2}} P\left(\Box_h\delta_h^{r+2}(f)\right),$$

$$P\left(\frac{\Box_u\delta_u^r(f)}{u^r} - \frac{\Box_h\delta_h^r(f)}{h^r} + \frac{3+r}{24}(h^2-u^2)\frac{\Box_h\delta_h^{r+2}(f)}{h^{r+2}}\right)$$
$$\le \frac{\cos\frac{\sigma u}{2}\big(\frac{2}{u}\sin\frac{\sigma u}{2}\big)^r - \cos\frac{\sigma h}{2}\Big(\big(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\big)^r + \frac{3+r}{24}(h^2-u^2)\big(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\big)^{r+2}\Big)}{\cos\frac{\sigma h}{2}\big(2\sin\frac{\sigma h}{2}\big)^{r+4}}$$
$$\times P\big(\Box_h\delta_h^{r+4}(f)\big).$$

Для доказательства следствия 8 надо положить $m = -1, 0, 1$ в теореме 5.

4.5. Рассмотрим разложение r-й производной функции по r-м разностям ее производных начиная с самой функции:

$$f^{(r)} \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^{(r)} \delta_h^r(f^{(2\nu)}),$$

где коэффициенты $\lambda_\nu^{(r)}$ (которые зависят еще и от h) определяются асимптотическим разложением

$$(ix)^r \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu^{(r)} \left(2i \sin\frac{hx}{2}\right)^r (ix)^{2\nu}.$$

При $r = 1$ эта формула представляет собой один из вариантов формулы Эйлера — Маклорена (примененной к производной, см. [3, с. 72–74]), а при $r > 1$ может быть получена ее итерацией. Коэффициенты в формуле Эйлера — Маклорена как раз определяются с помощью разложения функции $\frac{1}{\sin(hx/2)}$ в ряд Лорана.

Если положить $h^r \lambda_\nu^{(r)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2\nu} \rho_\nu^{(r)}$, то

$$\left(\frac{z}{\operatorname{sh} z}\right)^r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_\nu^{(r)} z^{2\nu}.$$

Для коэффициентов $\rho_\nu^{(r)}$ имеют место формулы (см. лемму 1 и обозначения перед ней)

$$\rho_0^{(r)} = 1,\ \rho_1^{(r)} = -\frac{r}{6},\ \rho_\nu^{(1)} = \frac{\mathscr{B}_{2\nu}}{(2\nu)!},\ \rho_\nu^{(2)} = \frac{2^{2\nu}(1-2\nu)B_{2\nu}(0)}{(2\nu)!},\ \rho_\nu^{(r+1)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \rho_\mu^{(r)} \rho_{\nu-\mu}^{(1)}.$$

Теорема 6. *Пусть* $m + 1 \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\sum_{\nu=0}^{m} \frac{h^{2\nu}\rho_\nu^{(r)}}{2^{2\nu}} \delta_h^r(f^{(2\nu)})\right) \le \frac{\sigma^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \sum\limits_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \left(\frac{\sigma h}{2}\right)^{2\nu} \rho_\nu^{(r)}}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \sigma^{2m+2}} P\big(\delta_h^r(f^{(2m+2)})\big).$$

Доказательство. Положим $U(f) = f^{(r)}$, $V_\nu(f) = (-1)^\nu \delta_h^r(f^{2\nu})$. Тогда

$$\psi(x) = \left(i\frac{\sigma}{\pi}x\right)^r, \quad \varphi_\nu(x) = \left(2i\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x\right)^r \left(\frac{\sigma}{\pi}x\right)^{2\nu} \quad (\nu \in \mathbb{Z}_+),$$

$$g_0(x) = \left(\frac{\sigma x/\pi}{2\sin\frac{\sigma h}{2\pi}x}\right)^r, \quad g_\nu(x) = \frac{1}{(\sigma x/\pi)^2} \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Согласно лемме 1 функции g_ν принадлежат $\mathrm{AM}(0,\pi]$, поэтому можно применить теорему 1.

Полагая $m = -1$ в теореме 6, снова приходим к неравенству (18).

Следствие 9. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $(\mathfrak{M}_\sigma, P) \in \Lambda_\sigma$, $f \in \mathfrak{M}_\sigma$, $0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}$. *Тогда*

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f)\right) \le \frac{\sigma^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \sigma^2} P\big(\delta_h^r(f'')\big), \tag{21}$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\left(\delta_h^r(f) - \frac{rh^2}{24}\delta_h^r(f'')\right)\right) \le \frac{\sigma^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \left(1 + \frac{r}{6}\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2\right)}{\left(2\sin\frac{\sigma h}{2}\right)^r \sigma^4} P\big(\delta_h^r(f^{(4)})\big).$$

Для доказательства следствия 9 надо положить m равным 0 и 1 в теореме 6. Неравенство (21) усиливает (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
3. *Жук В. В.* Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.
4. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений в 4-х т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1.
5. *Riesz M.* Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // J. Deutschen Math. 1914. Bd 23. S. 354–368.
6. *Boas R. P. Jr.* Quelques généralisations d'un théorème de S. Bernstein sur la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1948. V. 227. P. 618–619.
7. *Бернштейн С. Н.* Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1487–1490.
8. *Никольский С. М.* Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1507–1510.
9. *Стечкин С. Б.* Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514.
10. *Доронин В. Г.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов // Международная конференция «Теория приближений и гармонический анализ»: Тез. докл. Тула, 1998. С. 96–97.
11. *Виноградов О. Л., Жук В. В.* Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на тригонометрических многочленах // Проблемы математического анализа. 2000. № 21. С. 68–109.
12. *Виноградов О. Л.* Неравенства для производных тригонометрических многочленов. СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 2002.
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
14. *Стефенсен И. Ф.* Теория интерполяции. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
15. *Рыжик И. М., Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
16. *Харди Г. Х., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1959.
17. *Civin P.* Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 656–665.
18. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
19. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Статья поступила 12 мая 2005 г., окончательный вариант — 20 июля 2006 г.

Виноградов Олег Леонидович
Санкт-Петербургский гос. университет, математико-механический факультет,
кафедра математического анализа, Университетский пр., 28,
Санкт-Петербург 198504
olvin@math.spbu.ru