Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.977

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ОКРЕСТНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

М. Б. Ивирсин

Аннотация: Исследуется управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неустойчивого стационарного режима. Ищется управление, при котором решение остается сколь угодно долго в указанной окрестности. Найдены условия, при которых такое управление возможно, и доказана теорема о его существовании. Полученные результаты имеют конструктивный характер и могут быть применены для управления реальными процессами.

Ключевые слова: теория управления, параметрическое управление, неустойчивое стационарное решение.

Введение

Очень часто эволюционные процессы, возникающие в приложениях (например, при математическом моделировании химических процессов [1]), обладают неустойчивыми стационарными режимами, привлекательными с экономической, технологической или какой-нибудь другой точки зрения. Поиск способов «удержания» нестационарного процесса в малой окрестности такого режима — актуальная теоретическая и прикладная задача. Один из возможных способов «удержания» предложен более 20 лет назад Т. И. Зеленяком в случае, когда соответствующее стационарное решение зависит от параметров, которыми управляющий субъект может распоряжаться по своему усмотрению. Главная идея состоит в том, чтобы воспользоваться эффектом «отталкивания» нестационарного процесса от неустойчивого режима и так варьировать параметры, чтобы процесс сколь угодно долго оставался в наперед заданной области фазового пространства. Подобная задача исследовалась в работах [2, 3] при жестких ограничениях на характер неустойчивости. В настоящей работе эти исследования получат дальнейшее продолжение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — фазовая переменная со значениями в $\mathbb{R}^n$, характеризующая состояние процесса в момент времени t; u — управляющий параметр со значениями в $\mathbb{R}^k, k \leq n$; f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$. Наряду с системой

(1) имеется управляющий субъект — оператор, который в любой момент может мгновенно изменить (переключить) параметр u, придав ему произвольное новое значение, причем интервалы времени между соседними переключениями не могут сгущаться к нулю. Иными словами, класс допустимых управлений состоит из кусочно-постоянных функций вида

$$u(t) \equiv u^j \quad \text{при } t_j < t < t_{j+1}, \text{ где } \inf(t_{j+1} - t_j) > 0. \tag{2}$$

Непрерывная функция $x(t)$ считается решением системы (1) с управлением $u(t)$ типа (2), если на каждом из интервалов (t_j, t_{j+1}) существует производная $\dot{x}(t)$ и выполняется равенство $\dot{x}(t) = f(x, u^j)$.

Допустим, что при некотором значении параметра $u = u^0$ система (1) имеет стационарное решение $x(t) \equiv a$, причем ровно k собственных чисел матрицы $D_x f(a, u^0)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ комплексного переменного λ, а остальные $n - k$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Тем самым a — неустойчивое по Ляпунову стационарное состояние системы $\dot{x}(t) = f(x, u^0)$. Нашей целью является поиск условий, при которых в любой окрестности V точки a найдется такое открытое подмножество D, что для всякого начального состояния $x^0 \in D$ существует допустимое управление $u(t)$ типа (2), при котором решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x(0) = x^0$$

не выйдет из окрестности V на бесконечном интервале времени $t > 0$.

Для $k = 1$ подобная задача об «удержании» управляемого процесса в наперед заданной окрестности неустойчивого стационарного состояния решена Е. И. Мусиенко [2, 3]. При этом были рассмотрены весьма общие обыкновенные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, а также некоторые классы уравнений с частными производными. Однако случай $k > 1$ долгое время не поддавался изучению даже в конечномерном пространстве. В настоящей работе делается следующий шаг — поставленная задача решается при $k = 2$ и произвольном $n \geq 2$.

Проиллюстрируем основные идеи предлагаемого исследования элементарным примером. Возьмем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(x - u), \tag{3}$$

в котором $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$, A — матрица 2×2 с двумя положительными различными собственными значениями. Не уменьшая общности, считаем A диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 > \lambda_1 > 0.$$

Если положить $u = u^0$, то $x(t) \equiv u^0$ будет являться неустойчивым узлом для уравнения (3). При любом другом значении управляющего параметра $u = u^1$ решение $x(t) \equiv u^1$ будет также являться неустойчивым узлом. Траектории нестационарных решений для параметра $u = (u_1, u_2)$ имеют вид

$$|x_2 - u_2| = C|x_1 - u_1|^\lambda,$$

где $C \geq 0$, $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. При этом сами решения со временем удаляются от стационарного решения $x(t) \equiv u$.

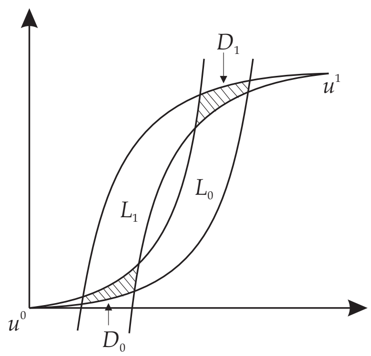

Рис. 1.

