Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.54

ЛОКАЛЬНО БИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. В. Старков

Аннотация: В [1, 2] были найдены достаточные условия на область комплексной плоскости, при которых ее можно локально биголоморфно и конечнолистно отобразить на всю плоскость. В предлагаемой статье найдены необходимые и достаточные условия на области, обладающие этим свойством. Здесь же дан ответ на вопрос Аксентьева — Ульянова, поставленный в связи с решаемой задачей. Ответ этот позволяет дать нижнюю оценку константы листности при обобщении результата из [3] на поликруговые области.

Ключевые слова: локально биголоморфное отображение, многолистная функция, поликруговая область.

Введение. Вопрос о существовании локально биголоморфного отображения f произвольной области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ возник в работе Лигоцкой [1] в связи с решавшейся в [1] проблемой: всякая ли открытая риманова поверхность X является областью Римана над всем $\mathbb{C}$? Под локально биголоморфным отображением f, заданным на открытом n-мерном комплексном многообразии M, как обычно, понимаем отображение, голоморфное и инъективное в некоторой окрестности каждой точки из M. В случае, когда M — плоская область, класс локально биголоморфных отображений этой области совпадает с классом конформных в M отображений f (т. е. $f'(z) \neq 0$, $z \in M$). На поставленный вопрос Лигоцка дает положительный ответ. Кроме того, она поднимает в [1] вопрос о листности отображения f. Отображение f области $\mathscr{D}$ на Ω называется *m-листным*, ($m \in \mathbb{N}$), если для любого $w \in \Omega$ множество $\{f^{-1}(w)\}$ непусто и состоит не более чем из m точек.

Выяснилось, что существуют области (например, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$), которые невозможно локально биголоморфно и конечнолистно отобразить на $\mathbb{C}$. Однако Лигоцка доказала, что каждую конечносвязную область $\mathscr{D} \neq \mathbb{C}\setminus\{a\}$ ($a \in \mathbb{C}$) можно m-листно и локально биголоморфно отобразить на $\mathbb{C}$, при этом постоянную m оценить не удалось.

Этот результат Лигоцкой существенно усилен в [2].

Определение [2]. Пусть $\mathscr{D}$ — область в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathscr{D}$ *имеет изолированный граничный фрагмент*, если выполнено по крайней мере одно из следующих трех условий.

(I) Существуют невырожденный континуум (т. е. связное замкнутое множество, отличное от точки) $K \subset \partial\mathscr{D}$ и открытое множество $\mathscr{U}$, для которых $K \subset \mathscr{U}$ и $(\partial\mathscr{D} \setminus K) \cap \mathscr{U} = \varnothing$. В этом случае будем говорить, что область $\mathscr{D}$ имеет *изолированный граничный фрагмент* I *рода*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00962).

(II) Существуют кривая Жордана $\Gamma \subset \partial\mathscr{D}$ с концами ξ, η и открытый круг B, для которых $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$, $\xi, \eta \in \partial B$ и $(\partial\mathscr{D} \setminus \Gamma) \cap B = \varnothing$. При этом назовем $\mathscr{D}$ *областью с изолированным граничным фрагментом* II *рода.*

(III) Область $\mathscr{D}$ имеет изолированную граничную точку. О такой области скажем, что она имеет *изолированный граничный фрагмент* III *рода.*

В этом определении роль *изолированного граничного фрагмента* области в случае (I) играет континуум K, в случае (II) — кривая Γ, в (III) — изолированная граничная точка. Заметим, что в этом определении и всюду далее рассматриваются области $\mathscr{D}$ любой связности, в том числе бесконечносвязные. Конечносвязные области, имеющие неизолированные граничные точки, являются частным случаем областей с изолированным граничным фрагментом I рода. Имеющая изолированный граничный фрагмент область $\mathscr{D}$ может одновременно быть областью двух или всех трех перечисленных в определении типов. Например, открытое круговое кольцо является областью с изолированными граничными фрагментами I и II рода, а такое кольцо с выколотой точкой одновременно является областью с изолированными граничными фрагментами I, II и III рода.

Существуют области, не имеющие изолированного граничного фрагмента. Пример такой области дает следующая конструкция.

Рассмотрим на плоскости открытый единичный квадрат Q (стороны его и других строящихся здесь квадратов параллельны осям координат). Выделим в нем четыре меньших попарно не пересекающихся квадрата со сторонами длины $a_1 = 3^{-1}$, каждый из которых имеет одну общую вершину с исходным. Удалим из Q все вершины вновь построенных квадратов. С каждым из меньших квадратов, взяв его за исходный, повторим описанную выше процедуру. Получим 4^2 квадратов с длиной стороны $a_2 = 3^{-2}$, удалим из Q вершины этих квадратов и т. д. На n-м шаге строим 4^n малых квадратов со стороной длины $a_n = 3^{-n}$ и удалим из Q все их вершины, и так для каждого натурального n. Удалив из Q счетное множество описанных выше точек, получим бесконечносвязную область $Q_0 \subset Q$, у которой нет изолированных граничных фрагментов.

