Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.27

ШКАЛЫ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ ВСЕХ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация: Вводится сравнение шкал потенциалов вычислимости алгебр различной мощности. Доказывается неразрешимость элементарной теории шкалы потенциалов вычислимости всех конечных алгебр.

Ключевые слова: потенциал вычислимости универсальной алгебры, шкала потенциалов вычислимости всех конечных алгебр.

В работе автора [1] на основе понятия условного терма введены понятия потенциала вычислимости универсальной алгебры и шкалы потенциалов вычислимости n-элементных универсальных алгебр для любого натурального n. Обзор полученных результатов этой теории см. в [2–4]. В настоящей работе введено понятие шкалы потенциалов вычислимости всех конечных универсальных алгебр и рассмотрены некоторые результаты, связанные со строением этой шкалы.

Напомним некоторые определения. Для любой универсальной алгебры $\mathscr{A}$ через $CT(\mathscr{A})$ обозначим совокупность всех условно термальных (программно вычислимых) функций алгебры $\mathscr{A}$. Для двух алгебр $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ и $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ одной и той же мощности мы говорим о *совпадении* их вычислительных потенциалов $\overline{\mathscr{A}}_1 = \overline{\mathscr{A}}_2$ ($\mathscr{A}_1 \sim \mathscr{A}_2$), если существует биекция π множества A_1 на A_2 такая, что $CT(\mathscr{A}_2) = CT(\pi(\mathscr{A}_1))$, где алгебра $\pi(\mathscr{A}_1)$ сигнатуры σ_1 определяется на базовом множестве A_2 с помощью π-сопряжения сигнатурных функций алгебры $\mathscr{A}_1$, т. е. $\pi(\mathscr{A}_1) = \langle A_2; \pi f(\pi^{-1}(x_1), \dots, \pi^{-1}(x_n)) \mid f(x_1, \dots, x_n) \in \sigma_1\rangle$. Аналогичным образом определяется отношение сравнения потенциалов вычислимости $\overline{\mathscr{A}}_1 = \mathscr{A}_1/\sim$, $\overline{\mathscr{A}}_2 = \mathscr{A}_2/\sim$ алгебр $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$:

$\overline{\mathscr{A}}_1 \leq \overline{\mathscr{A}}_2 \Leftrightarrow$ существует биекция $\pi : A_1 \to A_2$ такая, что $CT(\pi(\mathscr{A}_1)) \subseteq CT(\mathscr{A}_2)$.

Шкалой потенциалов вычислимости n-элементных универсальных алгебр $\langle CT_n; \leq\rangle$ называется частично упорядоченное множество $\langle\{CT(\mathscr{A})/\sim \mid \mathscr{A}$ — n-элементная алгебра $\}; \leq\rangle$.

Роль инварианта для отношений $\sim, \leq$ играет инверсная полугруппа $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$ внутренних изоморфизмов (изоморфизмов между подалгебрами) алгебры $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}_1 \sim \mathscr{A}_2$ ($\overline{\mathscr{A}}_1 \leq \overline{\mathscr{A}}_2$) $\Leftrightarrow$ существует биекция $\pi : A_1 \to A_2$ такая, что

$$\pi \operatorname{Iso}\mathscr{A}_1 \pi^{-1} = \operatorname{Iso}\mathscr{A}_2 \quad (\pi \operatorname{Iso}\mathscr{A}_1 \pi^{-1} \supseteq \operatorname{Iso}\mathscr{A}_2).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00159–а).

Согласно изложенной выше идеологии потенциала вычислимости n-элементной алгебры как совокупности программно-вычислимых функций этой алгебры отношение $\leq$ допускает естественное продолжение с конечных множеств CT_n $(n \in \omega)$ на множество $CT = \bigcup\limits_{n\in\omega} CT_n$ следующим образом.

Пусть $\mathscr{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$ и $\mathscr{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2\rangle$ — n_1- и n_2-элементные алгебры соответственно и $n_1 \leq n_2$. Будем говорить, что потенциал вычислимости $\overline{\mathscr{A}}_1$ алгебры $\mathscr{A}_1$ *меньше-равен* потенциала вычислимости $\overline{\mathscr{A}}_2$ алгебры $\mathscr{A}_2$, если существуют n_1-элементное подмножество $B \subseteq A_2$ и биекция π множества A_1 на множество B такие, что совокупность B-ограничений B-замкнутых программно-вычислимых функций из $CT(\mathscr{A}_2)$ включает в себя совокупность функций из $\pi CT(\mathscr{A}_1)\pi^{-1}$.