Выберем по две траектории решений уравнения (3) в случаях $u = u^0$ и $u = u^1$ так, чтобы области L_0, L_1, ограниченные этими парами траекторий, пересекались по двум областям D_0, D_1, как показано на рис. 1. В силу теоремы единственности любая траектория решения дифференциального уравнения (3) при $u = u^0$ с начальными данными из D_0 в фазовой плоскости будет лежать в L_0. Обратно, всякая траектория решения уравнения (3) при $u = u^1$ с начальными данными из D_1 в фазовой плоскости будет лежать в L_1.

Теперь становится ясно, как организовать искомое кусочно-постоянное управление. Выберем в D_0 произвольные начальные данные x^0 и положим $u = u^0$. Траектория решения задачи $\dot{x} = f(x, u^0)$, $x(0) = x^0$ обязательно попадет в D_1. В любой момент времени t_1, для которого $x(t_1) \in D_1$, переключим значение управляющего параметра, положив $u = u^1$. Так как траектория решения задачи Коши $\dot{x} = f(x, u^1), x(t_1) = x^1$ обязательно попадет в D_0, то найдется момент времени $t_2 > t_1$, для которого $x^2 = x(t_2) \in D_0$. Если в любой из этих моментов переключим значение управляющего параметра, положив $u = u^0$, то мы снова окажемся в исходной ситуации. Продолжая далее действовать подобным образом, мы сколь угодно долго будем удерживать траекторию управляемого процесса вблизи неустойчивого стационарного состояния $x(t) \equiv u^0$.

Следует обратить внимание еще на одну особенность получившегося управления. Пусть в процессе управления уже произошло k переключений, тогда $(k+1)$-е переключение можно произвести не только в момент времени t_{k+1}, но и в некоторой его окрестности. Это обусловлено тем, что пересечением траектории с «областью переключения» (D_0 или D_1) является целая кривая.

В основной части работы показывается, что при некоторых естественных ограничениях для общей задачи (1) можно построить кусочно-постоянное управление, качественно похожее на управление, описанное в данном примере.

2. Линеаризация. Некоторые оценки

Предположим, что $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^2$ и $f(x, u)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (a, u^0), $f(a, u^0) = 0$, $\det(D_x f(a, u^0)) \neq 0$, где $D_x f(a, u^0)$ — матрица Якоби в точке (a, u^0). Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (a, u^0) уравнение $f(y, u) = 0$ однозначно разрешимо относительно y. Тем самым существует такая окрестность $B \subset \mathbb{R}^2$ точки u^0, в которой определена функция $y(u)$, обращающая в тождество равенство $f(y(u), u) \equiv 0$, при этом дважды непрерывно дифференцируемая в B.

Применяя к (1) формулу Тейлора, получаем

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(u)(x(t) - y(u)) + \varphi(x(t) - y(u), u), \tag{4}$$

где $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при фиксированном u, $A(u)$ — матрица $n \times n$, $\varphi(z, u) = O(|z|^2)$. Положим $A = A(u^0)$, $\overline{A}(u) = A(u) - A$, при этом $\|\overline{A}(u)\| \to 0$ $(u \to u^0)$.

Пусть λ_1, λ_2 — положительные собственные значения матрицы A, а все остальные собственные числа $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Представим пространство $\mathbb{R}^n$ в виде прямой суммы двух подпространств E_1 и E_2, где E_1 — корневое подпространство матрицы A, отвечающее двум положительным собственным значениям λ_1, λ_2, а E_2 — корневое подпространство матрицы A, отвечающее собственным значениям λ_i, $i = 3, \ldots, n$, лежащим в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Соответствующие спектральные проекторы (см. [5]) обозначим через $P : \mathbb{R}^n \to E_1$ и $Q : \mathbb{R}^n \to E_2$.

Потребуем от функции $y(u)$ выполнения условия:

$$\text{векторы } P\frac{\partial y(u)}{\partial u_1}\bigg|_{u=u^0}, \quad P\frac{\partial y(u)}{\partial u_2}\bigg|_{u=u^0} \text{ линейно независимы,} \tag{5}$$

и выполним замену переменных:

$$v = P[y(u)]. \tag{6}$$

В силу условия (5) $\det D_u v \neq 0$, из чего следует, что отображение $P \circ y$ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности $B_1 \subset B$ точки u^0 и найдется непрерывно дифференцируемая функция $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такая, что $u = \psi(v)$. Область определения параметра v обозначим через $\widetilde{B} = P[y(B_1)]$, а образ параметра u^0 — через $v^0 = P[y(u^0)]$.

Исходное уравнение (1) можно теперь переписать в виде

$$\dot{x} = f(x, u) = f(x, \psi(v)) \equiv g(x, v), \tag{7}$$

и для каждого значения параметра $v \in \widetilde{B}$ это уравнение имеет стационарное решение $x(t) \equiv \tilde{y}(v)$. Из (6) получаем, что функция $\tilde{y}$ обладает следующим свойством:

$$P\tilde{y}(v) = v. \tag{8}$$

Значение $Q\tilde{y}(v)$ обозначим через $h(v)$.