В [2] доказана

Теорема A [2]. *Если область $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathscr{D} \neq \mathbb{C} \setminus \{a\}$ $(a \in \mathbb{C})$, имеет изолированный граничный фрагмент, то ее можно 3-листно и локально биголоморфно отобразить на $\mathbb{C}$. Не существует локально биголоморфного 2-листного отображения области с изолированным граничным фрагментом* III *рода на все $\mathbb{C}$. Таким образом, константа листности $m = 3$ является наилучшей для рассматриваемого класса областей.*

Естественно возникает вопрос (он был озвучен профессором Л. А. Аксентьевым в 2004 г. на конференции в Петрозаводске и профессором П. Л. Ульяновым на конференции в Воронеже в 2005 г.) о точности константы $m = 3$ и для областей с изолированным граничным фрагментом I и II рода. В предлагаемой работе дается ответ на поставленный вопрос. Усилия, связанные с получением соответствующего результата (см. теорему 2), могли бы показаться неадекватными степени его важности, если бы не одно обстоятельство. Непосредственно из доказательства теоремы 2 вытекает теорема 3. Теперь пришло время вспомнить о второй части работы [1].

Лигоцка в [1] рассматривала также проблему существования локально биголоморфных конечнолистных отображений многосвязных областей на круг $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Интерес к этой задаче обусловлен, прежде всего, результатом Форнаэсса и Стаута [3], которые доказали, что для любого связного паракомпактного n-мерного комплексного многообразия X существует m-листное локально биголоморфное отображение f поликруга Δ^n на X. Им удалось дать оценку $m \leq 4^n(2n+1)+2$. Оказывается, подобный факт справедлив не только для поликруга, но и для поликруговых областей $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 \times \dots \times \mathscr{D}_n$, где $\mathscr{D}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ — произвольные области, имеющие изолированный граничный фрагмент I рода (естественно, оценка листности m в этом случае будет хуже). Это следует из доказанной в [1] теоремы 4, утверждающей существование 24-листного конформного отображения области с изолированным граничным фрагментом I рода на круг Δ.

Этот результат перекрыт в [2]: для любой области с изолированным граничным фрагментом I или II рода предложена конструкция 5-листного конформного отображения такой области на Δ. Была высказана гипотеза, что $m = 3$ — наилучшая константа листности для данного класса областей.

Теорема 3 настоящей работы дает оценку этой константы листности снизу: $m \geq 3$, укрепляя нашу гипотезу в [2].

Теперь, возвращаясь к вопросу о существовании конечнолистного конформного отображения области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathscr{D} \neq \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$, на $\mathbb{C}$, отметим, что в [1, 2] доказывались достаточные условия на область $\mathscr{D}$ (наличие изолированного граничного фрагмента), при котором такое отображение существует. Каковы же необходимые и достаточные условия этого? Ответ на этот вопрос (его дает теорема 1) удивителен: *никаких*. Правда, наилучшую константу листности здесь удается только оценить: $m \leq 5$. Таким образом, $3 \leq m \leq 5$ с учетом теоремы A и теоремы 2.

Результаты и доказательства.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{D}$ — произвольная область плоскости $\mathbb{C}$, не имеющая изолированного граничного фрагмента. Существует конформное 5-листное отображение ее на $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку множество $\partial\mathscr{D}$ несвязно, его можно представить в виде объединения двух непустых замкнутых множеств: $E_1 \cup E_2 = \partial\mathscr{D}$ таких, что $\rho(E_1, E_2) = \delta > 0$. Обозначим через $z_k \in E_k$ $(k = 1, 2)$ точки, для которых $|z_1 - z_2| = \delta$. На интервале (z_1, z_2) как на диаметре построим открытый круг K_0. Из определения z_1 и z_2 вытекает, что $K_0 \subset \mathscr{D}$ или $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus \mathscr{D}$. Предположим, что $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus \mathscr{D}$. Поскольку $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathscr{D}} = \bigcup\limits_j D^J$, где D^j — попарно дизъюнктные односвязные области, то K_0 лежит в одной из этих областей D^{j_0}, причем $\partial\mathscr{D} \supset \partial D^{j_0} \ni \{z_1, z_2\}$, т. е. z_1 и z_2 принадлежат связному подмножеству из $\partial\mathscr{D}$; противоречие с выбором z_1 и z_2. Следовательно, $K_0 \subset \mathscr{D}$.

Варьируя центр круга K_0 на вещественной прямой $\mathbb{R}_t$, являющейся срединным перпендикуляром отрезка $[z_1, z_2]$, и соответственно изменяя радиус круга так, чтобы точки z_1 и z_2 все время оставались на границе круга, получим семейство $\{K_t\}_{t \in \mathbb{R}_t}$ новых кругов (здесь t — координата центра круга K_t на прямой $\mathbb{R}_t$). При непрерывном изменении центра t круга K_t от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$ остановимся в точке t_0, характеризуемой одним из условий:

1) на границе круга K_{t_0} имеется более двух точек из $\partial\mathscr{D}$, тогда как $\partial K_t \cap \partial\mathscr{D} = \{z_1, z_2\}$ для t таких, что $|t| < |t_0|$;

2) $\partial K_t \cap \partial\mathscr{D} = \{z_1, z_2\}$, если $|t| \leq |t_0|$, но множество $\overline{K_t} \cap \partial\mathscr{D}$ содержит более двух точек для $t > t_0 \geq 0$ или для $t < t_0 \leq 0$; этот случай реализуется,

например, когда точки из $\partial\mathscr{D}$ «приближаются» к z_1 или z_2 по касательной к кругу K_{t_0}.