Для любого подмножества $B \subseteq A_2$ через $CT_B(\mathscr{A}_2)$ обозначим совокупность функций

$$\{f(x_1,\dots,x_n) \in CT(\mathscr{A}_2) \mid f(B,\dots,B) \subseteq B\},$$

а через $CT_B(\mathscr{A}_2) \restriction B$ — совокупность B-ограничений функций из $CT_B(\mathscr{A}_2)$. Таким образом, $\overline{\mathscr{A}}_1 \leq \overline{\mathscr{A}}_2$ равносильно тому, что существуют $B \subseteq A_2$ и биекция $\pi : A_1 \to B$ такие, что $\pi CT(\mathscr{A}_1)\pi^{-1} \subseteq CT_B(\mathscr{A}_2) \restriction B$.

Очевидно, что отношение $\leq$ является отношением порядка на множестве CT, а его ограничения на множество CT_n совпадают с отношениями порядка $\leq$, введенными на этих множествах ранее. При этом отношение $\leq$ отражает идеологию сравнения программно-вычислительных возможностей конечных универсальных алгебр. В силу этого частично упорядоченное множество $\langle CT; \leq\rangle$ назовем *шкалой потенциалов вычислимости всех конечных алгебр.*

Выше указано, что роль инвариантов отношения $\leq$ на шкале CT_n играют инверсные полугруппы внутренних изоморфизмов алгебр. Аналогичная ситуация сохраняется и для отношения $\leq$ на шкале CT.

Напомним, что подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ отождествимы с идемпотентами полугруппы $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$. Тем самым вместо полугруппы $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$ в качестве инвариантов потенциала вычислимости алгебры $\mathscr{A}$ удобнее использовать пару $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle$, где $\operatorname{Sub}\mathscr{A}$ — решетка подалгебр алгебры $\mathscr{A}$. Под решеткой подмножеств множества A согласно [5] будем понимать некоторую совокупность H подмножеств множества A, решеточно упорядоченную отношением $\subseteq$, включающую в себя множество A и такую, что роль операции $\wedge$ играет теоретико-множественное пересечение $\cap$, в то время как операция $\vee$ может отличаться от операции $\cup$. Описание пар $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle$ для конечных универсальных алгебр $\mathscr{A}$ изложено в [5]: для пары $\langle H; S\rangle$, состоящей из некоторой решетки H подмножеств некоторого конечного множества A и некоторой совокупности S биекций между множествами из H, следующие условия эквивалентны:

а) $\langle H; S\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle$ для некоторой универсальной алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma\rangle$;

б) пара $\langle H; S\rangle$ удовлетворяет принципам обратимости, композиции, неподвижных точек, ограничения, согласованности и одноэлементных подалгебр, где

принцип обратимости: для любого $g \in S$ отображение g^{-1} также входит в S;

принцип композиции: для любых $g, h \in S$ если $\operatorname{rang} h = \operatorname{dom} g$, то $hg \in S$;

принцип неподвижных точек: для любого $g \in S$ множество $\operatorname{Fix} g = \{a \in A \mid g(a) = a\}$ входит в H;

принцип ограничения: для любых $g \in S$, $C \in H$ если $C \subseteq \operatorname{dom} g$, то $g \restriction C \in S$;

принцип согласованности: для любого $C \in H$ имеет место включение $\mathrm{id}_C \in S$, и для любого $g \in S$ имеют место включения $\operatorname{dom} g, \operatorname{rang} g \in H$;

принцип одноэлементных подалгебр: для любых $a, b \in A$ если $\{a\}, \{b\} \in H$, то существует $h \in H$ такое, что $\operatorname{dom} h = \{a\}$, $\operatorname{rang} h = \{b\}$.

Пусть теперь $B \subseteq A$ — конечные множества, являющиеся базовыми множествами алгебр $\mathscr{B} = \langle B; \sigma_1 \rangle$ и $\langle A; \sigma_2 \rangle$. Сформулируем критерий включения $CT(\mathscr{B}) \subseteq CT_B(\mathscr{A}) \restriction B$.