Уравнение (4) перепишем в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = A(x(t) - \tilde{y}(v)) + \overline{A}(\psi(v))(x(t) - \tilde{y}(v)) + \widetilde{\varphi}(x(t) - \tilde{y}(v), v). \tag{9}$$

Наряду с уравнением (9) будем рассматривать еще одно уравнение:

$$\dot{z}(t) = A(z(t) - \tilde{y}(v)). \tag{10}$$

Для решений уравнений (9) и (10) справедливо утверждение о том, что они мало отличаются на небольшом интервале времени при одних и тех же начальных данных. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Для любых положительных констант ε и T существуют окрестность $B_\varepsilon \subset \widetilde{B}$ точки v^0 и константа $\delta_0 > 0$ такие, что если $v \in B_\varepsilon$ и $|x^0|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta_0$, то для разности решений уравнений (9) и (10) с одинаковыми начальными данными $x(0) = z(0) = x^0$ справедлива равномерная по t на отрезке $[0, T]$ оценка*

$$|x(t) - z(t)|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon |x^0|_{\mathbb{R}^n}.$$

Доказательство этой леммы, а также всех других утверждений вынесено в приложение.

Выбрав базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ так, что e_1, e_2 — базис E_1, $e_3, \ldots, e_n$ — базис E_2, получим уравнение (10) с клеточно-диагональной матрицей. Для простоты можно считать, что такой базис задан изначально, тем самым $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, а уравнение (10) распадается на два независимых уравнения

$$\dot{z}_1(t) = A_1(z_1(t) - v), \tag{11}$$

$$\dot{z}_2(t) = A_2(z_2(t) - h(v)), \tag{12}$$

где $z_1 \in E_1$, матрица A_1 имеет собственные значения λ_1, λ_2; $z_2 \in E_2$, матрица A_2 имеет собственные значения $\lambda_3, \dots, \lambda_n$. Для любого $\varepsilon_0 > 0$ для уравнения (12) справедлива следующая оценка:

$$|z_2(t) - h(v)|_{E_2} \le K_{\varepsilon_0} e^{(\mu+\varepsilon_0)t} |z_2(0) - h(v)|_{E_2}, \tag{13}$$

где $\mu = \max\limits_{i=3,\dots,n} \operatorname{Re}\lambda_i$.

Из ограниченности норм проекторов P и Q получаем: найдется константа C_1 такая, что для любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$|Qa|_{E_2} \le C_1 |a|_{\mathbb{R}^n}, \quad |Pa|_{E_1} \le C_1 |a|_{\mathbb{R}^n}. \tag{14}$$

Оценим снизу норму проекции на E_1 вектора $\tilde{y}(v^0) - \tilde{y}(v)$ через норму самого этого вектора. В силу дифференцируемости функции $\tilde{y}$ и (8) имеем

$$|\tilde{y}(v^0) - \tilde{y}(v)|_{\mathbb{R}^n} \le C|v^0 - v|_{E_1} = C|P[\tilde{y}(v^0)] - P[\tilde{y}(v)]|_{E_1}.$$

Обозначив $C_0 = \frac{1}{C}$, получим

$$|P(\tilde{y}(v^0) - \tilde{y}(v))|_{E_1} \ge C_0 |\tilde{y}(v^0) - \tilde{y}(v)|_{\mathbb{R}^n}. \tag{15}$$

Следует заметить, что оценки (13), (15) выполнены равномерно относительно v из достаточно малой окрестности точки v^0. Не ограничивая общности, можно считать, что это справедливо в $\widetilde{B}$.

3. Построение процесса управления

Возьмем стационарное решение, отвечающее параметру v^0, и обозначим его через $y^0 = \tilde{y}(v^0)$. Выберем еще одно значение параметра $v^1 \in \widetilde{B}$ так, чтобы вектор $v^0 - v^1$ не являлся собственным вектором матрицы A_1. Стационарное решение, отвечающее v^1, обозначим через $y^1 = \tilde{y}(v^1)$. Расстояние между y^0, y^1 обозначим через δ: $\delta = |y^0 - y^1|_{\mathbb{R}^n}$.

В силу (6) $v^0 = Py^0$, $v^1 = Py^1$. Расстояние между v^0, v^1 обозначим через $\zeta = |v^0 - v^1|_{E_1}$. Ввиду (14), (15) справедливы оценки

$$C_0\delta \le \zeta \le C_1\delta. \tag{16}$$

Выберем в пространстве E_1 базис, состоящий из нормированных собственных векторов матрицы A_1. Пусть (ξ, η) — координаты векторов в этом базисе, тогда семейство траекторий уравнения (11) будет состоять из кривых

$$(\eta - v_2) = C(\xi - v_1)^\lambda, \quad \xi > v_1,\ C \in \mathbb{R}, \tag{17a}$$

$$(\eta - v_2) = C(-\xi + v_1)^\lambda, \quad \xi < v_1,\ C \in \mathbb{R}, \tag{17b}$$

$$\xi = v_1, \quad \eta < v_2, \tag{17c}$$

$$\xi = v_1, \quad \eta > v_2, \tag{17d}$$

где $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$, $v = (v_1, v_2)$.