При рассмотренных вариациях кругов имеется еще одна возможность — когда варианты 1 и 2 не реализуются, т. е. не существует точки $t_0 \in \mathbb{R}_t$, удовлетворяющей 1 или 2. Но тогда $\partial K_t \cap \partial\mathscr{D} = \{z_1, z_2\}$ для всех $t \in \mathbb{R}_t$. Следовательно, все точки из $\partial\mathscr{D}$ расположены на прямой, проходящей через z_1 и z_2, причем между z_1 и z_2 на этой прямой нет точек $\partial\mathscr{D}$. Тогда обозначим через z_3 какую-нибудь точку из $\partial\mathscr{D} \setminus \{z_1, z_2\}$. Дробно-линейным преобразованием $f_1(z)$ переведем область $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}_1 = f_1(\mathscr{D})$ так, чтобы отрезок $[z_1, z_2]$ перешел в $[1, +\infty]$, а $f_1(z_3) = -1$. Можно считать, что верхняя полуплоскость $\mathscr{P}^+$ содержится в $\mathscr{D}_1$, а точки $-1, 1, \infty$ не принадлежат $\mathscr{D}_1$. Ниже будет показано, что $\mathscr{D}_1$ можно конформно 5-листно отобразить на $\mathbb{C}$. Теперь рассмотрим каждый из двух вышеупомянутых случаев.

1. При реализации этого варианта на ∂K_{t_0} кроме z_1 и z_2 имеется по крайней мере еще одна точка из $\partial\mathscr{D}$ (обозначим ее через z_3). Дробно-линейным преобразованием f_1 переведем K_{t_0} в $\mathscr{P}^+$ так, чтобы $f_1(\partial K_{t_0} \cap K_0) = \{1, \infty\}$, $f_1(z_3) = -1$. Тогда область $\mathscr{D}_1 = f_1(\mathscr{D})$, как и ранее описанная, содержит $\mathscr{P}^+ \cup (1, +\infty)$ и не содержит точек $-1, 1, \infty$. Далее при рассмотрении случая 2 будет доказана возможность 5-листного конформного отображения области $\mathscr{D}_1$ на $\mathbb{C}$.

2. При реализации этого условия для определенности будем рассматривать случай перемещения t от 0 к $+\infty$. Можно подобрать сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы кроме z_1 и z_2 на $\partial K_{t_0+\varepsilon} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathscr{D})$ появилась третья точка z_3. Опять дробно-линейным отображением f_1 переведем $K_{t_0+\varepsilon}$ в $\mathscr{P}^+$ так, чтобы $f_1(\partial K_{t_0+\varepsilon} \cap K_o) = \{1, \infty\}$, $f_1(z_3) = -1$. При этом $f_1(K_{t_0}) = 1 + e^{-i\varphi}\mathscr{P}^+$, где $\varphi = \varphi(\varepsilon) > 0$ — угол между окружностями ∂K_{t_0} и $\partial K_{t_0+\varepsilon}$, тем самым $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$.

Как и прежде, обозначим $\mathscr{D}_1 = f_1(\mathscr{D})$, $\mathscr{D}_1$ не содержит точек $\{-1, 1, \infty\}$, $\mathscr{D}_1 \supset (\overline{\mathscr{P}^+} \setminus \Omega_\varphi)$, где Ω_φ — замкнутая угловая область раствора φ с вершиной в $z = 1$, $\partial\Omega_\varphi = (-\infty, 1) \cup l_\varphi$, l_φ — луч из верхней полуплоскости. Покажем, что $P(z) = 3z^5 - 10z^3 + 15z$ конформно отображает такую область $\mathscr{D}_1$ на $\mathbb{C}$. Поскольку $P'(z) = 15(z^2 - 1)^2$, то P конформно в $\mathscr{D}_1$, $P(1) = 8$, $P([1, +\infty)) = [8, +\infty)$. Точка $z = 1$ является нулем третьего порядка для