Через $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}$ обозначим следующую совокупность подмножеств множества B:

$$\operatorname{Sub}_B \mathscr{A} = \{\varphi_n(\dots\varphi_2(\varphi_1(C \cap B) \cap B) \cap B \dots) \cap B \mid n \in \omega, C \in \operatorname{Sub} \mathscr{A}, \varphi_i \in \operatorname{Iso} \mathscr{A}\},$$

а через $\operatorname{Iso}_{\mathscr{B}} \mathscr{A}$ — следующую совокупность биекций между подмножествами из $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}$:

$$\operatorname{Iso}_B \mathscr{A} = \{\varphi \restriction C \mid \varphi \in \operatorname{Iso} \mathscr{A} \text{ и } C, \varphi(C) \in \operatorname{Sub}_B \mathscr{A}\}.$$

Теорема 1. *Для любых конечных универсальных алгебр $\mathscr{B} = \langle B; \sigma_1 \rangle$ и $\mathscr{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ таких, что $B \subseteq A$, следующие условия эквивалентны:*

(а) $CT(\mathscr{B}) \subseteq CT_B(\mathscr{A}) \restriction B$*;*

(б) $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Sub} \mathscr{B}$, $\operatorname{Iso}_B \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Iso} \mathscr{B}$*.*

Доказательство. Прежде всего, как доказано в [5], для любой функции f на основном множестве D алгебры $\mathscr{D} = \langle D; \sigma \rangle$ следующие условия эквивалентны:

(а) $f \in CT(\mathscr{D})$;

(б) подалгебры алгебры $\mathscr{D}$ замкнуты относительно f, и f коммутирует со всеми отображениями из $\operatorname{Iso} \mathscr{D}$.

Таким образом, если $f \in CT_B(\mathscr{A})$, то замкнутыми относительно f должны быть подмножества вида $C \cap B$, $\varphi_1(C \cap B) \cap B$, $\varphi_2(\varphi_1(C \cap B) \cap B) \cap B, \dots$, где $C \in \operatorname{Sub} \mathscr{A}$, $\varphi_i \in \operatorname{Iso} \mathscr{A}$ и f должна коммутировать со всеми отображениями φ из $\operatorname{Iso} \mathscr{A}$. Тем самым имеет место импликация (а) $\to$ (б).

Для доказательства обратной импликации (б) $\to$ (а) достаточно заметить, что для любой функции h, определенной на множестве B, такой, что $h \in CT(\mathscr{B})$, и, значит, в силу условия (б) такой, что $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}$ замкнуты относительно h и h коммутирует с отображениями из $\operatorname{Iso}_B(\mathscr{A})$, существует функция $h' \in CT(\mathscr{A})$ такая, что $h' \restriction B = h$. Прежде всего очевидно, что пара $\langle \operatorname{Sub}_B \mathscr{A}, \operatorname{Iso}_B \mathscr{A} \rangle$ удовлетворяет на множестве B принципам обратимости, композиции, неподвижных точек, ограничения, согласованности и одноэлементных подалгебр (в силу определения $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}, \operatorname{Iso}_B \mathscr{A}$ и того, что этим принципам удовлетворяет пара $\langle \operatorname{Sub} \mathscr{A}, \operatorname{Iso} \mathscr{A} \rangle$). Тем самым, как доказано в [5], $h \in CT(\mathscr{L})$, где $\mathscr{L} = \langle B; \sigma \rangle$ и сигнатурные функции алгебры $\mathscr{L}$ имеют вид функций $g_{\bar{a}, a_0}$, здесь $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ и $a_0, a_1, \dots, a_n$ — произвольные элементы из B такие, что $a_0 \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}}$, и где $\langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}}$ — наименьшее подмножество из $\operatorname{Sub}_B \mathscr{A}$, включающее в себя множество $\{a_1, \dots, a_n\}$. При этом для любого $b_1, \dots, b_n \in B$

$$g_{\bar{a}, a_0}(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} \varphi(a_0), & \text{если существует } \varphi \in \operatorname{Iso}_B \mathscr{A} \text{ такое, что} \\ & \qquad \varphi(a_i) = b_i \text{ для } i = 1, \dots, n; \\ b_1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (*)$$

В силу того, что для любого $D \in \operatorname{Sub}_B \mathscr{A}$ существует $C \in \operatorname{Sub} \mathscr{A}$ такое, что $D \subseteq C$, а также ввиду определимости совокупности $\operatorname{Iso}_B \mathscr{A}$ как ограничений отображений из $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$ до множества B и выполнимости для пары $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle$ принципов обратимости, ..., неподвижных точек, функции $g_{\bar{a},a_0}$, определенные на множестве B, продолжимы по той же схеме $(*)$ с заменой $\operatorname{Iso}_B\mathscr{A}$ на $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$ до функций, входящих в $CT(\mathscr{A})$. Так как схемы определения условно термальных функций коммутируют с ограничениями на подмножества базового множества алгебры, то действительно для любой h такой, что h — условно термальная функция на B сигнатуры σ, найдется $h' \in CT(\mathscr{A})$ такая, что $h = h' \restriction B$. Тем самым импликация (б) $\to$ (а), а вместе с тем и утверждение теоремы полностью доказаны.