Зафиксируем ζ и зададим некоторое малое положительное число σ. Не уменьшая общности, можно считать, что вектор $v^1 - v^0$ имеет положительные координаты. Проведем следующие построения:

$$L_0(K_0) = \bigl\{(\xi, \eta) \in E_1 \mid \bigl(\eta - v_2^0\bigr) = K_0\bigl(\xi - v_1^0\bigr)^\lambda,\ \xi > v_1^0\bigr\},$$

$$L_1(K_0) = \big\{(\xi,\eta) \in E_1 \mid \big(\eta - v_2^1\big) = K_0\big(-\xi + v_1^1\big)^\lambda,\, \xi < v_1^1\big\}.$$

По сути, $L_0(K_0)$ является траекторией решения уравнения (11) при параметре, равном v^0, а $L_1(K_0)$ — при параметре, равном v^1.

Рассмотрим поведение этих кривых для различных значений константы $K_0 \geq 0$. Если изменять ее значение от $+\infty$ до 0, то картина будет меняться следующим образом: сначала траектории не будут пересекаться и $L_0(K_0)$ будет проходить слева относительно точки v^1; затем для некоторого единственного значения параметра $K_0 = k_2$ кривые касаются друг друга; далее они будут иметь две точки пересечения, пока не получим предельный случай при $K_0 = k_1$: пересечением являются точки v^0 и v^1; при остальных значениях константы K_0 кривые снова не имеют точек пересечения, но $L_0(K_0)$ уже будет проходить справа относительно точки v^1.

Далее нас будет интересовать только случай, когда имеются две точки пересечения, т. е. $K_0 \in [k_1, k_2)$. Обозначим точки пересечения через d_0 и d_1. Расстояния от d_0 до v^0 и от d_1 до v^1, очевидно, равны. Обозначим их через $\rho(K_0) = \rho(d_0, v^0) = \rho(d_1, v^1)$. Функция $\rho(\cdot)$ непрерывна на $[k_1, k_2)$, причем $\lim\limits_{K\to k_2} \rho(K) = \zeta/2$ и $\rho(k_1) = 0$. Таким образом, можно выбрать K_0 так, что, во-первых, траектории пересекутся в двух точках, а во-вторых,

$$\frac{\sigma}{2}\zeta < |d_0 - v^0|_{E_1} < \sigma\zeta, \quad \frac{\sigma}{2}\zeta < |d_1 - v^1|_{E_1} < \sigma\zeta.$$

Перейдем к следующему шагу. Построим множества

$$L_0(K_1, K_2) = \{(\xi,\eta) \in L_0(K) \mid K \in [K_1, K_2]\},$$

$$L_1(K_1, K_2) = \{(\xi,\eta) \in L_1(K) \mid K \in [K_1, K_2]\}.$$

Константы K_1 и K_2 различны и выбираются так, чтобы множества

$$\widetilde{D}_0 = (L_0(K_1, K_2) \cap L_1(K_1, K_2)) \cap B(v^0, \zeta/2),$$

$$\widetilde{D}_1 = (L_0(K_1, K_2) \cap L_1(K_1, K_2)) \cap B(v^1, \zeta/2),$$

где $B(v, \rho)$ — шар радиуса ρ с центром v, удовлетворяли неравенствам

$$\frac{\sigma}{2}\zeta < |\widetilde{D}_0 - v^0|_{E_1} < \sigma\zeta, \quad \frac{\sigma}{2}\zeta < |\widetilde{D}_1 - v^1|_{E_1} < \sigma\zeta. \tag{18}$$

Покажем возможность выбора этих констант. Для начала возьмем отрезок $[\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2] \subset [k_1, k_2)$, содержащий точку K_0. Для него определены множества $\widetilde{D}_0$ и $\widetilde{D}_1$. Если устремить $\widetilde{K}_1 \to K_0$ и $\widetilde{K}_2 \to K_0$, то множества $\widetilde{D}_i$ сжимаются к точкам d_i, т. е. будут выполнены неравенства (18). Таким образом, можно выбрать необходимые константы K_1 и K_2, достаточно близкие к K_0.

Получившиеся множества обозначим через $L_0(K_1, K_2) = L_0$, $L_1(K_1, K_2) = L_1$. Перейдем к последнему шагу. Выбрав достаточно малое положительное α, построим множества

$$N_i = \bigcup_{x \in L_i} B(x, \alpha\zeta), \quad i = 0, 1.$$

Число α выбирается так, чтобы множества

$$D_0 = (L_0 \cap N_1) \cap B(v^0, \zeta/2), \quad D_1 = (L_1 \cap N_0) \cap B(v^1, \zeta/2)$$

удовлетворяли неравенствам

$$\frac{\sigma}{2}\zeta < |D_0 - x^0|_{E_1} < \sigma\zeta, \quad \frac{\sigma}{2}\zeta < |D_1 - x^1|_{E_1} < \sigma\zeta.$$

Так как $\rho(D_i, \widetilde{D}_i) \to 0$ при $\alpha \to 0$, то нужное α всегда можно подобрать.