$$P(z) - 8 = 12(z-1)^3 + 15(z-1)^4 + 3(z-1)^5.$$

Поэтому один из прообразов множества $(-\infty, 8]$ при отображении P (обозначим его через L_1) — простая кривая, исходящая из 1 под углом $\frac{\pi}{3}$ к положительному направлению вещественной оси. Действительно, если L_1 имеет самопересечения, то существует область G, граница которой ∂G содержится в L_1, и на ∂G гармоническая функция $\operatorname{Im} P(z)$ равна нулю. Отсюда вытекает равенство $\operatorname{Im} P(z) = 0$ для всех $z \in G$, что невозможно. По этой же причине кривая L_1 не может пересекать вещественную ось. Обозначим через $z_1(x)$ такую параметризацию кривой L_1, что $P[z_1(x)] = x$ для $x \in [8, -\infty)$ и $z_1(x) = 1 + R_1 e^{it_1}$, $R_1 = R_1(x) \geq 0$, $t_1 = t_1(x)$ — вещественная функция. Тогда для всех $x \in [8, -\infty)$

$$x = P[z_1(x)] = 3R_1^5 e^{i5t_1} + 15R_1^4 e^{i4t_1} + 12R_1^3 e^{i3t_1} + 8 = R_1^5 e^{i5t_1}(3 + O(1/R_1))$$

при $R_1 \to \infty$. Поскольку $R_1(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $5t_1(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \pi$, т. е. L_1 уходит в ∞ под углом $\frac{\pi}{5}$ к вещественной оси. Подобласть G_1 верхней полуплоскости с границей $L_1 \cup [1, \infty)$ при отображении P покрывает всю верхнюю полуплоскость, так как если при таком отображении P существуют непокрытые точки из $\mathscr{P}^+$, то в $\mathscr{P}^+$ существуют граничные точки образа, что невозможно, поскольку при отображении P граничные точки образа могут быть только образами граничных точек области G_1. Легко показать, что все точки из $P(G_1)$ лежат в верхней полуплоскости и $P(G_1) = \mathscr{P}^+$, хотя это несущественно для доказательства.

Аналогично обозначим через L_2 простую кривую, исходящую из точки $z = 1$ под углом $\frac{2\pi}{3}$ и являющуюся прообразом луча $[8, +\infty)$. Пусть $z_2(x) = 1 + R_2 e^{it_2}$, $R_2 = R_2(x) \geq 0$ ($t_2 = t_2(x)$ — вещественная функция) — ее параметризация такая, что $P[z_2(x)] = x \in [8, +\infty)$. Поскольку $R_2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $\arg P[z_2(x)] = \arg\bigl[e^{i5t_2}\bigl(1 + O\bigl(\frac{1}{R_2}\bigr)\bigr)\bigr] = 2\pi$ при $x \to +\infty$ и L_2 уходит в ∞ под углом $\frac{2\pi}{5}$ к положительному направлению вещественной оси. Заметим, что L_2 не пересекает интервал $(-\infty, 1)$, так как в такой точке пересечения $a \in L_2$ имели бы $P(a) < 8$. Следовательно, замыкание в $\mathbb{C}$ области $D_* \subset \mathscr{P}^+$ с границей $\partial D_* = L_2 \cup [1, +\infty)$ лежит в $\mathscr{D}_1 \cup 1$, если $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ достаточно мало, т. е. если ε мало. Аналогично случаю области G_1 область G_2 из $\mathscr{P}^+$ с границей $L_2 \cup L_1$ при отображении P покрывает всю нижнюю полуплоскость, тогда $P(D_* \cup L_2 \cup [1, +\infty)) = \mathbb{C}$. Поэтому $P(\mathscr{D}_1)$ покрывает $\mathbb{C}$, за исключением, может быть, точки $P(1) = 8$.

Покажем существование такой точки $z_0 \in \mathscr{D}_1$, что $P(z_0) = 8$. Заметим, что $P((-\infty, -1]) = (-\infty, -8]$. Точка (-1) является нулем третьего порядка для $P(z) + 8$. Рассуждения, подобные предыдущим, приводят нас к существованию простой кривой L_3, исходящей из (-1) под углом $\frac{\pi}{3}$ к отрицательному направлению вещественной оси, $P(L_3) = [-8, +\infty)$. Следовательно, существует точка $z_0 \in L_3$ такая, что $P(z_0) = 8$.

Заметим, что L_3 не пересекает вещественной оси, иначе эта кривая вырезает из $\mathscr{P}^+$ подобласть G, ограниченную кусочно-гладкой кривой, на которой многочлен P принимает вещественные значения; а тогда по формуле Грина $\operatorname{Im}(P(z)) = 0$ в G.

Поскольку L_3 имеет с $\mathbb{R}$ только общую точку $z = -1$, то $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Следовательно, $z_0 \in \mathscr{D}_1$, если угол $\varphi(\varepsilon)$ достаточно мал. Таким образом, выбирая достаточно малое ε, можно добиться равенства $P(\mathscr{D}_1) = \mathbb{C}$. Тогда конформное в $\mathscr{D}$ отображение $P \circ f_1$ искомое не только в рассматриваемом случае 2, но и в прежде рассмотренных случаях.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы А и теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть $\mathscr{D}_j$, $j = 1, \dots, n$, — произвольные области из $\mathbb{C}$, не конформно изоморфные $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда существует локально биголоморфное 5^n-листное отображение поликруговой области $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 \times \dots \times \mathscr{D}_n$ на $\mathbb{C}^n$.*

Определение. Точку z_0 пути $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, будем называть *двойной*, если $z_0 = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ для некоторых $t_1 \neq t_2$ из $[a, b]$; эту точку z_0 также будем называть *двойной* точкой соответствующей кривой $\Gamma = \{\gamma(t),\ t \in [a, b]\}$. Двойную точку z_0 пути γ (или соответствующей ему кривой Γ) назовем *точкой раздвоенности*, если не существует окрестностей $U_1 = (t_1 - \delta_1', t_1 + \delta_1'')$ и $U_2 = (t_2 - \delta_2', t_2 + \delta_2'')$, имеющих одинаковые γ-образы (здесь $\delta_k' > 0 < \delta_k''$, $k = 1, 2$).