Теорема 2. *Существуют формулы $\psi(x,y)$, $\phi_n(x)$ $(n \in \omega)$ логики первого порядка сигнатуры $\langle\leq\rangle$ такие, что для любых $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}} \in CT$*

$$\langle CT;\leq\rangle \models \psi(\overline{\mathscr{A}},\overline{\mathscr{B}}) \Leftrightarrow \text{ для некоторого } n \in \omega \quad \overline{\mathscr{A}},\ \overline{\mathscr{B}} \in CT_n;$$

$$\langle CT;\leq\rangle \models \phi_n(\overline{\mathscr{A}}) \Leftrightarrow \overline{\mathscr{A}} \in CT_n.$$

Доказательство. Каждая из шкал $\langle CT_n;\leq\rangle$ имеет наименьший элемент $0_n = \overline{\mathscr{A}}$, где $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle = \langle P(n), \operatorname{Bi} n\rangle$, $n = \{0,1,\dots,n-1\}$, $P(n) = \{C \mid C \subseteq n\}$ и $\operatorname{Bi} n$ — совокупность всех биекций между множествами из $P(n)$. При этом $CT(\mathscr{A})$ — это совокупность так называемых обобщенно селекторных функций на n-элементном множестве, т. е. функций вида

$$f(x_1,\dots,x_m) = \begin{cases} D_1(x_1,\dots,x_m) \to x_{i_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_l(x_1,\dots,x_m) \to x_{i_l}, \end{cases}$$

где $D_1(x_1,\dots,x_m),\dots,D_l(x_1,\dots,x_m)$ — всевозможные максимальные попарно несовместные условия, состоящие из равенств и неравенств между переменными $x_1,\dots,x_m$ (при условии, что $x_1,\dots,x_m \in n$) и $x_{i_1},\dots,x_{i_l} \in \{x_1,\dots,x_m\}$. Тем самым очевидно, что для любого $n \in \omega$ и для любого $\overline{\mathscr{A}} \in CT$

$$\langle CT;\leq\rangle \models \overline{\mathscr{A}} \leq 0_n \Leftrightarrow \overline{\mathscr{A}} = 0_m \quad \text{для некоторого } m \leq n.$$

В работе [1] описаны атомы шкал $\langle CT_n;\leq\rangle$. Они имеют один из трех следующих видов. Потенциал вычислимости $\overline{\mathscr{A}}$ алгебры $\mathscr{A}$ является атомом в $\langle CT_n;\leq\rangle$, если либо

1) $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle = \langle S_{n-1}, \operatorname{Sym} n \cup \operatorname{Bi}'' n\rangle$, где $S_{n-1} = \{C \subseteq n \mid |C| \neq n-1\}$, $\operatorname{Bi}'' n$ — совокупность любых биекций между подмножествами множества n мощности, не превышающей $n-2$, $\operatorname{Sym} n$ — полная симметрическая группа на n;

либо

2) $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle = \langle P(n), S \cup \operatorname{Bi}' n\rangle$, где S — некоторая (любая) максимальная подгруппа группы $\operatorname{Sym} n$ и $\operatorname{Bi}' n$ — совокупность любых биекций между собственными подмножествами множества n.

Покажем теперь, что характеристическим свойством, выделяющим совокупность элементов $\{0_n \mid n \in \omega\}$ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$, является следующее: для любого покрытия этих элементов в шкале $\langle CT;\leq\rangle$ совокупность элементов, лежащих под этим покрытием, линейно упорядочена в $\langle CT_n;\leq\rangle$.