Замечание. При преобразовании гомотетии с центром v^0 траектории решений будут переходить в траектории решений этого же семейства (17) с учетом того, что и второй параметр v^1 тоже будет меняться. Тем самым построения для любого ζ можно производить таким образом, что α каждый раз будет одним и тем же. Таким образом, будем считать, что α от ζ не зависит, а зависит только от σ.

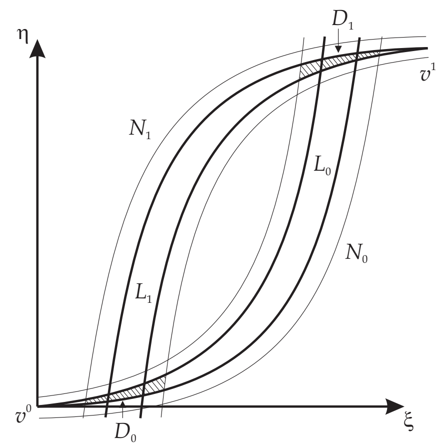

Рис. 2.

После того как произведены все вышеописанные построения, которые схематично изображены на рис. 2, сформулируем основную идею процесса управления. Ниже показано, что проекция решения на E_2 достаточно мала, поэтому управлять будем только проекцией решения на E_1. Пусть $v = v^0$ и проекция решения на E_1 в начальный момент времени находится в области D_0. Тогда проекция на E_1 траектории решения линеаризованного уравнения будет лежать в области L_0, а проекция на E_1 траектории решения исходного уравнения, как будет показано ниже, лежит в области N_0. Из рисунка видно, что эта траектория пересекает область D_1. Следовательно, некоторое время проекция решения на E_1 будет находиться в D_1, где мы «переключим» параметр, положив $v = v^1$. Далее эта же траектория будет находиться в области N_1, где она пересечет D_0. В один из моментов времени, когда проекция решения на E_1 окажется в области D_0, мы снова вернемся к значению параметра $v = v^0$, и т. д. Процесс будет повторяться циклическим образом сколь угодно долго.

Сформулировав идею управления, приступим к ее обоснованию. Введем следующие нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$, E_1, E_2. Пусть $a \in E_1$, $a = (x_1, y_1)$ в нормированном базисе из собственных векторов матрицы A_1, тогда положим $|a|_{E_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. В пространстве E_2 пусть задана какая-либо норма $|\cdot|_{E_2}$. Для $a \in \mathbb{R}^n$ положим $|a|_{\mathbb{R}^n} = |Pa|_{E_1} + |Qa|_{E_2}$.

Установим нижнюю T_0 и верхнюю T_1 оценки на момент «переключения» из следующих условий:

1) $z_1(0) \in D_0 \Rightarrow |z_1(t) - v^0|_{\mathbb{R}^n} \le \frac{\zeta}{2}$ для любого $t \in [0, T_0]$

2) $z_1(0) \in D_0 \Rightarrow |z_1(T_1) - v^0|_{\mathbb{R}^n} \ge 2\zeta$.

Лемма 2. *В качестве констант T_0 и T_1 можно взять*

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{2\sigma}, \tag{19}$$

$$T_1 = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{4}{\sigma}. \tag{20}$$

Теперь перейдем к уравнению (12), а точнее к оценке (13). Положив $\varepsilon_0 = -\frac{\mu}{2} > 0$ и использовав (19), оценим выражение $K_{\varepsilon_0} e^{(\mu+\varepsilon_0)t}$ для $t \ge T_0$:

$$K_{\varepsilon_0} e^{(\mu+\varepsilon_0)t} \le K_{\varepsilon_0} e^{\frac{\mu}{2} T_0} = K_{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{2\sigma}\right)^{\frac{\mu}{2\lambda_2}}.$$

Подберем теперь σ так, чтобы выражение в правой части было равно $\frac{1}{2}$. Получаем

$$\sigma = \frac{1}{2}(2K_{\varepsilon_0})^{\frac{2\lambda_2}{\mu}}. \tag{21}$$

Лемма 3. *Существует константа $L > 0$ такая, что если начальные данные для уравнения (9) с параметром v^0 удовлетворяют условиям*

1) $Px(0) \in D_0$,

2) $|Q(x(0) - y^0)|_{E_2} \le L\delta$,

то найдется такой интервал $(t_0, t_1) \subset [T_0, T_1]$, что для любого $\tau \in (t_0, t_1)$ выполнено

1) $Px(\tau) \in D_1$,

2) $|Q(x(\tau) - y^1)|_{E_2} \le L\delta$.