Таким образом, при перемещении вдоль Γ точка $\gamma(t)$ проходит точки раздвоенности по разным траекториям. Кроме того, из определения следует: если точка $\gamma(a)$ или $\gamma(b)$ является двойной точкой кривой Γ, то она является точкой раздвоенности этой кривой.

Лемма. *Если на кривой Γ с аналитической параметризацией $\gamma(t), \gamma'(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$, имеется по крайней мере одна двойная точка, то существует такой* *невырожденный отрезок* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, *что* $\Gamma' = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ *— простая замкнутая кривая,* $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. *При этом на* Γ *существует только конечное множество точек раздвоенности.*

Доказательство. Сначала исключим возможность существования бесконечного множества точек раздвоенности на Γ. Предположим противное: пусть существуют последовательности $\{t'_n\}, \{t''_n\} \subset [a, b]$, $t'_n \neq t''_n$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $\gamma(t'_n) = \gamma(t''_n)$ — точки раздвоенности. Можно считать, что $t'_n \to t'$, $t''_n \to t''$ при $n \to \infty$. Обозначим $z_0 = \gamma(t') = \gamma(t'') \in \Gamma$. Аналитически продолжим γ в такие малые плоские окрестности U_1 и U_2 точек t' и t'' соответственно, чтобы продолженные отображения γ_k были однолистны в U_k, $k = 1, 2$, и аналитическая функция

$$f(z) = \gamma_2^{-1}[\gamma_1(z)] = t'' + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - t')^n$$

переводила окрестность U_1 в U_2. Функция f отображает интервал $U_1 \cap \mathbb{R}$ в кривую, имеющую общие точки $\{t''_n\}$ с $U_2 \cap \mathbb{R}$, но не совпадающую с этим интервалом, какой бы малой ни взяли окрестность U_1, — это следует из определения точек раздвоенности. Однако это противоречит монотонности аргумента касательной

$$f'(t) = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n (t - t')^{n-1}, \quad t \in U_1 \cap \mathbb{R},$$

в малой окрестности точки t'. Следовательно, на Γ может быть лишь конечное множество точек раздвоенности. Поэтому дальнейшее доказательство можно проводить индукцией по m — числу различных жордановых дуг из $\{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$, оканчивающихся в точках раздвоенности кривой Γ.

Для $m = 1$ утверждение леммы очевидно, $[\alpha, \beta] = [a, b]$. Пусть это утверждение доказано для $m \in \mathbb{N}$ и Γ имеет $m + 1$ дуг, оканчивающихся в точках раздвоенности (некоторые из этих дуг могут совпадать полностью или частично). Обозначим через $a_1 \in (a, b]$ ближайшую к a точку промежутка $(a, b]$, для которой $\gamma(a_1)$ — точка раздвоенности. Тогда кривая $\Gamma_1 = \{\gamma(t) : t \in [a_1, b]\}$ имеет m дуг, оканчивающихся в точках раздвоенности этой кривой, и по индуктивному предположению Γ_1 обладает утверждаемым леммой свойством.

Лемма доказана.

Теорема 2. *В теореме* A *константа* 3 *является точной не только для областей с изолированным граничным фрагментом* III *рода, но и в случае областей* I *и* II *рода.*

Доказательство. В качестве области $\mathscr{D}$ рассмотрим круг Δ. Он является областью с изолированным граничным фрагментом одновременно I и II рода. Предположим, что существует конформное 2-листное отображение f круга Δ на $\mathbb{C}$. Обозначим через $r_0 \in (0, 1)$ радиус наибольшего из кругов $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$, $r \in (0, 1)$, в котором f однолистна, $\Gamma_{r_0} = \partial \Delta_{r_0}$. Кривая $L_{r_0} = f(\Gamma_{r_0})$ аналитическая, замкнутая, касающаяся себя по крайней мере в одной точке. Обозначим через B_{r_0} связный компакт из $\mathbb{C} \setminus f(\Delta_{r_0})$, ограниченный связной дугой $L'_{r_0} \subset L_{r_0}$ (существование такой дуги L'_{r_0} с началом и концом в некоторой точке $a \in L_{r_0}$ вытекает из леммы). Обозначим $\Gamma_r = \partial \Delta_r$, $L_r = f(\Gamma_r)$ при $r > r_0$. Функция f уже не однолистна в Δ_r.