Из описания атомов шкал $\langle CT_n;\leq\rangle$, приведенного выше, и теоремы 1 очевидным образом следует, что для любых $m < n$, $n \geq 2$, любого атома $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT_n;\leq\rangle$ и любого $\overline{\mathscr{B}} \in CT_m$ имеет место

$$\langle CT_n;\leq\rangle \models \overline{\mathscr{B}} < \overline{\mathscr{A}} \Leftrightarrow \overline{\mathscr{B}} = 0_m.$$

Тем самым для любого атома $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ при $n \geq 2$ существует единственное его нижнее покрытие — элемент 0_n — и указанное выше характеристическое свойство имеет место для элементов $\{0_m \mid n \in \omega\}$ шкалы $\langle CT; \leq\rangle$.

Покажем обратное, т. е. что любой из элементов, обладающих подобным характеристическим свойством, имеет вид 0_n для некоторого $n \in \omega$. Для этого достаточно показать, что любой атом $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ имеет покрытие $\overline{\mathscr{B}}$ в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$, для которого совокупность меньших элементов не является линейно упорядоченной.

Рассмотрим соответственно два случая 1 и 2, указанные выше в описании атомов шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$.

Пусть атом $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ таков, что $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle = \langle S_{n-1}, \operatorname{Sym} n \cup \operatorname{Bi}'' n\rangle$, и S — некоторая максимальная подгруппа группы $\operatorname{Sym} n$. Тогда пара $\langle S_{n-1}, S \cup \operatorname{Bi}'' n\rangle$ удовлетворяет всем принципам обратимости, … одноэлементных подалгебр и тем самым существует n-элементная алгебра $\mathscr{B}$ такая, что $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{B}, \operatorname{Iso}\mathscr{B}\rangle = \langle S_{n-1}, S \cup \operatorname{Bi}'' n\rangle$. Очевидно, что $\overline{\mathscr{B}}$ является покрытием элемента $\overline{\mathscr{A}}$ в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$. Пусть алгебра $\mathscr{L}$ такова, что $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{L}, \operatorname{Iso}\mathscr{L}\rangle = \langle P(n), S \cup \operatorname{Bi}' n\rangle$. Тогда $\overline{\mathscr{L}} < \overline{\mathscr{B}}$ и элементы $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{L}}$ несравнимы в $\langle CT_n; \leq\rangle$.

Пусть теперь атом $\overline{\mathscr{A}} = \langle n; \sigma\rangle$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ таков, что $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{A}, \operatorname{Iso}\mathscr{A}\rangle = \langle P(n), S \cup \operatorname{Bi}' n\rangle$, где S — некоторая максимальная подгруппа группы $\operatorname{Sym} n$. Построим покрытие $\mathscr{B} = \langle n+1, \sigma_1\rangle$ элемента $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$, лежащее в CT_{n+1}. Пусть $A = n$, $B = n+1$ и $H = P(B)$. Пусть для любого $C \subseteq B$ такого, что $|C| = n$, отображение π_C — некоторое фиксированное отображение множества A на C и π_A тождественно на A. Пусть

$$R = \bigcup_{C \subseteq B, |C| = n} \pi_C S \pi_C^{-1} \cup \operatorname{Bi}'' B.$$

Очевидно, что для пары $\langle H; R\rangle$ выполнены все принципы обратимости, … одноэлементных подалгебр, и пусть алгебра $\mathscr{B} = \langle n+1, \sigma_1\rangle$ такова, что $\langle \operatorname{Sub}\mathscr{B}, \operatorname{Iso}\mathscr{B}\rangle = \langle H, R\rangle$. Из определения $\mathscr{B}$ следует, что $\overline{\mathscr{B}}$ — покрытие элемента $\overline{\mathscr{A}}$ шкалы $\langle CT; \leq\rangle$, лежащее в CT_{n+1}, и, более того, для любого $\overline{\mathscr{L}} \in CT_n$ имеет место

$$\langle CT; \leq\rangle \models \overline{\mathscr{L}} < \overline{\mathscr{B}} \Leftrightarrow \overline{\mathscr{L}} \leq \overline{\mathscr{A}}.$$

Пусть $D = \{\overline{\mathscr{B}} \in CT_{n+1} \mid \forall \overline{\mathscr{L}} \in CT_n\ \langle CT; \leq\rangle \models \overline{\mathscr{L}} < \overline{\mathscr{B}} \Leftrightarrow \overline{\mathscr{L}} \leq \overline{\mathscr{A}}\}$. В силу замеченного выше $D \neq \phi$. Любой минимальный элемент из D, очевидно, и является покрытием $\overline{\mathscr{B}}$ элемента $\overline{\mathscr{A}}$ в шкале $\langle CT; \leq\rangle$, лежащим в множестве CT_{n+1}, и под этим покрытием $\overline{\mathscr{L}}$ существуют несравнимые в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ элементы $\overline{\mathscr{A}}$ и 0_{n+1}.