В качестве константы L можно взять

$$L = 2(C_0\alpha + C_1). \tag{22}$$

Найдем достаточные условия для того, чтобы при всех $t \in [0, T_1]$ выполнялось следующее неравенство:

$$|P(x(t) - z(t))|_{E_1} \le \alpha\zeta. \tag{23}$$

В лемме 1 положим $T = T_1$, $v = v^0$ и, используя (16), получим для любого $t \in [0, T_1]$ оценку

$$|P(x(t) - z(t))|_{E_1} \le C_1\varepsilon|x^0|_{\mathbb{R}^n} \le C_1\varepsilon\delta_0. \tag{24}$$

Чтобы можно было воспользоваться леммой 1, необходимо иметь $|x^0|_{\mathbb{R}^n} \le \delta_0$. В силу леммы 3

$$|x^0|_{\mathbb{R}^n} = |Px^0|_{E_1} + |Qx^0|_{E_2} \le \sigma\zeta + L\delta \le (C_1 + L)\delta.$$

Поэтому δ_0 возьмем равным

$$\delta_0 = (C_1 + L)\delta. \tag{25}$$

Из (16) имеем $\alpha C_0\delta \le \alpha\zeta$. Таким образом, если в качестве ε возьмем

$$\varepsilon = \frac{C_0}{C_1(C_1 + L)}\alpha, \tag{26}$$

то

$$|P(x(t) - z(t))|_{E_1} \le C_1\varepsilon\delta_0 = C_1\frac{C_0}{C_1(C_1 + L)}\alpha(C_1 + L)\delta = \alpha C_0\delta \le \alpha\zeta,$$

т. е. получили в точности (23).

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4. *Пусть начальные данные для уравнения (9) с параметром v^1 удовлетворяют условиям*

1) $Px(0) \in D_1$,

2) $|Q(x(0) - y^1)|_{E_2} \le L\delta$,

где константа L та же самая, что и в лемме 3. Тогда существует интервал $(t_0, t_1) \subset [T_0, T_1]$ такой, что для любого $\tau \in (t_0, t_1)$ выполнено

1) $Px(\tau) \in D_0$,

2) $|Q(x(\tau) - y^0)|_{E_2} \le L\delta$.

После того как сформулированы все необходимые результаты, можем привести основную теорему, которая показывает возможность осуществления управления решением в окрестности неустойчивого стационарного «режима».

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *функция* f *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $f(x,u)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* (a,u^0)*;*

2) $f(a,u^0)=0$*;*

3) *собственные значения матрицы* $D_x f(a,u^0)$ *удовлетворяют условиям* $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ *и* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i=3,\dots,n$*;*

4) *функция* $y(u)$*, существование которой вытекает из приведенных выше условий, удовлетворяет условию* (5).

Тогда для любой окрестности V *точки* a *можно найти две области* D_0, $D_1 \subset V$, $\rho(D_0,D_1)>0$*, а также еще одно значение параметра* u^1 *так, что решение, начинающееся в* D_0 *при параметре, равном* u^0*, через некоторое время попадет в* D_1*, не выйдя из* V*. Обратно, решение, начинающееся в* D_1 *при параметре, равном* u^1*, через некоторое время попадет в* D_0*, не выйдя из* V*.*

4. Выбор констант

В ходе всех вышеупомянутых рассуждений использовались различные константы, зависящие друг от друга. Покажем, что все эти константы можно корректно выбрать.

1. Имеются собственные значения λ_i матрицы A, которые естественно зависят только от исходной задачи.

2. В оценке (13) $\mu = \max\limits_{i=3,\dots,n} \operatorname{Re}\lambda_i$, ε_0 положим равным $-\frac{\mu}{2}$ и по ε_0 найдем K_{ε_0}.

3. Константы C_0, C_1, участвующие в оценках норм проекторов, зависят от исходной задачи и введенной нормы в $\mathbb{R}^n$.

4. Из равенства (21) по уже заданным μ, K_{ε_0} находим σ: $\sigma = \frac{1}{2}(2K_{\varepsilon_0})^{\frac{2\lambda_2}{\mu}}$.

5. Из леммы 2 по σ находим T_1: $T_1 = \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{4}{\sigma}$.

6. Зная σ, выберем второй параметр $\tilde v^1$ так, чтобы $\zeta = 1$. Произведем построения L_0 и L_1 и найдем α.

7. Из (22) по заданному α находим $L = 2(C_0\alpha + C_1)$.

8. Из (26), зная C_0, C_1, L и α, находим $\varepsilon = \frac{C_0}{C_1(C_1+L)}\alpha$.

9. Из леммы 1 по заданным ε и T_1 находим δ_0.

10. Из (25) получаем $\delta = \frac{1}{(C_1+L)}\delta_0$.

11. По δ подбираем коэффициент сжатия при преобразовании гомотетии относительно v^0 так, чтобы $|y^1 - y^0|_{\mathbb{R}^n} = \delta$, где y^1 — стационарное решение, отвечающее параметру v^1, в который перейдет $\tilde v^1$ при данном преобразовании.

12. Полагаем $\zeta = |v^1 - v^0|_{E_1}$.

5. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Обозначим $\bar z(t) = x(t) - z(t)$ при условии $x(0) = z(0) = x^0$ и $z_0(t) = z(t) - \tilde y(v)$. Отсюда получаем, что $\bar z(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{\bar z}(t) = A\bar z(t) + \overline{A}(v)(\bar z(t) + z_0(t)) + \widetilde{\varphi}(\bar z(t) + z_0(t), v), \quad \bar z(0) = 0.$$

Домножив на e^{-At} слева, получим

$$e^{-At}\dot{\bar z} = e^{-At}A\bar z + e^{-At}(\overline{A}(v)(\bar z + z_0) + \widetilde{\varphi}(\bar z + z_0, v)),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\bar{z}) = e^{-At}(\overline{A}(v)(\bar{z}+z_0) + \widetilde{\varphi}(\bar{z}+z_0, v))$$

$$\Rightarrow \bar{z}(t) = e^{At}\int\limits_0^t e^{-A\xi}(\overline{A}(v)(\bar{z}(\xi)+z_0(\xi)) + \widetilde{\varphi}(\bar{z}(\xi)+z_0(\xi), u))\,d\xi$$

$$\Rightarrow |\bar{z}(t)|_{\mathbb{R}^n} = |e^{At}|_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^t |e^{-A\xi}|_{\mathbb{R}^n}(|\overline{A}(v)|_{\mathbb{R}^n}|\bar{z}(\xi)+z_0(\xi)|_{\mathbb{R}^n} + |\widetilde{\varphi}(\bar{z}(\xi)+z_0(\xi), v)|_{\mathbb{R}^n})\,d\xi;$$

$$|e^{At}|_{\mathbb{R}^n} \le K_1\ (0 \le t \le T); \quad |e^{-A\xi}|_{\mathbb{R}^n} \le K_2\ (0 \le \xi \le t \le T);$$

$$|\widetilde{\varphi}(\bar{z}+z_0, v)|_{\mathbb{R}^n} \le C(v)|\bar{z}+z_0|^2_{\mathbb{R}^n} \le C(|\bar{z}|_{\mathbb{R}^n} + |z_0|_{\mathbb{R}^n})^2; \quad |\overline{A}(v)|_{\mathbb{R}^n} = \alpha(v).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}|\bar{z}(t)|_{\mathbb{R}^n} &\le K_1K_2T(C\max_{\xi\in[0,t]}(|\bar{z}|_{\mathbb{R}^n} + |z_0|_{\mathbb{R}^n})^2 + \alpha(v)\max_{\xi\in[0,t]}(|\bar{z}|_{\mathbb{R}^n} + |z_0|_{\mathbb{R}^n}))\\ &\le K_3(\max_{\xi\in[0,t]}|\bar{z}(\xi)|_{\mathbb{R}^n} + \max_{\xi\in[0,t]}|z_0(\xi)|_{\mathbb{R}^n})^2 + K_4(\max_{\xi\in[0,t]}|\bar{z}(\xi)|_{\mathbb{R}^n} + \max_{\xi\in[0,t]}|z_0(\xi)|_{\mathbb{R}^n}),\end{aligned}$$

где $K_3 = K_1K_2TC$, $K_4 = K_1K_2T\alpha(v)$, причем $K_4 \to 0$ $(v \to v^0)$ за счет $\alpha(v)$.

Из уравнения (10) следует, что $z_0(t) = e^{At}x^0$. Значит,

$$|z_0(t)|_{\mathbb{R}^n} \le |e^{At}|_{\mathbb{R}^n}|x^0|_{\mathbb{R}^n} \le K_1|x^0|_{\mathbb{R}^n} = K_5.$$

Введем следующую норму: $\|\bar{z}(t)\|_E = \max\limits_{\xi\in[0,t]}|\bar{z}(t)|_{\mathbb{R}^n}$, тогда

$$\|\bar{z}(t)\|_E \le K_3(\|\bar{z}(t)\|_E + K_5)^2 + K_4(\|\bar{z}(t)\|_E + K_5),$$

т. е.

$$K_3\|\bar{z}(t)\|^2_E + (2K_3K_5 + K_4 - 1)\|\bar{z}(t)\|_E + K_3K_5^2 + K_4K_5 \ge 0.$$

Рассмотрим квадратное уравнение, соответствующее полученному квадратному неравенству. Дискриминант его

$$D = (2K_3K_5 + K_4 - 1)^2 - 4K_3^2K_5^2 - 4K_3K_4K_5 = (K_4 - 1)^2 - 4K_3K_5$$

будет положительным, поскольку K_5 можно сделать сколь угодно малым за счет выбора δ_0. Тогда уравнение будет иметь два действительных корня, которые обозначим через a и b, причем $b > a > 0$. Так как $\bar{z}|_{t=0} = 0$, то $\|\bar{z}\|_E|_{t=0} = 0$. Из непрерывности $\bar{z}(t)$ следует, что $\|\bar{z}(t)\|_E$ также непрерывна, а следовательно, $\|\bar{z}(t)\|_E \le a$. Таким образом,

$$\begin{aligned}|\bar{z}(t)|_{\mathbb{R}^n} \le \|\bar{z}(t)\|_E \le a &= \frac{(1 - 2K_3K_5 - K_4) - \sqrt{D}}{2K_3}\\ &= \frac{\left(1 - \frac{2K_3K_5}{1-K_4}\right) - \sqrt{1 - \frac{4K_3K_5}{(1-K_4)^2}}}{\frac{2K_3}{1-K_4}} = \frac{\left(1 - \frac{2K_3K_5}{1-K_4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{4K_3K_5}{(1-K_4)^2} + O(K_5^2)\right)}{\frac{2K_3}{1-K_4}}.\end{aligned}$$

В силу определения O имеем

$$O\big(K_5^2\big)\frac{1-K_4}{2K_3} \le K'\frac{1-K_4}{2K_3}K_5^2 = K''K_5^2.$$

Продолжая цепочку неравенств, получаем

$$|\bar{z}(t)|_{\mathbb{R}^n} \le \frac{K_4}{1-K_4}K_5 + K''K_5^2 = \left(\frac{K_4}{1-K_4} + K''K_5\right)K_1|x^0|_{\mathbb{R}^n}.$$

Коэффициент при $|x^0|_{\mathbb{R}^n}$ в правой части полученного неравенства можно сделать сколь угодно малым, выбирая соответствующим образом K_4 и K_5. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Решение задачи (11) в выбранной нами системе координат запишется так:

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}x(0) + v_1^0, \quad y(t) = e^{\lambda_2 t}y(0) + v_2^0.$$

Тогда для любого $t \in [0, T_0]$ имеем

$$\begin{aligned}\big|(x(t), y(t)) - \big(v_1^0, v_2^0\big)\big|_{E_1} &= |(e^{\lambda_1 t}x(0), e^{\lambda_2 t}y(0))|_{E_1}\\ &\le |(x(0), y(0))|_{E_1}e^{\lambda_2 t} \le \sigma\zeta e^{\lambda_2 t} \le \sigma\zeta e^{\lambda_2 T_0} \le \frac{\zeta}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$T_0 \le \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{1}{2\sigma}$$

и

$$\begin{aligned}\big|(x(T_1), y(T_1)) - \big(v_1^0, v_2^0\big)\big|_{E_1} &= |(e^{\lambda_1 T_1}x(0), e^{\lambda_2 T_1}y(0))|_{E_1}\\ &\ge |(x(0), y(0))|_{E_1}e^{\lambda_1 T_1} \ge \zeta\frac{\sigma}{2}e^{\lambda_1 T_1} \ge 2\sigma.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$T_1 \ge \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{4}{\sigma}.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Пусть начальные данные $x(0)$ взяты, как сказано в условии. Рассмотрим $x(t)$ и $z(t)$ с начальными данными $x(0)$. Из построений следует, что $Pz(t) \in L_0$, так как L_0 — это совокупность решений задачи (11) с начальными данными в D_0. Из оценки (23) имеем $|P(x(t)-z(t))|_{E_1} \le \alpha\zeta$, откуда $Px(t) \in N_0$. Также для любого $t \in [0, T_0]$ справедливо $|Pz(t) - v^0|_{E_1} \le \frac{\zeta}{2}$ из чего следует, что

$$\begin{aligned}|Px(t) - v^0|_{E_1} &= |P(x(t) - z(t) + z(t)) - v^0|_{E_1}\\ &\le |P(x(t)-z(t))|_{E_1} + |Pz(t) - v^0|_{E_1} \le \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\zeta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|P(x(T_1)) - v^0|_{E_1} &= |P(x(T_1) - z(T_1) + z(T_1)) - v^0|_{E_1}\\ &\ge |P(z(T_1)) - v^0|_{E_1} - |P(x(T_1) - z(T_1))|_{E_1} \ge (2-\alpha)\zeta.\end{aligned}$$

Значит, существует интервал $(t_0, t_1) \subset [T_0, T_1]$ такой, что $Pz(\tau) \in D_1$ для любого $\tau \in (t_0, t_1)$. Теперь докажем вторую оценку, о которой сказано в заключении леммы 3:

$$\begin{aligned}&|Q(x(\tau) - y^2)|_{E_2} \le |Q(x(\tau) - z(\tau))|_{E_2} + |Q(z(\tau) - y^1)|_{E_2}\\ &+|Q(y^2 - y^1)|_{E_2} \le C_1\varepsilon\delta_0 + \frac{1}{2}|Q(z(0) - y^1)|_{E_2} + C_1\delta \le \left(C_0\alpha + \frac{1}{2}L + C_1\right)\delta \le L\delta,\end{aligned}$$

т. е. достаточно, чтобы выполнялось $C_0\alpha + \frac{1}{2}L + C_1 = L$, для этого можно положить $C_0\alpha + C_1 = \frac{L}{2}$. Отсюда получаем $L = 2(C_0\alpha + C_1)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеленяк Т. И., Слинько М. Г.* Динамика каталитических систем // Кинетика и катализ. 1977. Т. 18, № 5. С. 1235–1248; 1977. Т. 18, № 6. С. 1548–1560.

2. *Мусиенко Е. И.* Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // Динамика сплошной среды. 1981. № 51. С. 68–83.

3. *Мусиенко Е. И.* Управление решением некоторых параболических задач в окрестности неустойчивого стационарного решения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 12. С. 2120–2130.

4. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.

5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 15 ноября 2005 г.

Ивирсин Максим Борисович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
`imb@gorodok.net`