Поскольку L_{r_0} — простая замкнутая кривая, то из локальной однолистности f и равномерной непрерывности ее на компактах из Δ вытекает, что при достаточно малых δ и $r = r_0 + \delta$ существует жорданова дуга $L_r^* = \{f(re^{it}) : t \in [a,b]\}$, лежащая в полосе $\{w \in \mathbb{C} : \varepsilon < \rho(w, L'_{r_0}) < C\varepsilon\} \cap B_{r_0}$ (здесь $\varepsilon = \varepsilon(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} +0$, C — постоянная, зависящая только от f) и такая, что для любой точки $w_0 \in L'_{r_0}$ существует точка $w \in L_r^*$, для которой $\rho(w_0, w) \in (\varepsilon, C\varepsilon)$. Отсюда и из того, что точка $a \in \partial B_{r_0}$ является угловой точкой области $\operatorname{int} B_{r_0}$ с величиной угла 0, следует, что L_r^* имеет по крайней мере одну двойную точку в $\operatorname{int} B_{r_0}$ в $C\varepsilon$-окрестности точки a. Тогда по лемме существует простая замкнутая кривая

$$L'_r = \{f(re^{it}) : t \in [\alpha, \beta]\} \subset L_r, \quad \alpha = \alpha(r),\ \beta = \beta(r),\ r = r_0 + \delta,$$

лежащая в $\operatorname{int} B_{r_0}$. Обозначим $\Gamma'_r = \{re^{it} : t \in [\alpha, \beta]\}$, $a(r) = f(\partial\Gamma'_r)$, B_r — компакт из $\mathbb{C}$ с границей L'_r, $B_r \subset \operatorname{int} B_{r_0}$. Из равномерной непрерывности f' на компактах из Δ следует, что величина угла в угловой точке $a(r)$ области B_r мало меняется при малых δ. Поэтому в предыдущих рассуждениях можно заменить L'_{r_0} и B_{r_0} на L'_r и B_r соответственно, $r \in (r_0, r_0 + \delta)$. Получим строгую вложенность компактов B_r с возрастанием $r \in (r_0, r_0 + \delta)$.

Обозначим через $(r_0, R\rangle = \mathscr{R}$ связное подмножество всех $r \in (r_0, 1)$, для которых определенные выше кривые L'_r существуют и обладают вышеописанными свойствами: $L'_r = \partial B_r$, B_r — односвязные компакты из $\mathbb{C} \setminus f(\Delta_r)$, $B_{r_2} \subset \operatorname{int} B_{r_1}$ при $r_0 < r_1 < r_2 < R$. Как показано выше, $(r_0, r_0 + \delta) \subset \mathscr{R}$ при малых δ, следовательно, $\mathscr{R} \neq \varnothing$. Покажем, что $\mathscr{R}$ открыто, т. е. $\mathscr{R} = (r_0, R)$, $R \leq 1$. Для этого надо показать, что для любого $\rho \in \mathscr{R}$ существует такое $\delta > 0$, что $(\rho, \rho + \delta) \subset \mathscr{R}$. Если $a(\rho)$ — точка самопересечения (не самокасания) кривой $L_\rho^+ = \{f(\rho e^{it}) : t \in [\alpha(\rho) - \eta, \beta(\rho) + \eta]\}$ и $\eta > 0$ мало, то те же рассуждения, что и в случае $\rho = r_0$, приводят к существованию интервала $(\rho, \rho + \delta) \subset \mathscr{R}$. Пусть теперь $a(\rho)$ — точка самокасания кривой L_ρ^+; можно считать $a(\rho)$ точкой раздвоенности этой кривой (если самокасание L_ρ^+ происходит по невырожденной дуге, то в качестве $a(\rho)$ возьмем концевую точку этой дуги). Тогда раствор угла θ в угловой точке $a(\rho)$ области $\operatorname{int} B_\rho$ равен 0 или π, или 2π. Если $\theta = 0$, то существование интервала $(\rho, \rho + \delta) \subset \mathscr{R}$ получаем так же, как при $\rho = r_0$. Пусть теперь $\theta = \pi$ или $\theta = 2\pi$. Поскольку $a(\rho)$ — точка самокасания и раздвоенности, то продолжение кривой L'_ρ, соответствующее значениям $t \in (\beta(\rho), \beta(\rho) + \eta)$ или $t \in (\alpha(\rho) - \eta, \alpha(\rho))$, лежит в $\operatorname{int} B_\rho$. Не умаляя общности, будем считать, что реализуется первая возможность: $t \in (\beta(\rho), \beta(\rho) + \eta)$.

Будем следовать по кривой L_ρ в компакте B_ρ от точки $a(\rho)$ в направлении возрастания t, пока не придем к одной из следующих возможностей.

1. Кривая L_ρ пересечет L'_ρ в точке $b(\rho)$. Тогда рассмотрим простую замкнутую кривую $L_\rho^* \subset L_\rho$ с началом и концом в $b(\rho)$,

$$L_\rho^* = \{f(\rho e^{it}) : t \in [\alpha_1, \beta_1]\}, \quad \alpha_1 \in (\alpha, \beta],\ \beta_1 > \beta.$$

Обозначим через B_ρ^* односвязный компакт с границей L_ρ^*, $B_\rho^* \subset B_\rho$. Теперь в наших рассуждениях вместо кривой L'_ρ возьмем L_ρ^*, вместо $a(\rho)$ — точку $b(\rho)$. Согласно ранее рассмотренному случаю, когда $a(\rho)$ была точкой самопересечения кривой L_ρ^+, получим существование интервала $(\rho, \rho + \delta) \subset \mathscr{R}$.

2. При $t > \beta(\rho)$ кривая L_ρ, не выходя из $\operatorname{int} B_\rho$, пересекает себя в точке $b(\rho)$. В этом случае также существует простая замкнутая кривая L_ρ^* с началом и концом в $b(\rho)$, ограничивающая односвязный компакт $B_\rho^* \subset B_\rho$,

$$L_\rho^* = \{f(\rho e^{it}) : t \in [\alpha_1, \beta_1]\}, \quad \beta(\rho) < \alpha_1.$$

Опять, заменяя L'_ρ на L_ρ^* и $a(\rho)$ на $b(\rho)$, приходим к существованию интервала $(\rho, \rho + \delta) \subset \mathscr{R}$.

3. При $t > \beta(\rho)$ кривая L_ρ касается (не пересекая) себя или кривой L'_ρ в точке $b(\rho)$. В этом случае также существует простая замкнутая кривая L^*_ρ с началом и концом в $b(\rho)$, служащая границей односвязного компакта $B^*_\rho \subset B_\rho$. Тогда $b(\rho)$ — точка раздвоенности кривой L_ρ, а по лемме число N таких точек на L_ρ конечно. Если в области $\operatorname{int} B^*_\rho$ величина угла в угловой точке $b(\rho)$ равна 0, то (см. случай $\theta = 0$) сразу приходим к существованию интервала $(\rho, \rho+\delta) \subset \mathscr{R}$. В противном случае, повторив рассуждения п. 3 конечное число ($< N$) раз, придем к одному из разобранных в пп. 1, 2 случаев, гарантирующих существование интервала $(\rho, \rho+\delta) \subset \mathscr{R}$.

Покажем теперь, что $R = 1$. Предположим противное: $R < 1$.

Существует последовательность $r_n \to R-$, для которой граничные точки дуг Γ'_{r_n} имеют пределы — граничные точки дуги Γ'_R (дуга Γ'_R может быть и вырожденной). Таким образом, Γ'_R — предельное положение дуг Γ'_{r_n}. Тогда замкнутая кривая $L'_R = f(\Gamma'_R)$ не может содержать дуги, являющейся границей односвязного компакта $B_R \subset B_r$, $r \in (r_0, R)$, с непустой внутренностью $\operatorname{int} B_R$ — иначе, как и при доказательстве открытости $\mathscr{R}$, придем к существованию интервала $(R, R+\delta) \subset \mathscr{R}$, $\delta > 0$, что противоречит определению R. Поэтому из леммы вытекает, что L'_R — точка.

Тогда последовательность петель L'_{r_n} будет стягиваться в точку $A = L'_R$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : |f(z) - A| < \varepsilon\ \forall z \in \Gamma'_{r_n}\ \forall n > N(\varepsilon)$. Из теоремы единственности следует, что длины дуг Γ'_{r_n} стремятся к нулю при $n \to \infty$. Вместе с тем для любого n на Γ'_{r_n} существуют две точки z'_n и z''_n, в которых $\arg[f'(z'_n)z'_n] = \arg[f'(z''_n)z''_n)] + \pi$, $(z'_n - z''_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, $f'(z_0) = 0$, где z_0 — предельная точка для $\{z'_n\}_{n=1}^\infty$. Получили противоречие с локальной однолистностью f. Значит, $R = 1$.

Найдется последовательность $r_n \to 1-$, для которой существует $\lim\limits_{n\to\infty} a(r_n) = a_0$. Поскольку

$$B_R \subset \operatorname{int} B_r \quad \text{при } r_0 < r < R < 1, \tag{1}$$

то $a_0 \in \operatorname{int} B_r$ для всех $r \in (r_0, 1)$ и $a_0 \in \bigcap\limits_{r\in(r_0,1)} B_r$. Поэтому для любого $r \in (r_0, 1)$ существуют такие малые окрестности $U_1(r)$ и $U_2(r)$ радиуса $\delta(r)$ граничных точек дуги Γ'_r, что

$$0 < 4\delta(r) < 1 - r \quad \text{и} \quad 0 < 4\rho(f(U_k(r)), a_0) < |a(r) - a_0| \quad \text{для } k = 1, 2. \tag{2}$$

Из определения $a(r)$ вытекает существование малой окрестности этой точки, дважды покрываемой f-образом множества $U_1(r) \cup U_2(r)$. Поэтому в любой окрестности точки a_0 существуют точки, дважды покрываемые f-образом множества $E = \bigcup\limits_{r\in(r_0,1)} (U_1(r) \cup \Gamma'_r \cup U_2(r)) \subset \Delta$, но $a_0 \notin f(E)$.

Поскольку $f(\Delta) = \mathbb{C}$, существует точка $z_* \in \Delta \setminus E$, $|z_*| = r_* \in [0, 1)$, в которой $f(z_*) = a_0$. Предположим, что $z_* \in \partial E$. Тогда существует последовательность $z_n \in E$, $z_n \to z_*$. Можно считать, что $|z_n - z_*| < \frac{1-r_*}{4}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $z_n \in \bigcup\limits_{r\in(r_0,\frac{1+r_*}{2})} (U_1(r) \cup \Gamma'_r \cup U_2(r))$, так как $4\delta(r) < 1 - r$. Отсюда, из (1) и неравенства (2) вытекает отделенность от a_0 последовательности $f(z_n)$, что противоречит непрерывности f в точке z_*. Таким образом, $z_* \notin \overline{E}$. Существует такая окрестность $U_* \subset \Delta$ точки z_*, что $U_* \cap \overline{E} = \varnothing$. Как отмечено ранее, f-образ множества E дважды покрывает некоторые точки из сколь угодно малой окрестности $a_0 = f(z_*)$. Следовательно, в окрестности a_0 существуют точки, трижды покрытые f-образом множества $E \cup U_*$; противоречие.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из теоремы Римана и доказательства теоремы 2 следует, что для любой односвязной области $\mathscr{D} \neq \mathbb{C}$ не существует конформного отображения, 2-листно переводящего $\mathscr{D}$ на $\mathbb{C}$. Но этот факт верен не только для односвязных областей. Доказательство теоремы 2 с минимальными изменениями проходит, например, для кольца $\mathscr{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Действительно, предположим, что существует конформное 2-листное отображение f кольца $\mathscr{D}_1$ на $\mathbb{C}$. Для фиксированного $r_0 \in (1, 2)$ рассмотрим образ $L_{r_0} = f(\Gamma_{r_0})$ окружности $\Gamma_{r_0} = \{z : |z| = r_0\}$. По лемме существует простая замкнутая кривая $L'_{r_0} \subset L_{r_0}$ (не исключено, что $L'_{r_0} = L_{r_0}$), являющаяся f-образом дуги $\Gamma'_{r_0} \subset \Gamma_{r_0}$. Далее, как и в доказательстве теоремы 2, обозначим через B_{r_0} односвязный компакт из $\mathbb{C}$ с границей L'_{r_0}. Монотонно изменяя r начиная с r_0 (для определенности будем считать, что r меняется от r_0 до 2), получим, как и в доказательстве теоремы 2, семейство строго вложенных с возрастанием r односвязных компактов B_r, $\partial B_r = L'_r = f(\Gamma'_r)$, Γ'_r — связная дуга окружности Γ_r. Как и ранее, обозначим $a(r) = f(\partial\Gamma'_r)$, $r \in (r_0, 2)$. Подобным же образом строится множество $E \subset \mathscr{D}_1$, f-образ которого не покрывает предельную точку $a_0 = \lim\limits_{r_n \to 2-} a(r_n)$. Затем, как и в доказательстве теоремы 2, приходим к существованию точек из $\mathbb{C}$, трижды покрываемых f-образом кольца $\mathscr{D}_1$. Получаем противоречие с 2-листностью f.

Замечание 2. Те же рассуждения, что и в замечании 1, проходят при рассмотрении вопроса о существовании конформного 2-листного отображения f кольца $\mathscr{D}_1$ на круг Δ. Поэтому справедлива следующая

Теорема 3. *Для класса многосвязных областей $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, имеющих изолированный граничный фрагмент* I *или* II *рода, листность конформного отображения $f : \mathscr{D} \xrightarrow{\text{на}} \Delta$ не менее* 3.

В [2] доказано, что для любой многосвязной области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, имеющей изолированный граничный фрагмент I или II рода, существует 5-листное конформное отображение такой области на Δ. Отсюда и из теоремы 3 вытекает, что для класса всех многосвязных областей $\mathscr{D}$ с изолированным граничным фрагментом I или II рода минимальная листность m конформных отображений $f : \mathscr{D} \xrightarrow{\text{на}} \Delta$ удовлетворяет неравенству $3 \leq m \leq 5$. Это обстоятельство укрепляет высказанную в [2] гипотезу о том, что $m = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ligocka E.* On locally biholomorphic surjective mappings // Ann. Polon. Math. 2003. V. 82, N 2. P. 127–135.
2. *Liczberski P., Starkov V. V.* On locally biholomorphic mappings from multi-connected onto simply connected domains // Ann. Polon. Math. 2005. V. 85, N 2. P. 135–143.
3. *Fornaess J. E., Stout E. L.* Spreading polydiscs on complex manifolds // Amer. J. Math. 1977. V. 99, N 3. P. 933–960.

Статья поступила 29 марта 2006 г.

Старков Виктор Васильевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
Vstar@psu.karelia.ru