Таким образом, так как покрытия в $\langle CT_n; \leq\rangle$ элемента 0_n суть 0_{n+1} и атомы шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ и под ними в силу замеченного выше нет несравнимых элементов, то множество $\{0_n \mid n \in \omega\}$ выделяется в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ элементарной формулой

$$\phi(x) = \forall y(x < y \ \&\ \forall z(x \leq z \leq y \to (z = x \vee z = y)) \\ \to \forall u_1, u_2(u_1 \leq y \ \&\ u_2 \leq y \to (u_1 \leq u_2 \vee u_2 \leq u_1)))$$

сигнатуры $\langle \leq\rangle$.

Искомые формулы $\psi(x, y)$ и $\phi_n(x)$ выписываются теперь без труда. Действительно, для любых $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}} \in CT$ существует $n \in \omega$ такое, что $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}} \in CT_n$ тогда и только тогда, когда для m и k таких, что m — максимальное среди $l \in \omega$

таких, что $0_l \leq \overline{\mathscr{A}}$, и k — максимальное среди $l \in \omega$ таких, что $0_l \leq \overline{\mathscr{B}}$, имеет место равенство $m = k$. Тем самым, полагая

$$\psi(x,y) = \forall z(\phi(z) \to (z \leq x \leftrightarrow z \leq y)),$$

имеем, что для любых $\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}} \in CT$

$$\langle CT; \leq\rangle \models \psi(\overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}}) \Leftrightarrow \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathscr{B}} \in CT_n \quad \text{для некоторого } n \in \omega.$$

Столь же очевидно выписываются формулы $\phi_n(x)$ $(n \in \omega)$ — достаточно записать, что число элементов y, меньших x и удовлетворяющих формуле ϕ, равно n. Теорема доказана.

Следствие 1. *Элементарная теория шкалы $\langle CT; \leq\rangle$ неразрешима.*

Доказательство. В работе [6] доказана неразрешимость элементарной теории совокупности шкал $\{\langle CT_n; \leq\rangle \mid n \in \omega\}$. Утверждение следствия теперь очевидно в силу доказанного в теореме 2 существования формулы $\psi(x,y)$, определяющей эквивалентность на шкале $\langle CT; \leq\rangle$, классами эквивалентности которой служат шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ $(n \in \omega)$.

В заключение коснемся вопроса, связанного с шириной шкалы $\langle CT; \leq\rangle$. Напомним, что вопрос о нахождении ширины (максимального числа попарно несравнимых элементов) для шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$ отмечен как один из открытых вопросов в работе [4]. Пусть $\overline{\mathscr{A}}_n$ при $n \in \omega$ — атом шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ такой, что $\langle \mathrm{Sub}\, \mathscr{A}_n, \mathrm{Iso}\, \mathscr{A}_n\rangle = \langle S_{n-1}, \mathrm{Sym}\, n \cup \mathrm{Bi}''\, n\rangle$. Тогда очевидно, что для любого $\overline{\mathscr{B}} \in CT$ неравенство $\overline{\mathscr{B}} < \overline{\mathscr{A}}_n$ влечет в силу теоремы 1 одно из равенств $\overline{\mathscr{B}} = 0_m$ для $m \leq n$. Тем самым совокупность $\{\overline{\mathscr{A}}_n \mid n \in \omega\}$ есть бесконечная совокупность попарно несравнимых элементов шкалы $\langle CT; \leq\rangle$. В то же время в силу определения шкалы $\langle CT; \leq\rangle$ очевидно, что максимальные неуплотняемые цепи этой шкалы имеют порядковый тип ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г., Журков С. В.* О шкалах потенциалов вычислимости универсальных алгебр // Вычислительные системы. 2002. Т. 169. С. 26–38.
2. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
3. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и в теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.
4. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Шкалы потенциалов вычислимости конечных алгебр: результаты и проблемы // Фундаментальная и прикладная математика. 2003. Т. 9, № 3. С. 145–164.
5. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.
6. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Некоторые замечания о шкалах потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. Т. 3. С. 107–113.
7. *Пинус А. Г.* Об условно рационально эквивалентных алгебрах // Вычислительные системы. 1999. Т. 165. С. 1–29.

Статья поступила 16 августа 2005 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru